Boletín 2 - Integrales

1) $\displaystyle\int \frac{1+tg^2 x}{\sqrt{tg\,x}}\,dx = \int (1+tg^2 x)(tg\,x)^{-1/2}\,dx$

$y = tg\,x$

$y' = 1 + tg^2 x$

$\displaystyle = \frac{(tg\,x)^{-1/2+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = 2\sqrt{tg\,x} + C$

2) $\displaystyle\int \frac{3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = 3\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{4}-\frac{x^2}{4}}}\,dx =$

es un 2 fuera de la raíz

$\displaystyle = \frac{3}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}\,dx =$

$\displaystyle = \frac{3}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\,dx =$

$\displaystyle = \frac{3}{2}\cdot 2\int \frac{1/2}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\,dx = 3\,\mathrm{arcosen}\left(\frac{x}{2}\right) + C$

3) $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^3-3x}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3(x^2-1)}{x^3-3x} = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2-3}{x^3-3x}\,dx =$

$\displaystyle = \frac{1}{3}\ln|x^3-3x| + C$

4) $\int \frac{5}{1+9x^2}\,dx = \frac{5}{3}\int \frac{3}{1+(3x)^2}\,dx = \frac{5}{3}\,\text{arctg}(3x)+C$

5) $\int \frac{5x^2+3x-1}{x^3-2x^2+x-2}$

1º Vemos que no se pueden dividir!
2º vemos que el numerador no es la derivada del denominador o si factorizando algún número de la expresión del numerador ⇒ no es el caso.

$x^3-2x^2+x-2=(x^3-2x^2)+(x-2)$

Factor común por agrupación de términos

$=x^2(x-2)+1(x-2)= \rightarrow (x-2)(x^2+1)$

→ Factorizamos →

→ Operamos → Soluc.

$5\ln|x-2|+3\,\text{arctg}\,x+C$

6) $\int \frac{e^x}{2-3e^x}\,dx = -\frac{1}{3}\int \frac{-3e^x}{2-3e^x}\,dx = -\frac{1}{3}\ln|2-3e^x|+C$

7) $\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \int \frac{1-\sqrt{t^6}}{\sqrt[3]{t^6}}\cdot 6t^5dt = \int \frac{1-t^{6/2}}{t^{6/3}}\cdot 6t^5dt$

$= \int \frac{1-t^3}{t^2}\cdot 6t^5dt =$

m.c.m índices raíces es 6

$= \int 1-t^3\cdot 6t^3\,dt =$

$t^6 = x \rightarrow dx = 6t^5dt$

$t = \sqrt[6]{x}$

$= 6\int (t^3-t^6)\,dt =$

deshacemos cambio de variable!

$6\left(\frac{\sqrt[6]{x^4}}{4}+\frac{\sqrt[6]{x^7}}{7}\right)+C \Leftarrow = 6\left[\frac{t^4}{4}-\frac{t^7}{7}\right]+C$

8) $\int \frac{e^x - 3e^{2x}}{1+e^x}\,dx \Rightarrow \int \frac{t - 3\cdot t^2}{1+t}\frac{dt}{t} =$

$t = e^x \rightarrow dt = e^x dx$

$dx = \frac{dt}{e^x} \rightarrow dx = \frac{dt}{t}$

$\int \frac{t(1-3t)}{(1+t)\cancel{t}}\,dt =$

$= \int \frac{1-3t}{1+t}\,dt =$

cociente de polinomios con el mismo grado!

$= \int \frac{-3t+1}{t+1}\,dt =$

$$\begin{array}{r|l} -3t+1 & t+1 \\ +3t+3 & -3 \\ \hline 4 & \end{array}$$

$= \int -3\,dt + \int \frac{4}{t+1}\,dt =$

$= -3t + 4\cdot \ln|t+1| + C$

deshacemos cambio $= -3e^x + 4\cdot \ln|e^x+1| + C$

9) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx \Rightarrow = \int \frac{1}{t\cdot(1+t^2)} 2t\,dt = \int \frac{2}{1+t^2}\,dt$

$t = \sqrt{x} \quad dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

$t^2 = x$

$dx = 2\sqrt{x}\,dt$

$dx = 2t\cdot dt$

$= 2\int \frac{1}{1+t^2}\,dt =$

$= 2\cdot \operatorname{arctg} t + C \Rightarrow$ deshacemos cambio

$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx = 2\cdot \operatorname{arctg}\sqrt{x} + C$