OPTIMIZACIÓN

1.-Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede inscribir en una circunferencia de radio 5 cm. (sol:$\sqrt{50}cm, \sqrt{50}cm$)

2.-Halla dos números tales que el cuadrado de uno multiplicado por el otro sea máximo, si la suma de dichos números es 40. (Sol:80/3, 40/3)

3.-Cuáles son las dimensiones de un campo rectangular de 3 600 m^2 de superficie, para poderlo cercar con una valla de longitud mínima. (sol: 60m,60m)

4.Con 1 m^2 de cartón cómo construirías una caja del mayor volumen posible. (sol: 2/3x2/3x1/6)

5.--Una hoja de papel debe contener 18 cm^2 de texto impreso. Los márgenes superior e inferior deben ser de 2 cm y los laterales de 1 cm. ¿Cuáles deben ser las dimensiones para que resulten hojas con un coste mínimo? (sol:5x10m)

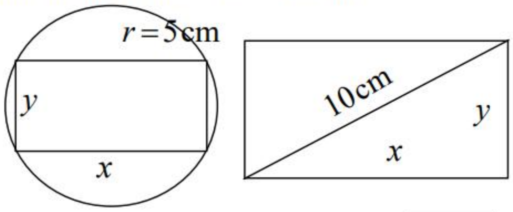
6.- Un agricultor sabe que si vende hoy su cosecha podrá recoger 50 000 kg, que le pagarán al precio de 20 céntimos por kg. Por cada día que espere, la cosecha disminuirá en 800 kg, pero el precio aumentará en 3 céntimos por kg. ¿Cuántos días deberá esperar para obtener el mayor beneficio? (sol: $\approx 28\ días$)

7.- Un vendedor de bolígrafos ha observado que si vende sus bolígrafos a 15 céntimos, es capaz de vender 1 000 unidades diarias, pero que por cada céntimo que aumente el precio, disminuye en 100 unidades la venta diaria de bolígrafos. Por otra parte a él le cuesta 7.5 céntimos fabricar un bolígrafo. Averiguar qué precio ha de poner para obtener el máximo beneficio. (sol: 12´5 cént)

8.- Se desea construír el marco para una ventana rectangular de 6 m2 de superficie. El metro lineal de tramo horizontal cuesta 20 euros y el tramo vertical 30 euros. a) Calcula las dimensiones de la ventana para que el coste del marco sea mínimo. b) Determinar el coste del marco. (sol: 3m, 2m, 240€)

SOLUCIÓNS OPTIMIZACIÓN

1. Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede inscribir en una circunferencia de radio 5 cm.



$A = xy$ máxima

Por el teorema de Pitágoras:

$$x^2 + y^2 = 10^2$$

de donde

$$y = \sqrt{100 - x^2}$$

La función a maximizar es: $f(x) = x\sqrt{100 - x^2}$

$$f(x) = x\sqrt{100 - x^2} = \sqrt{x^2(100 - x^2)} = \sqrt{100x^2 - x^4} = (100x^2 - x^4)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(100x^2 - x^4)^{-\frac{1}{2}}(200x - 4x^3) = \frac{200x - 4x^3}{2 \cdot \sqrt{100x^2 - x^4}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 200x - 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x(200 - 4x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 200 - 4x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{50} \end{cases}$$

El único posible extremo que nos interesa es $x = \sqrt{50}$

$$f'(x) = \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}}$$

$$f''(x) = \frac{-4x\sqrt{100 - x^2} - (100 - 2x^2)\frac{-x}{\sqrt{100 - x^2}}}{\left(\sqrt{100 - x^2}\right)^2} = \frac{-4x\left(\sqrt{100 - x^2}\right)^2 + (100 - 2x^2)x}{(100 - x^2)\sqrt{100 - x^2}} =$$

$$= \frac{-300x + 2x^3}{(100 - x^2)\sqrt{100 - x^2}}$$

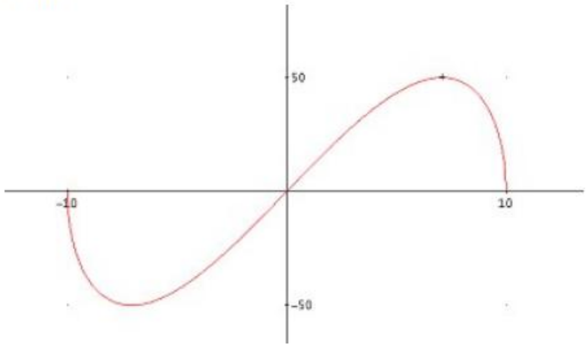
$f''(\sqrt{50}) < 0 \Rightarrow x = \sqrt{50}$ es un máximo

Calculamos el valor de y:

$$y = \sqrt{100 - \left(\sqrt{50}\right)^2} = \sqrt{50}$$

Por tanto, las dimensiones del rectángulo para que el área sea máxima son:

$$\begin{cases} x = \sqrt{50} \text{ cm} \\ y = \sqrt{50} \text{ cm} \end{cases}$$



2.-Halla dos números tales que el cuadrado de uno multiplicado por el otro sea máximo, si la suma de dichos números es 40.

Sean x e y los números buscados. El problema a resolver es el siguiente:

$$\begin{cases} x+y=40 \\ x^2 y \text{ máximo} \end{cases}$$

Llamamos $p = x^2 y$. Como $x+y=40$ se tiene que $y = 40 - x$ y por tanto:

$$p = x^2(40-x) = 40x^2 - x^3$$

Vamos a maximizar la función $p(x)$:

$$p'(x) = 80x - 3x^2$$

$$p'(x) = 0 \Leftrightarrow 80x - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x(80-3x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 80 - 3x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{80}{3} \end{cases}$$

$$p''(x) = 80 - 6x$$

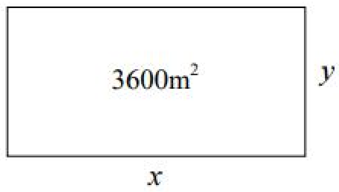
$$p''(0) = 80 > 0 \Rightarrow x = 0 \text{ es un máximo (no nos interesa)}$$

$$p''\left(\frac{80}{3}\right) = -80 < 0 \Rightarrow x = \frac{80}{3} \text{ es un mínimo relativo}$$

Los números buscados son:

$$\begin{cases} x = \dfrac{80}{3} \\ y = 40 - \dfrac{80}{3} = \dfrac{40}{3} \end{cases}$$

3. -Cuáles son las dimensiones de un campo rectangular de 3 600 m^2 de superficie, para poderlo cercar con una valla de longitud mínima.



Por la fórmula del área del rectángulo se tiene:

$$xy = 3600$$

Por otro lado, la superficie que tenemos que vallar es $2x + 2y$

Así, el problema a resolver es:

$$\begin{cases} xy = 3600 \\ 2x + 2y \text{ mínima} \end{cases}$$

Como $xy = 3600 \Rightarrow y = \dfrac{3600}{x}$

Llamando $f = 2x + 2y$ ý sustituyendo $y = \dfrac{3600}{x}$ obtenemos:

$$f(x) = 2x + 2\frac{3600}{x} = \frac{2x^2 + 7200}{x}$$

Vamos a minimizar *f*:

$$f'(x) = \frac{4x^2 - 2x^2 - 7200}{x^2} = \frac{2x^2 - 7200}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 7200 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 60$$

$$f''(x) = \frac{14400}{x^3}$$

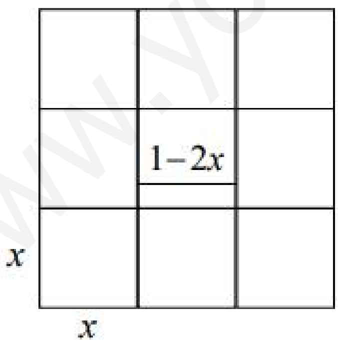
$f''(-60) < 0 \Rightarrow x = -60$ es un máximo (no nos interesa)

$f''(60) > 0 \Rightarrow x = 60$ es un mínimo

Por tanto, las dimensiones del campo son:

$$\begin{cases} x = 60 \text{ m} \\ y = \dfrac{3600}{60} = 60 \text{ m} \end{cases}$$

4. -Con 1 m^2 de cartón cómo construirías una caja del mayor volumen posible.



Teniendo en cuenta el dibujo, tenemos que maximizar la función

$$v(x) = (1 - 2x)^2 x = 4x^3 - 4x^2 + x$$

Calculamos las derivadas:

$$v'(x) = 12x^2 - 8x + 1$$

$$v'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 8x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 1}}{2 \cdot 12}$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{16}}{24} = \frac{8 \pm 4}{24} = \begin{cases} \dfrac{8+4}{24} = \dfrac{12}{24} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{8-4}{24} = \dfrac{4}{24} = \dfrac{1}{6} \end{cases}$$

$$v''(x) = 24x - 8$$

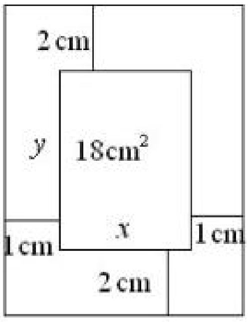
$v''\left(\dfrac{1}{2}\right) = 12 - 8 > 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$ es un mínimo (no nos interesa)

$$v''\left(\frac{1}{6}\right)=4-8<0 \Rightarrow x=\frac{1}{6} \text{ es un máximo}$$

Por tanto, como $1-2x=1-2\frac{1}{6}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ las dimensiones de la caja son:

$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}\,(\text{m})$

5. -Una hoja de papel debe contener 18 cm^2 de texto impreso. Los márgenes superior e inferior deben ser de 2 cm y los laterales de 1 cm. ¿Cuáles deben ser las dimensiones para que resulten hojas con un coste mínimo? .



Teniendo en cuenta el dibujo, la función a minimizar es:

$$s=2x+2x+2+2+2+2+18+y+y=4x+2y+26$$

Por otra parte, teniendo en cuenta la fórmula del área de un rectángulo, se tiene que:

$$xy=18$$

Así, tenemos que resolver el siguiente problema:

$$\begin{cases} xy=18 \\ 4x+2y+26 \text{ mínima} \end{cases}$$

Como $xy=18 \Rightarrow y=\frac{18}{x}$, y por tanto, sustituyendo en s tenemos:

$$s=4x+2\frac{18}{x}+26=\frac{4x^2+36+26x}{x}=\frac{4x^2+26x+36}{x}=s(x)$$

Vamos a minimizar $s(x)$:

$$s'(x)=\frac{(8x+26)x-(4x^2+26x+36)\cdot 1}{x^2}=\frac{8x^2+26x-4x^2-26x-36}{x^2}=\frac{4x^2-36}{x^2}$$

$$s'(x)=0 \Leftrightarrow 4x^2-36=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{36}{4}=9 \Rightarrow x=\sqrt{9}=3$$

$$s''(x)=\frac{8x\cdot x^2-(4x^2-36)2x}{x^4}=\frac{8x^3-8x^3+72x}{x^4}=\frac{72}{x^3}$$

$$s''(3)>0 \Rightarrow x=3 \text{ es un mínimo}$$

Así las dimensiones de la zona que contiene el texto impreso son:

$$\begin{cases} x=3 \text{ cm} \\ y=\frac{18}{3}=6 \text{ cm} \end{cases}$$

y las dimensiones de la hoja de papel son: $5\times 10\,\text{cm}$.

6. - Un agricultor sabe que si vende hoy su cosecha podrá recoger 50 000 kg, que le pagarán al precio de 20 céntimos por kg. Por cada día que espere, la cosecha disminuirá en 800 kg, pero el precio aumentará en 3 céntimos por kg. ¿Cuántos días deberá esperar para obtener el mayor beneficio? .

Recoge una cosecha de $50000-800x$ (kg), que vende al precio de $20+3x$ (cent./kg).
La ganancia que obtiene es:

$$g(x)=(50000-800x)(20+3x)$$

que es la función que tenemos que maximizar:

$$g'(x)=-800(20+3x)+(50000-800x)\cdot 3=-16000-2400x+150000-2400x=$$
$$=-4800x+134000$$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow -4800x+134000=0 \Leftrightarrow x=\frac{134000}{4800}=\frac{335}{12}$$

$$g''(x)=-4800$$

$$g''\left(\frac{335}{12}\right)<0 \Rightarrow x=\frac{335}{12} \text{ es un máximo}$$

Por tanto, el agricultor deberá esperar $\frac{335}{12}\approx 27'917 \approx 28$ días para que su ganancia sea máxima.

7. - Un vendedor de bolígrafos ha observado que si vende sus bolígrafos a 15 céntimos, es capaz de vender 1 000 unidades diarias, pero que por cada céntimo que aumente el precio, disminuye en 100 unidades la venta diaria de bolígrafos. Por otra parte a él le cuesta 7.5 céntimos fabricar un bolígrafo. Averiguar qué precio ha de poner para obtener el máximo beneficio.

Sea x el precio de cada bolígrafo.
El número de bolígrafos vendidos al día es $n=1000-100x$, y en cada bolígrafo obtiene un beneficio igual a $x-5$.
El beneficio total es:

$$b(x)=(1000-100x)(x-5)$$

que es la función que tenemos que maximizar:

$$b'(x)=-100(x-5)+(2000-100x)=-100x+500+2000-100x=-200x+2500$$

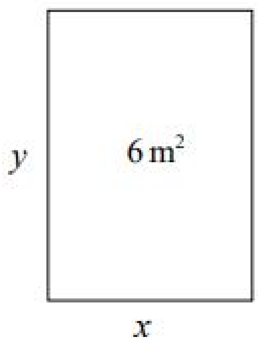
$$b'(x)=0 \Leftrightarrow -200x+2500=0 \Leftrightarrow x=\frac{2500}{200}=12.5$$

$$b''(x)=-200$$

$$b''(12.5)<0 \Rightarrow x=12.5 \text{ es un máximo para } b(x)$$

Por tanto, el precio del bolígrafo para que el beneficio sea máximo es de 12.5 céntimos.

8. - Se desea construír el marco para una ventana rectangular de 6 m2 de superficie. El metro lineal de tramo horizontal cuesta 20 euros y el tramo vertical 30 euros. a) Calcula las dimensiones de la ventana para que el coste del marco sea mínimo. b) Determinar el coste del marco.



marco sea mínimo.
b) Determinar el coste del marco.

El problema a resolver es:

$$\begin{cases} xy = 6 \\ M \equiv 2x \cdot 20 + 2y \cdot 30 = 40x + 60y \end{cases}$$

Como $xy = 6 \Rightarrow y = \dfrac{6}{x}$ y sustituyendo en la expresión de M:

$$M = 40x + 60\frac{6}{x} = \frac{40x^2 + 360}{x} = M(x)$$

Calculamos $M'(x)$ e igualamos a cero:

$$M'(x) = \frac{80x \cdot x - (40x^2 + 360) \cdot 1}{x^2} = \frac{80x^2 - 40x^2 - 360}{x^2} = \frac{40x^2 - 360}{x^2}$$

$$M'(x) = 0 \Leftrightarrow 40x^2 - 360 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{360}{40} = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$$

Comprobamos que la solución positiva que es la que tiene sentido corresponde a un mínimo:

$$M''(x) = \frac{80x \cdot x^2 - (40x^2 - 360) \cdot 2x}{x^4} = \frac{80x^3 - 80x^3 + 720x}{x^4} = \frac{720x}{x^4} = \frac{720}{x^3}$$

$$M''(3) = \frac{720}{3^3} > 0 \Rightarrow x = 3 \text{ es un mínimo}$$

Por tanto las dimensiones del marco son: $\begin{cases} x = 3\text{ m} \\ y = 2\text{ m} \end{cases}$

Así, el coste del marco es: $40 \cdot 3 + 60 \cdot 2 = 120 + 120 = 240\ €$.