Aplicación conjunta de los teoremas de Bolzano y Rolle

Ej. 1 Demuestra q. x^5+5x+1 tiene una ÚNICA solución real

Solución

1º Existencia (Bolzano)

$f(x)=x^5+5x+1$ func. polinómica $\Rightarrow$ cont y deriv en $\mathbb{R}$

$f(0)=1>0$ (además $f(x)>0\ \forall x\in[0,+\infty)$)

$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=5>0 \\ f(-2)=-41<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f \text{ cont } [-2,-1] \\ f \text{ deriv } (-2,-1) \\ f(-1)\cdot f(-2)<0 \end{array}\right| \underset{\text{Bolzano}}{\Rightarrow} \exists c\in(-2,-1) \text{ t.q. } f(c)=0$$

2º Unicidad (Rolle)

por reducción al absurdo, supongamos q. es falso y que $\exists\ c_1<c_2\in\mathbb{R}$ t.q. $f(c_1)=f(c_2)=0$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} f \text{ cont } [c_1,c_2] \\ f \text{ deriv } (c_1,c_2) \\ f(c_1)=f(c_2) \end{array}\right\} \underset{\text{Rolle}}{\Rightarrow} \exists\ c\in(c_1,c_2)\ /\ f'(c)=0$$

En nuestro caso $f'(x)=5x^4+5>0\ \forall x\in\mathbb{R}$ por ser 4 nº par y $5>0$

¡Absurdo! $\Rightarrow$ la hipótesis de partida es falsa

y por tanto $\exists!\ c\in\mathbb{R}$ (en particular en $(-2,-1)$) t.q. $f(c)=0$.

Ej. 2 Demuestra q. 2^x+x-2 tiene una única raíz real

Sol llamo $f(x)=2^x+x-2$ func. elemental suma de una exponencial y una polinómica, $\text{Dom} f=\mathbb{R}$

f cont y deriv. en $\mathbb{R}$

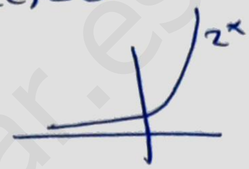
Existencia (Bolzano) $\left.\begin{array}{l} f(0)=-1<0 \\ f(1)=1>0 \end{array}\right| \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ cont en } [0,1] \\ f \text{ deriv en } (0,1) \\ f(0)\cdot f(1) < 0 \end{array}\right\} \underset{\text{th. Bolzano}}{\Rightarrow} \exists\, c \in (0,1) \text{ tq } f(c)=0$$

UNICIDAD (Rolle)

por reducción al absurdo, supongamos que hubiese más de una raíz $\Rightarrow \exists\ c_1 < c_2 \in \mathbb{R}$ t.q. $f(c_1)=f(c_2)=0$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} f \text{ cont } [c_1,c_2] \\ f \text{ deriv } (c_1,c_2) \\ f(c_1)=f(c_2) \end{array}\right| \underset{\text{th Rolle}}{\Rightarrow} \exists\ c \in (c_1,c_2) \ /\ f'(c)=0$$



$f'(x) = 2^x \ln 2 + 1$, como $2^x > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$
$\ln 2 > 0$
$1 > 0$

$\Rightarrow f'(x) > 0$ ¡absurdo!

$\Rightarrow$ Sólo puede haber una raíz. y está en $(0,1)$

CONCLUSIÓN

Unicidad de Soluciones (monotonía de la 1ª derivada)

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } f \text{ cont. y deriv} \\ f \text{ estrictamente creciente} \end{array}\right| \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{Si existe una solución} \\ \text{para } f(x)=0 \Rightarrow \text{es ÚNICA} \end{array}\right]$$

* Se puede enunciar lo mismo para f decreciente

Demost por reducción al absurdo, supongamos $\exists\ c_1 < c_2 \in \mathbb{R}$ tq. $f(c_1)=f(c_2)=0$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ cont } [c_1,c_2] \\ f \text{ deriv } (c_1,c_2) \\ f(c_1)=f(c_2) \end{array}\right\} \underset{\text{Rolle}}{\Rightarrow} \exists\ c \in (c_1,c_2) \ /\ f'(c)=0$$

Pero por f estrictamente creciente $f'(x) > 0\ \forall x \Rightarrow$ ¡Absurdo!
y por tanto $\neq 0$

$\Rightarrow$ Si existe solución es única

Bolzano se usa para localizar el intervalo en el q. exista la raíz (No siempre la hay)

Ej 3 Demostrar q. x^3+x+1 corta al eje X en un único pto

—∘—

Sol $f(x)=x^3+x+1$ func. polinómica $\Rightarrow$ cont y deriv en $\mathbb{R}$

Existencia (Bolzano) busco el intervalo q. me interesa

$f(0)=1>0$ (y cualq. $x>0$ también) int $[-1,1]$

$f(-1)=-1<0$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ cont } [-1,1] \\ f \text{ deriv } (-1,1) \\ f(-1)\cdot f(1)<0 \end{array}\right\} \underset{\text{Bolzano}}{\Rightarrow} \exists\, c\in(-1,1) \text{ tq. } f(c)=0$$

Unicidad (Rolle) por reducción al absurdo, supongamos q. es falso $\Rightarrow \exists\, c_1<c_2\in\mathbb{R}$ tq. $f(c_1)=f(c_2)=0$

Como
$$\left.\begin{array}{l} f \text{ cont } [c_1,c_2] \\ f \text{ deriv } (c_1,c_2) \\ f(c_1)=f(c_2) \end{array}\right\} \underset{\text{Rolle}}{\Rightarrow} \exists\, c\in(c_1,c_2) \,/\, f'(c)=0$$

Veamos quién es $f'(x)$

$f'(x)=3x^2+1>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

p.g. 2 par y $1>0$

$\Rightarrow$ ¡absurdo! ($\nexists\, c\in(c_1,c_2)$ con $f'(c)=0$) $\Rightarrow$ la raíz es ÚNICA

Ejercicios para seguir practicando

$\boxed{4}$ Comprobar q. en $[0,1]$, $f(x)=2x^3+x^2$ y $g(x)=x^2+6x-1$ se cortan en un único pto

$\boxed{5}$ Demostrar q. $x+1=e^x$ tiene una única solución real

$\boxed{6}$ Demostrar q. $4x^3+3x^2+2x+1=0$ tiene una única solución en $\mathbb{R}$

$\boxed{7}$ Idem para $x^3-6x^2+15x-25=0$