TEOREMAS DE CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD

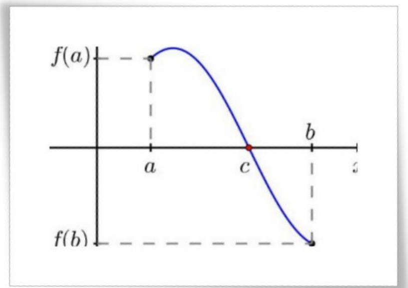
TEOREMA DE BOLZANO

Dada una función $f(x)\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ entonces:

$$\left.\begin{array}{c} si\ f(x)\ es\ continua\ en\ [a,b] \\ y\quad f(a)\cdot f(b) < 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists\ c \in (a,b)\ \ t.q.\ \ \boldsymbol{f(c) = 0}$$

Dicho de otra forma, si tenemos una función continua en un intervalo cerrado y en los extremos de dicho intervalo cambia de signo, entonces tiene que existir al menos un punto en el que la gráfica de la función corte el eje X.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

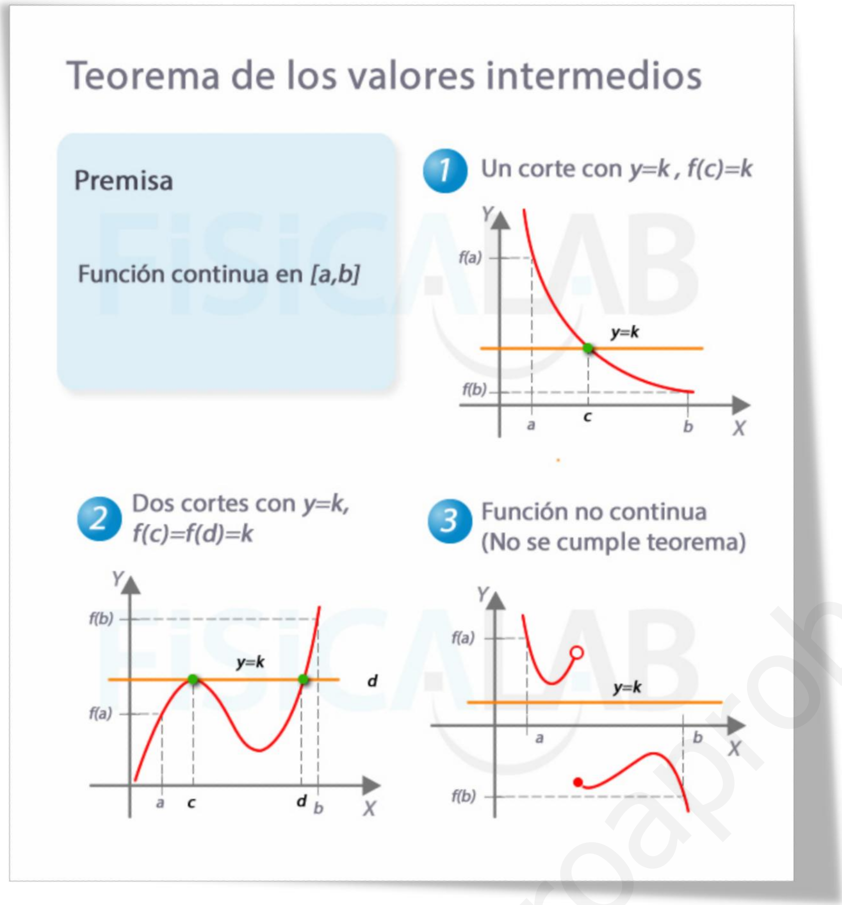


TEOREMA DE VALORES INTERMEDIOS, REGLA DE DARBOUX

$$\left.\begin{array}{c} f(x)\ continua\ en\ [a,b] \\ k \in (f(a), f(b)) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists\ c \in (a,b)\ \ t.q.\ \ f(c) = k$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

El teorema de los valores intermedios, a veces llamado de Darboux, afirma que una función continua en un intervalo [a,b] toma todos los valores comprendidos entre f(a) y f(b). Se trata de una consecuencia directa del teorema de Bolzano.

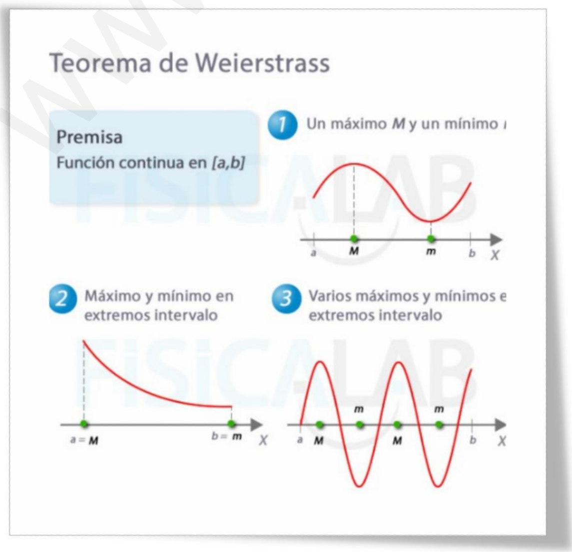


TEOREMA DE WEIERSTRASS

Tiene dos formas de expresarse:

$$\begin{aligned} &Forma\ 1.\ \ Si\ f(x)\ es\ continua\ en\ [a,b] \Longrightarrow f(x)\ está\ acotada\ en\ ese\ intervalo \\ &Forma\ 2.\ \ Si\ f(x)\ es\ continua\ en\ [a,b] \Longrightarrow f(x) alcanza\ sus\ máximos\ y\ mínimos\ absolutos\ en\ ese\ intervalo \end{aligned}$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA



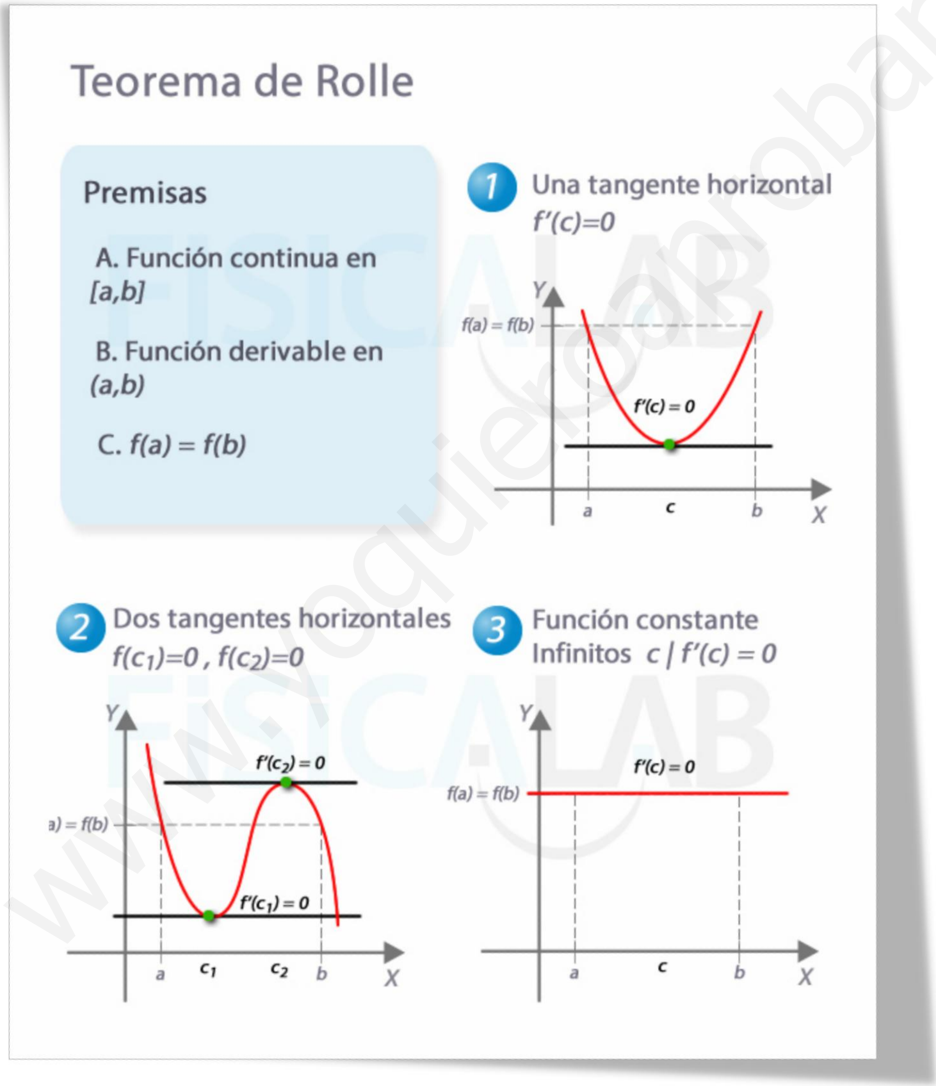
TEOREMA DE ROLLE

Dada una función $f(x): \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ entonces:

$$\left.\begin{matrix} si\ f(x)\ es\ continua\ en\ [a,b] \\ derivable\ en\ (a,b) \end{matrix} \quad y\ f(b) = f(a)\right\} \Longrightarrow \exists\ c \in (a,b)\ \ t.q.\ \ \boldsymbol{f'(c) = 0}$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

Si se cumplen las condiciones del teorema de Rolle entonces existe al menos un punto intermedio en el intervalo donde la recta tangente es paralela al eje de abscisas



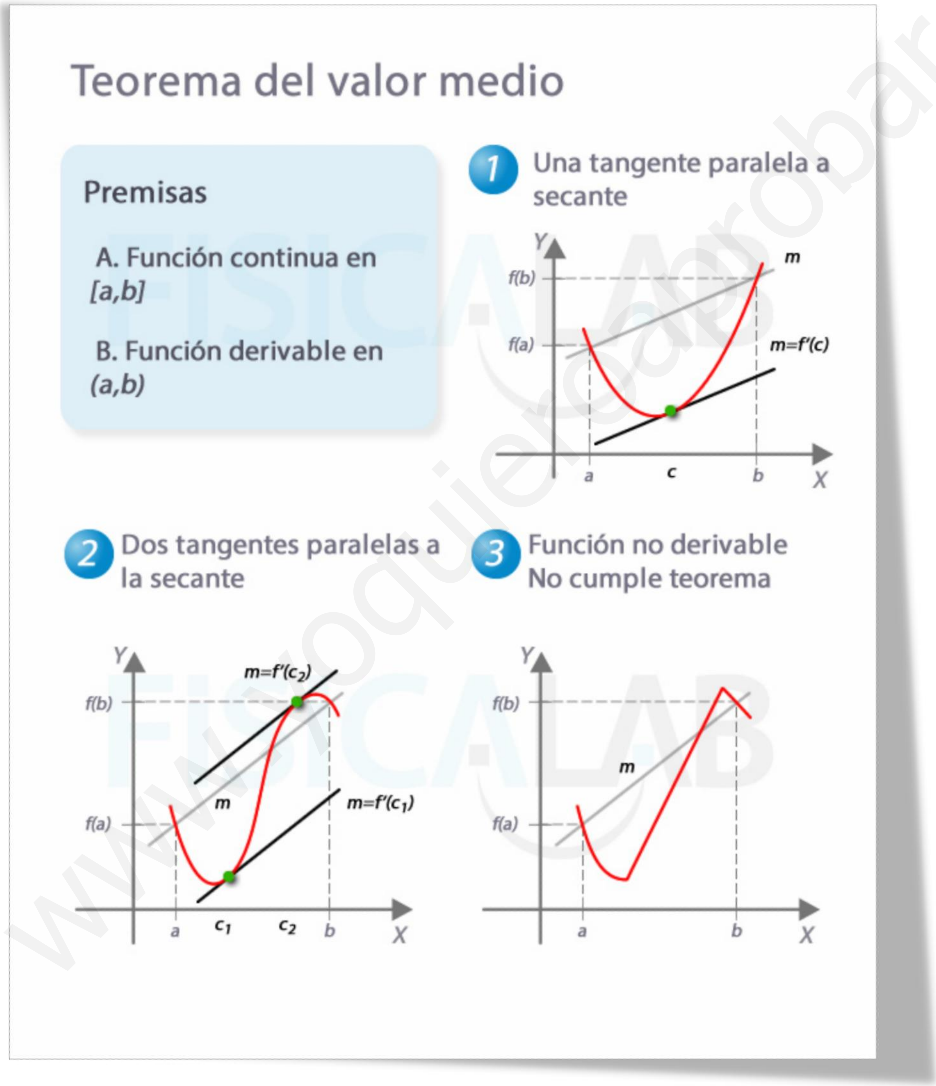
TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CÁLCULO DIFERENCIAL O TEOREMA DE LAGRANGE

Dada una función $f(x): \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ entonces:

$$\left.\begin{array}{c} si\ f(x)\ es\ continua\ en\ [a,b] \\ y\ derivable\ en\ (a,b) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists\ c \in (a,b) \quad \boldsymbol{f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

Si se cumplen las condiciones del teorema entonces existe al menos un punto intermedio en el intervalo donde la recta tangente a la gráfica es paralela a la recta que une los puntos (a,f(a)) y (b,f(b))



FICHA APLICACIÓN DE TEOREMAS

1. Demostrar que la ecuación $x^3+x-5=0$ tiene al menos una solución en el intervalo (1,2)

2. Demostrar que la ecuación $x^{2009}-e^x+2=0$ tiene alguna solución

3. Demostrar que las curvas $f(x)=\sin x$ y $g(x)=\frac{1}{x}$ se cortan en algún punto del intervalo $\left(2\pi,\frac{5\pi}{2}\right)$

4. Justifica si las funciones siguientes están acotadas en el intervalo que se indica:

   $a)\quad f(x)=\dfrac{4}{x}\ en\ el\ intervalo\ [1,3]$ $\qquad b)\quad f(x)=\dfrac{3x}{x-2}\ en\ el\ intervalo\ [0,3]$

5. Sea la función $f(x)=2x+1$ ¿Se puede afirmar que toma todos los valores del intervalo $[1,5]$

6. **GALICIA 2008.** Enunciado del teorema de Weierstrass. Si una función es continua en $[a,b]$y es estrictamente decreciente en ese intervalo, ¿dónde alcanza la función el máximo y el mínimo absoluto?

7. **CASTILLA LA MANCHA EXT 2021.** Sea la función $\mathrm{f(x) = x\ sen(x) - cos(x)}$. Enuncia el teorema de Rolle y úsalo para razonar si la función f(x) tiene al menos un extremo relativo en el intervalo [−1, 1].

8. **GALICIA 2018.** Enuncia el teorema de Rolle. Calcula a, b y c para que la función $f(x)=\begin{cases}2x^2+ax, & si\ x<1\\ bx+c, & si\ x\geq 1\end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0,2]$ y calcula el punto en el que se cumple el teorema.

9. **GALICIA 2013.** Enuncia el teorema de Rolle. Determina el valor de a para que sea aplicable el teorema de Rolle a la función $f(x)=x^3+ax-1$, en el intervalo [0,1]. Para este valor de a, calcula el punto $c\in(0,1)$ en el que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ sea paralela al eje OX.

10. **GALICIA 2012 EXT opción B**. Si c>2, calcula los valores de a,b,c para que la función $f(x)=\begin{cases}x^2+ax+b, & si\ x<2\\ x+1, & si\ x\geq 2\end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [0,c]

11. **GALICIA 2011.** Enunciado e interpretación geométrica de Rolle. Calcula el valor de k para que la función $f(x)=x^3-kx+10$ cumpla las hipótesis de Rolle en el intervalo [-2,0] y para ese valor determina un punto del intervalo en el que se anule la derivada de $f(x)$.

12. **GALICIA 2014 ORD Opción B.** Enuncia el teorema del valor medio del cálculo diferencial. ¿Se puede aplicar, en el intervalo [0,1], este teorema a la función $f(x)=\frac{1}{2-x}$? En caso afirmativo calcula el punto al que hace referencia el teorema.

13. **GALICIA 2014 EXT Opción B.** Dada la función $f(x)=\begin{cases}mx, & si\ x<1\\ ax^2+bx+1, & si\ x\geq 1\end{cases}$

    a. Calcula los valores a,b y m para que la función sea derivable en $x=1$ y tenga un extremo relativo en $x=3$.

    b. Enuncia el teorema del valor medio del cálculo diferencial. Para los valores $a=1, b=-6, m=-4$, calcula, si existe, un punto $c\in(0,5)$ tal que la tangente a la gráfica en $x=c$ sea paralela al segmento que une los puntos (0,0) , (5,-4)

14. **NAVARRA ORD 2021**. Sea la función:

$$f(x)=\ln\left(\frac{5x-2-x\sin\dfrac{\pi x}{2}}{x^2-4x+6}\right)$$

a. Demuestra que la función es continua en el intervalo [1,3].

b. Demuestra que existe $\alpha \in (1,3)$ tal que $f'(\alpha) = 3 / 2 \ln 2$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

15. **NAVARRA EXT. 2021**. Se considera la función: $f(x)=\sqrt{x+\sin\dfrac{\pi x}{2}}$

a. Demuestra que la función es continua en el intervalo [1,3].

b. Demuestra que existen dos valores $\alpha \in (1,2)$ y $\beta \in (2,3)$ tal que $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

[1] $x^3+x-5=0$ q. es lo mismo que buscar para $f(x)=x^3+x-5$ un pto corte eje X. El ejercicio lo pide para el intervalo $(1,2)$

f func. polinómica $\Rightarrow$ f cont en $\mathbb{R}$, en particular f cont $[1,2]$

$f(1)=-3$; $f(2)=8+2-5=5$ $\Rightarrow$ por th. Bolzano

$\exists\, c \in (1,2)$ tq. $f(c)=0$

[2] $x^{2009}-e^x+2=0$; no nos dan intervalo, tenemos que buscar dos ptos en los que la función cambie de signo.

$f(0)=0-1+2=1>0$

$f(1)=1-e+2=3-e>0$ muy cerca ya del cero.

pensamos ... si $x>0 \Rightarrow \begin{cases} x^{2009}+2>0 \\ e^x>0 \end{cases}$ tenemos que buscar que esas dos cantidades se aproximen para conseguir que se anulen

$x\in(0,1)$, tomo $0'1=\frac{1}{10}$; $(0'1)^{2009}+2=$

$=\frac{1}{10^{2009}}+2 \underset{\substack{\text{si me}\\ \text{aproximo}\\ \text{al } 1}}{\leadsto} e$

tomo un nº próximo al 1, por ejemplo $0'9$

$f(0'9)=-0'459<0$ $\Rightarrow$ si tomo $[0'9,1]$, f cont $[0'9,1]$ $\Rightarrow$ por

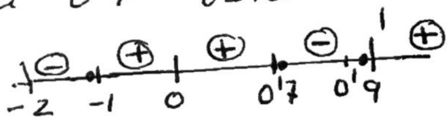
Bolzano $\exists\, c\in(0'9,1)$ tq. $f(c)=0$

• Otras soluciones: (Esta ecuación tiene 3 raíces reales una próx. al -1, otra próxima al $0'7$ y otra al 1, se puede ver en geogebra)

Si hubiésemos probado con $0'7$ obtendríamos que también se cumple en $[0, 0'7]$

ó también en $[0'7, 1]$

y también en $[-2,-1]$



p. ejemplo $f(-1)=-1-\frac{1}{e}+2$ ⊕

$f(-2)=\underbrace{-2^{2009}-\frac{1}{e^{2009}}+2}_{\text{es obvio que esta cantidad}}<0$ ⊖

es − y mucho mayor que 2

[3] Construyo la función ...

$f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en SU DOMINIO

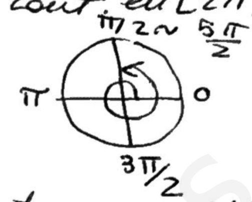
(por ser dos func. element. y una de ellas una hipérbola)

i.e. donde su denominador $\neq 0$. En nuestro caso $x \neq 0$

h cont $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

como $2\pi > 0 \Rightarrow \left[2\pi, \frac{5\pi}{2}\right] \subset (0,+\infty) \Rightarrow f$ cont. en $\left[2\pi, \frac{5\pi}{2}\right]$

$$\left.\begin{array}{l} h(2\pi) = \operatorname{sen} 2\pi - \frac{1}{2\pi} = 0 - \frac{1}{2\pi} < 0 \\ h\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} \frac{5\pi}{2} - \frac{2}{5\pi} = 1 - \frac{2}{5\pi} > 0 \end{array}\right\}$$



Se cumplen las hipótesis de Bolzano en el int. $\left[2\pi, \frac{5\pi}{2}\right]$

$\Rightarrow \exists\, c \in \left(2\pi, \frac{5\pi}{2}\right)$ t.q. $h(c) = 0$ y por tanto $f(c) = g(c)$

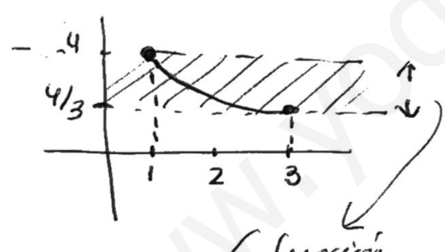
[4] a) $f(x) = \frac{4}{x}$ en $[1,3]$

f es una hipérbola, cont en su dominio i.e. en los ptos en los que su denominador es $\neq 0$, $\boxed{x \neq 0}$

Como $[1,3] \subset (0,+\infty) \Rightarrow f$ cont. en $[1,3] \Rightarrow$ por el th. Weierstrass f está ACOTADA en $[1,3]$

Explicación de cotas:

(eso quiere decir que tiene un "tope" superior (se llama cota superior) y otro inferior, ver dibujo)



por ejemplo cota superior podemos tomar 4 $\forall\, x \in [1,3] \Rightarrow f(x) \leq 4$

y como cota inferior $\frac{4}{3}$ $\forall x \in [1,3] \Rightarrow f(x) \geq \frac{4}{3}$

La función en $[1,3]$ queda "encerrada" o acotada entre $\frac{4}{3}$ y 4

b) $f(x) = \frac{3x}{x-2}$ hipérbola, $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \{2\}$

$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

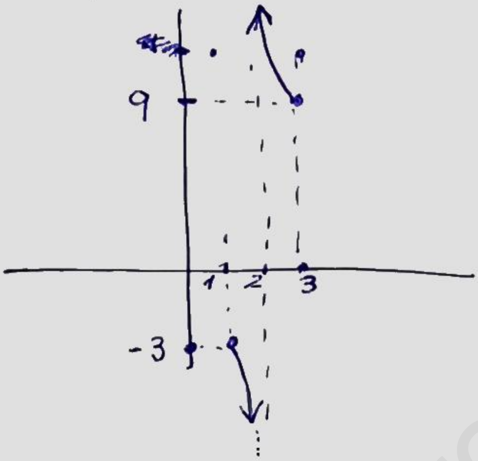
f cont en $\mathbb{R} - \{2\} = (-\infty,2)\cup(2,+\infty)$

PERO $2 \in [0,3] \Rightarrow$ NO podemos decir que f sea continua en $[0,3] \Rightarrow$ NO se cumplen las hipótesis de Weierstrass $\Rightarrow$ NO podemos afirmar que esté acotada. De hecho NO lo esté, ya que al aproximarnos al 2 (pto. de NO dominio) la función se va al $\pm\infty$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{6}{0} \text{ IND } \pm\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{3x}{x-2} = -\infty \quad y \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$$

(tiene A.V. en $x=2$) por lo que es imposible que f esté acotada en $[0,3]$



$\boxed{5}$ $f(x) = 2x+1$ func. polinómica $\Rightarrow f$ cont en $\mathbb{R}$ ✓

$1 = 2x+1 \iff x=0$
$5 = 2x+1 \iff x=2$ } el intervalo $[0,2] \subset \mathbb{R} \Rightarrow$

f cont en $[0,2]$ $\Rightarrow$ por el Th. valores intermedios

(Darboux) $\forall k \in (1,5) \Rightarrow \exists\, c \in (0,2) \;/\; f(c)=k$

$$(1,5) = (f(0), f(2))$$

Así que f recorre todos los valores entre $[1,5]$

* $\boxed{6}$ GALICIA ORD 2008 Op. $\boxed{2}$ 3a) ✓

enunciado Weierstrass 0'5
ejercicio 0'5

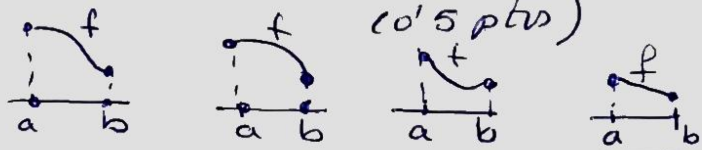
Weierstrass
f cont $[a,b] \Rightarrow f$ alcanza máximo y mínimo en ese intervalo

Por ser f además estrictamente DEcreciente $\Rightarrow$

$$a < x \leq b \Rightarrow f(a) > f(x) \geq f(b)$$

$\Rightarrow f(x)$ alcanza máximo en $x=a$ y el mínimo $x=b$
(0'5 ptos)

Ejemplos



* [7] Castilla-La Mancha EXT 2021 7b)

$f(x) = x \operatorname{sen} x - \cos x$ en $[-1,1]$

f producto y resta de polinomios, senos y cosenos $\Rightarrow$ f cont y deriv en $\mathbb{R}$, en particular f cont $[-1,1]$
f deriv $(-1,1)$

Además $\boxed{f(-1) =} - \operatorname{sen}(-1) - \cos(-1) \underset{\uparrow}{=} -(-\operatorname{sen} 1) - \cos 1 =$

$\begin{bmatrix} \operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha \\ \cos(-\alpha) = \cos\alpha \end{bmatrix}$

$= \operatorname{sen} 1 - \cos 1 = \boxed{f(1)}$ por tanto se cumplen las hipótesis del th de Rolle $\Rightarrow \exists c \in (-1,1)$ tq $f'(c) = 0$

i.e. f tiene en $x = c$ un PUNTO CRÍTICO.

para justificar que es extremo relativo hay que demostrar que $f''(c) \neq 0$

$f'(x) = \operatorname{sen} x + x\cos x - (-\operatorname{sen} x) = 2\operatorname{sen} x + x\cos x$

$f'(c) = 2\operatorname{sen} c + c \cdot \cos c = 0 \Rightarrow \{\operatorname{sen} c = \frac{-c}{2}\cos c\}$ ⊛

$f''(x) = 2\cos x + \cos x + x(-\operatorname{sen} x) = 3\cos x - x\operatorname{sen} x$

$f''(c) = 3\cos c - c\operatorname{sen} c \underset{\uparrow \circledast}{=} 3\cos c - c \cdot (-\frac{c}{2}\cos c) =$

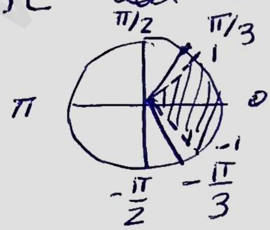
$= 3\cos c + \frac{c^2}{2} \cdot \cos c = (3 + \frac{c^2}{2}) \cdot \cos c$

$(3 + \frac{c^2}{2}) > 0$ siempre (por tanto $\neq 0$)

$\cos c$ con $c \in [-1,1)$?

$-1 \text{ rad} \simeq -60° = \frac{-\pi}{3}$

$1 \text{ rad} \simeq 60° = \frac{\pi}{3}$



en ese sector el coseno SIEMPRE es ⊕ y $\neq 0$

ya que $(-1,1) \subset [-\frac{\pi}{3}, +\frac{\pi}{3}]$

o si se quiere en $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$

(el coseno se anula en $\frac{\pi}{2}$ y $-\frac{\pi}{2}$)

por tanto $\cos c > 0$, uniendo ambas $f''(c) > 0$ y por tanto $\neq 0$, así que es un Ext. relativo (de hecho es un Mínimo relativo)

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = 2x^2 + ax & x<1 \\ f_2(x) = bx + c & x \geq 1 \end{cases}$$ función a trozos, donde

f_1 y f_2 son funciones polinómicas, por tanto, por separado, son continuas y derivables, sólo faltaría ver qué ocurre en el pto. de unión de f_1 y f_2 i.e. $x=1$

f cont $x=1$?

$$\left.\begin{array}{l} f(1^-) = \lim_{x\to 1} 2x^2 + ax = 2+a \\ f(1) = f(1^+) = \lim_{x \to 1} bx + c = b+c \end{array}\right\} \Rightarrow$$

para f cont en $x=1$ tiene q. ocurrir q. $\boxed{2+a=b+c}$

para f deriv en $x=1$

$$\left.\begin{array}{l} f_1'(x) = 4x+a \\ f_2'(x) = b \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} f'(1^-) = 4\cdot 1 + a = 4+a \\ f'(1^+) = b \end{array}\right\} \Rightarrow$$ para q. f deriv en $x=1$ tiene q. ocurrir q. $\boxed{4+a=b}$

$\Rightarrow f$ cont en $[0,2]$ y deriv en $(0,2)$ si $\boxed{\begin{array}{l} 2+a=b+c \\ 4+a=b \end{array}}$

Para que se cumplan todas las condiciones o hipótesis de Rolle, además $f(0)=f(2)$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 2\cdot 0^2 + a\cdot 0 = 0 \\ f(2) = b\cdot 2 + c = 2b+c \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{0=2b+c}$$

Uniendo las 3 condiciones tenemos

$$\left.\begin{array}{l} 2+a=b+c \\ 4+a=b \\ 0=2b+c \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{r} -2-\cancel{a} = -\cancel{b}-c \\ 4+\cancel{a} = \cancel{b} \\ \hline 2 = -c \end{array} \Rightarrow \boxed{c=-2} \Rightarrow 0=2b-2$$

$$\Rightarrow 2b=2 \Rightarrow \boxed{b=1} \Rightarrow \begin{array}{l} 4+a=b \\ 4+a=1 \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = 1-4 \Rightarrow \boxed{a=-3} \checkmark$$

para estos valores se cumple Rolle $\Rightarrow \exists k \in (0,2) \,/\, f'(k)=0$

$$f'(x) = \begin{cases} 4x-3 & \text{si } x<1 \\ 1 & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$$ no puede ser ≥ 1 por $1 \neq 0$

$\Rightarrow x<1$ y además $4k-3=0 \Rightarrow \boxed{k=\frac{3}{4}} \checkmark$

⑨ GALICIA 2013 ORD Opción B Ej. 4 a)

* Rolle para $f(x) = x^3 + ax - 1$ en $[0,1]$?

(Valía 0'5 el teorema, 0'25 calcular "a" y 0'25 calcular "c")
(la teoría mirar en los apuntes o en el solucionario) pto de Rolle

$f(x)$ es una func. polinómica $\Rightarrow$ f cont y deriv en $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} f \text{ cont en } [0,1] \\ f \text{ deriv en } (0,1) \end{array}\right\}$

sólo falta ver que $f(0) = f(1)$

$f(0) = 0 + a \cdot 0 - 1 = -1$; $f(1) = 1 + a - 1 = a$

$\Rightarrow \boxed{a = -1}$ ✓ 0'25 ptos

$\Rightarrow$ si $a = -1$ se cumplen las condiciones de Rolle y por tanto $\exists\, c \in (0,1)$ t.q. $f'(c) = 0$

hacemos $\underset{a=-1}{f'(x) =} 3x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3}$

$x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

como necesitamos que $c \in (0,1)$ (y por tanto sea ⊕)

la solución es $c = \frac{1}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}$ ✓ 0'25 ptos.

** $\boxed{10}$ GALICIA 2012 Ext. opción B 3 a) $\boxed{b)}$ para $c > 2$ calcular a, b, c para

$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & x < 2 \\ x + 1 & x \geq 2 \end{cases}$

que se cumpla Rolle en $[0, c]$, con $c > 2$ por tanto $2 \in [0, c]$

f func. a trozos donde f_1 y f_2 son func. polinómicas y por tanto continuas y derivables en $\mathbb{R}$, por tanto f lo será, sólo falta ver qué ocurre en el pto de unión $\underline{x = 2}$

$\left.\begin{array}{l} f(2^-) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} f_1(x) = \lim\limits_{x\to 2} x^2 + ax + b = 4 + 2a + b \\ f(2^+) =: f(2) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} x + 1 = 3 \end{array}\right\}$

$\Rightarrow$ para f cont $4 + 2a + b = 3 \Rightarrow \boxed{2a + b = -1}$

$\left.\begin{array}{l} f_1'(x) = 2x + a \\ f_2'(x) = 1 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f'(2^-) = \lim\limits_{x\to 2} 2x + a = 4 + a \\ f'(2^+) = \lim\limits_{x\to 2} 1 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ para

que f derivable $4 + a = 1 \Rightarrow \boxed{a = -3}$ ✓ $\Rightarrow \boxed{b = 5}$

$\Rightarrow a = -3 \; , \; b = 5$ $\qquad f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 5 & x < 2 \\ x+1 & x \geq 2 \end{cases}$ (p7)

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ cont } [0, c] \\ f \text{ deriv } (0, c) \\ (\text{con } c > 2) \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{Sólo falta que } f(0) = f(c) \\ \left.\begin{array}{l} f(0) = 0^2 - 3\cdot 0 + 5 = 5 \\ f(c) = c + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow c+1 = 5 \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{c = 4} \quad ✓$$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ cont } [0,4] \\ f \text{ deri } (0,4) \\ f(0) = f(4) \end{array}\right\} \underset{\text{th Rolle}}{\Longrightarrow} \exists \, k \in (0,4) \text{ t.q. } f'(k) = 0$$

—— o ——

11 Galicia 2011 ORD op. A. Ej. 3 a)

**

$f(x) = x^3 - kx + 10$ es func. polinómica $\Rightarrow$ f cont $[-2, 0]$ y derivable en $(-2, 0)$ para poder aplicar Rolle

$f(-2) = f(0) \iff -8 - k(-2) + 10 = 0 - 0 + 10$

$\iff -8 + 2k + 10 = 10 \iff -8 + 2k = 0 \iff 2k = 8$

$\iff \boxed{k = 4}$

Para ese valor: $f(x) = x^3 - 4x + 10$ en $[-2, 0]$

$\exists \, c \in (-2, 0)$ tq $f'(c) = 0$

$f'(x) = 3x^2 - 4 = 0 \iff x^2 = \frac{4}{3} \iff x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$

como $c \in (-2, 0) \Rightarrow \boxed{x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}}$ es el valor buscado ✓

—— o ——

12 2014 GALICIA ORD OpB Ej. 3b)

**

$f(x) = \frac{1}{2-x}$ comprobar T.V.M Cal. Dif $\quad \left.\begin{array}{l} f \text{ cont } [a,b] \\ f \text{ deri } (a,b) \end{array}\right\} \Rightarrow$

piden aplicarlo en el intervalo $[0, 1]$ $\quad \exists \, c \in (a,b)$ t.q.
y que en ese caso encontremos c $\quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

f cociente de func. polinómicas $\Rightarrow$ f cont y derivable excepto en los ptos donde se anule el denominador

$2 - x = 0 \iff x = 2$ $\qquad$ f cont $\mathbb{R} - \{2\}$
f deriv. $\mathbb{R} - \{2\}$

$2 \notin [0,1]$ ⇒ no hay ...

f deriv $(0,1)$ 98

⇒ por T.V.M Dif. $\exists c \in (0,1)$ tq $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{\frac{1}{2-1} - \frac{1}{2-0}}{1-0} = 1 - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = -\frac{-1}{(2-x)^2} = \frac{1}{(2-x)^2}; \quad f'(c) = \frac{1}{(2-c)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\underset{\substack{c \neq 2 \\ c \in (0,1)}}{\Rightarrow} \quad (2-c)^2 = 2 \Rightarrow 2 - c = \pm\sqrt{2} \Rightarrow 2 \pm \sqrt{2} = c$$

$c <$ $2-\sqrt{2}$ sí $\in (0,1)$

$\quad$ $2 \cancel{+\sqrt{2}}$ NO sirve p.q. es >1

$c \in (0,1)$

$\boxed{c = 2 - \sqrt{2}}$ ✓

---

13) 2014 GALICIA EXT op B Ej. 3b) a)

**

$$f(x) = \begin{cases} mx & x < 1 \\ ax^2 + bx + 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

a) calculamos a, b, m para que f cont y deriv. en $x=1$ y tenga ext. relativo en $x = 3$

$$f(1^-) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} mx = \boxed{m}$$

$$f(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 1 = a + b + 1 = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} ax^2 + bx + 1$$

f cont en $x = 1$ $\iff$ $\boxed{m = a + b + 1}$

$$f'(x) = \begin{cases} m & ; x < 1 \\ 2ax + b & ; x > 1 \end{cases}$$

$f'(1^-) = m$

$f'(1^+) = 2a + b$

para f deriv en $x = 1$ $\boxed{m = 2a + b}$

por tener ext. relativo en $x = 3$ ⇒ $f'(3) = 0$ y $f''(3) \neq 0$

$3 > 1$ ⇒ $f'(3) = 2a \cdot 3 + b = \boxed{6a + b = 0}$

$x > 1 \to f''(x) = 2a \neq 0$

$\boxed{a \neq 0}$

$$\left.\begin{array}{l} m = a+b+1 \\ m = 2a+b \\ 6a+b=0 \\ a\neq 0 \end{array}\right\}\quad \begin{array}{l} -\cancel{m} = -a-\cancel{b}-1 \\ \cancel{m} = 2a+\cancel{b} \\ \hline 0 = a-1 \Rightarrow \boxed{a=1} \text{ (bien } a\neq 0) \\ 6a+b=0 \underset{\overset{\uparrow}{a=1}}{\Rightarrow} 6+b=0 \Rightarrow \boxed{b=-6} \end{array}$$

$$m = a+b+1 \Rightarrow m = 1-6+1 \Rightarrow \boxed{m=-4}$$

$$\boxed{\text{Solución } a=1,\ b=-6,\ m=-4}\ \checkmark$$

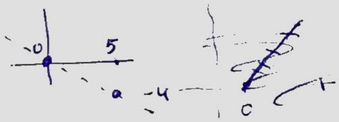
b) para esos valores ya probamos en el aptdo a) que

f cont en $x=1$
f deriv en $x=1$ $\Big\{$ f es func. a trozos de funciones polinómicas $\Rightarrow$ f cont $\mathbb{R}$, f deriv $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} -4x & x<1 \\ x^2-6x+1 & x\geq 1 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} -4 & x<1 \\ 2x-6 & x\geq 1 \end{cases}$$

Tenemos que encontrar $c\in(0,5)$ t.q $f'(c)=$ pendiente del segmento que une los ptos $(0,0)$, $(5-4)$

i.e. $$f'(c) = \frac{f(5)-f(0)}{5-0}$$



este valor me lo proporciona el TVM Diferencial que garantiza que por $\left.\begin{array}{l} f \text{ cont } [0,5] \\ f \text{ deri } (0,5) \end{array}\right| \Rightarrow \exists c\in(0,5)$

t.q. $$f'(c) = \frac{f(5)-f(0)}{5-0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{f(5)-f(0)}{5-0} = \dfrac{-4-0}{5} = \boxed{-\dfrac{4}{5}} \\ \\ f'(c) = \boxed{2c-6} \end{array}\right\}\quad \begin{array}{l} 2c-6 = -\dfrac{4}{5} \\ 2c = 6-\dfrac{4}{5} \\ \boxed{c=\dfrac{13}{5}}\ \checkmark \end{array}$$

$\downarrow$
tiene que ser $c\geq 1$ ya que $-4\neq -\frac{4}{5}$

Solución

(14) Navarra ORD 2021 P. 7 (Opcional)

$f(x) = Ln\left(\dfrac{5x-2-x \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}x}{x^2-4x+6}\right)$ en $[1,3]$

Comprobar a) f cont en $[1,3]$

b) demostrar $\exists\, \alpha \in (1,3)$ tq. $f'(\alpha) = \frac{3}{2} Ln 2$
enunciar el th utilizado y justificar su uso.

a) f cont en $[1,3]$?

f composición de logarítmica con suma, restas, producto y cociente de funciones polinómicas y sinusoidales

$\Rightarrow f$ será continua donde esté bien definida $\begin{cases} \text{denominador} \neq 0 \\ \text{argumento} > 0 \end{cases}$

- Veamos que $x^2-4x+6 \neq 0$

$$x^2-4x+6=0 \iff x = \frac{4 \pm \sqrt{16-24}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{2} \notin \mathbb{R}$$

por tanto el denominador no se anula nunca

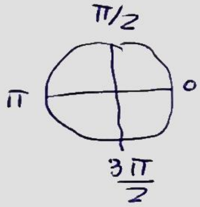
- tenemos que ver que $5x-2-x \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} x > 0$ con $x \in [1,3]$

(de lo contrario $\nexists Ln$)

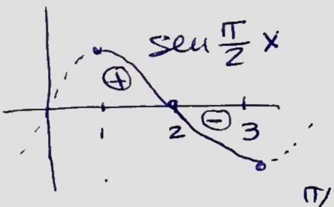
Estudiamos por separado $5x-2$ recta creciente

$-x \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} x$

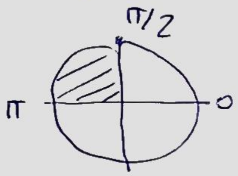
$x \in [1,3] \rightarrow$
$x=1 \rightarrow \frac{\pi}{2} \rightarrow \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$
$x=2 \rightarrow \pi \rightarrow \operatorname{sen} \pi = 0$
$x=3 \rightarrow \frac{3\pi}{2} \rightarrow \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = -1$



Para el estudio separamos el intervalo en dos subintervalos $[1,2]$ y $[2,3]$



$x \in [1,2]$



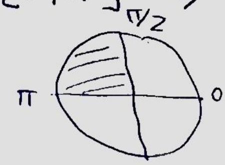
$x \in [1,2] \rightarrow \frac{\pi}{2} x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \Rightarrow \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} x \in [0,1]$

~~$x \in [1,2] \Rightarrow -x \in [-2,-1]$~~

~~$-x \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} x$~~

$\rightarrow$ sigue

$x \in [1,2] \rightarrow \frac{\pi}{2}x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \Rightarrow \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x \in [0,1] \Rightarrow$



$x \in [1,2] \rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} \Rightarrow 0 \le \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x \le 1 \\ 1 \le x \le 2 \end{array}\right\}$

(p11)

$$\Rightarrow \quad 0 \le x \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x \le 2$$

$$0 \ge -x \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x \ge -2$$

ó también $\quad -x \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x \ge -2$

$$\boxed{-2 \le -x \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x}$$

$x \in [1,2] \rightarrow 5x \in [5,10] \rightarrow 5x-2 \in [3,8]$

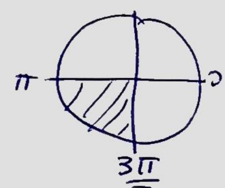
$\Rightarrow \quad \boxed{3 \le 5x-2 \le 8}$

sumando (uniendo) ambas

$1 \le 5x-2-x\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x \le 8$ en cualq. caso $\boxed{5x-2-x\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x > 0}$

y por tanto $\exists \ln$

Si $x \in [2,3]$ $\Rightarrow \frac{\pi}{2}x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}x\right]$



$\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x \in [-1,0] \Rightarrow -1 \le \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x \le 0 \\ x \in [2,3] \Rightarrow 2 \le x \le 3 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow -2 \le x \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x \le 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{2 \ge -x\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x \ge 0}$

$x \in [2,3] \Rightarrow 2 \le x \le 3 \Rightarrow 10 \le 5x \le 15 \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \boxed{8 \le 5x-2 \le 13} \\ \boxed{0 \le -x\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x \le 2} \end{array}\right\}$ $8 \le 5x-2-x\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x \le 15$

en cualq. caso $\boxed{5x-2-x\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x > 0} \Rightarrow \exists \ln$

la función por tanto está bien definida en $[1,3]$ y es CONTINUA

b) $¿\exists\, \alpha \in (1,3)$ tq. $f'(\alpha) = \frac{3}{2} Ln 2$?

Vamos a utilizar el T.V.M. Dif que dice que

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ cont } [1,3] \\ f \text{ deriv } (1,3) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, \alpha \in (1,3) \text{ tq } f'(\alpha) = \frac{f(3)-f(1)}{3-1}$$

Veamos lo que vale $\frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{Ln\left(\frac{15-2-3(-1)}{9-12+6}\right) - Ln\left(\frac{3-1}{3}\right)}{2} =$

$$= \frac{Ln\left(\frac{16}{3}\right) - Ln\left(\frac{2}{3}\right)}{2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{prop.} \\ \text{logaritmos}}}{=} \frac{Ln\left(\frac{\frac{16}{\cancel{3}}}{\frac{2}{\cancel{3}}}\right)}{2} = \frac{Ln\left(\frac{16}{2}\right)}{2} = \frac{Ln 8}{2} =$$

$$= \boxed{\frac{3 Ln 2}{2}}$$ que es justo lo que estamos buscando

$\Rightarrow$ sólo tengo que ver que se cumplen las hipótesis del TVM Dif.

f cont en $[1,3]$ (lo vimos en el aptdo a) por ser composición de funciones elementales con un cociente que nunca se anula y estaba bien definida en $[1,3]$

Nos falta ver que f deriv en $(1,3)$

Calculamos su derivada y tenemos que comprobar que está bien definida en $(1,3)$

$$f(x) = Ln\left(\frac{5x-2-x\,\text{sen}\frac{\pi}{2}x}{x^2-4x+6}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{para que} \\ \text{sea más fácil} \\ \text{derivar}}}{=} Ln\left(5x-2-x\,\text{sen}\frac{\pi}{2}x\right) - Ln\left(x^2-4x+6\right)$$

$$f'(x) = \frac{5-\left(\text{sen}\frac{\pi}{2}x + x\left(\cos\frac{\pi}{2}x\right)\frac{\pi}{2}\right)}{5x-2-x\,\text{sen}\frac{\pi}{2}x} - \frac{2x-4}{x^2-4x+6} =$$

$$= \frac{5-\text{sen}\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}x\cos\frac{\pi}{2}x}{5x-2-x\,\text{sen}\frac{\pi}{2}x} - \frac{2x-4}{x^2-4x+6}$$

Este denominador no sea anula nunca en $[1,3]$ lo vimos en aptdo a)

Este denominador NO se anula nunca en $[1,3]$ lo vimos en el apto a)

$\Rightarrow f'$ está bien definida en $(1,3)$ y f es derivable en $(1,3)$

P.13

$\boxed{15}$ $f(x)=\sqrt{x+\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}}$ en $[1,3]$

Navarra EXT 2021 Ej 7 (Opcional)

a) f es composición de funciones continuas y el radicando es suma de funciones continuas ⇒ será continua donde esté bien definida i.e. donde el radicando sea positivo.

$x\in[1,3] \Rightarrow \quad 1\le x\le 3$

$\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}\in[-1,1]$ siempre $\Rightarrow -1\le \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x\le 1$ $\Bigg\}\ 0\le x+\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x\le 4$

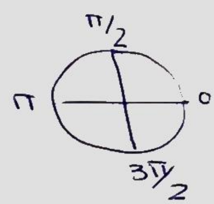
por tanto el radicando es positivo en $[1,3]$

y $\boxed{f \text{ cont en } [1,3]}$

b) Vamos a aplicar el th. de Rolle
$\left.\begin{array}{l} f \text{ cont } [a,b] \\ f \text{ deriv}(a,b) \\ f(a)=f(b)\end{array}\right| \Rightarrow \exists c\in(a,b) \text{ tq } f'(c)=0$

ya vimos q f cont $[1,3]$

⇒ f continua en $[1,2]$ y en $[2,3]$



$f(1)=\sqrt{1+\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$f(2)=\sqrt{2+\operatorname{sen}\pi}=\sqrt{2+0}=\sqrt{2}$

$f(3)=\sqrt{3+\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}}=\sqrt{3-1}=\sqrt{2}$

Sólo faltaría ver que f derivable en $(1,2)$ y en $(2,3)$

$$f'(x)=\frac{1+(+\cos\frac{\pi}{2}x)\cdot\frac{\pi}{2}}{2\sqrt{x+\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x}}=\frac{1+\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x}{2\sqrt{x+\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x}}$$

El radicando es positivo en $[1,3]$ (lo vimos en aptdo a)

y el denominador NO se anula en $[1,3]$

$x\in[1,2] \rightarrow \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x\in[0,1] \Rightarrow x+\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x$

$\left.\begin{array}{l} 1\le x\le 2 \\ 0\le \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x\le 1\end{array}\right\}\ 1\le x+\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x\le 3 \rightarrow$ es >0

$x\in[2,3] \rightarrow \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x\in[-1,0] \Rightarrow 1\le x+\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x$

$\Rightarrow$ es >0

continuación Ej 15

$\Rightarrow$ el radicando es positivo y el denominador nunca se anula $\Rightarrow$ la función está bien definida en $[1,3]$

$\Rightarrow f$ derivable en $(1,3)$

en particular
$$\left.\begin{array}{l} f \text{ cont } [1,2] \\ f \text{ deriv } (1,2) \\ f(1)=f(2) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{por el Th Rolle } \exists\, \alpha \in (1,2) \text{ tq } f'(\alpha)=0$$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ cont } [2,3] \\ f \text{ deriv } (2,3) \\ f(2)=f(3) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{por th. Rolle } \exists\, \beta \in (2,3) \text{ tq. } f'(\beta)=0$$

cqd.