Ficha optimización

Pasos a seguir:

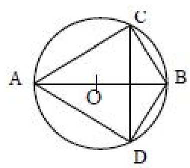
1. Hacemos un dibujo e identificamos las incógnitas.
2. Calculamos la expresión de la **FUNCIÓN** que queremos optimizar.
3. Expresamos la **CONDICIÓN** entre las variables que nos da el problema.
4. En la **CONDICIÓN**, **despejamos una de las variables en función de la otra.**
5. La **SUSTITUIMOS EN** la **FUNCIÓN** que queremos optimizar (2)
6. **DERIVAMOS LA FUNCIÓN** a optimizar e igualamos a cero.
7. Comprobamos si se trata de máximo o mínimo
8. Resolvemos la otra variable en la **CONDICIÓN** y damos la **SOLUCIÓN** al problema (lee el enunciado).

1. **GALICIA EXTRAORDINARIA 2019**. De entre todos los triángulos rectángulos contenidos en el primer cuadrante que tienen vértice en el origen, otro sobre la parábola $y = 4 - x^2$, un cateto sobre el eje X y el otro paralelo al eje Y, obtén los catetos y la hipotenusa de aquel cuya área es máxima.

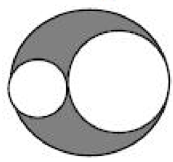
2. **GALICIA ORDINARIA 2017**. Se desea construir una caja de base cuadrada, con tapa y con capacidad de 80 dm3. Para la tapa y la superficie lateral se quiere utilizar un material que cuesta 2€/dm^2 y para la base otro que cuesta 3€/dm^2. Calcula las dimensiones de la caja para que su coste sea mínimo.

3. **GALICIA EXTRAORDINARIA 2014**. Queremos dividir un hilo metálico de 70 metros en 3 partes, de manera que una de ellas tenga el doble de longitud que otra y además que al construir con cada parte un cuadrado, la suma de las áreas de los tres cuadrados sea mínimo. Calcula la longitud de cada parte.

4. **GALICIA ORDINARIA 2013**. En una circunferencia de centro O y de radio 10 cm. se traza un diámetro AB y una cuerda CD perpendicular a ese diámetro. ¿A qué distancia del centro O de la circunferencia debe estar esa cuerda CD, para que la diferencia entre las áreas de los triángulos ADC y BCD sea máxima?



5. **GALICIA ORDINARIA 2011**. En una circunferencia de radio 10 cm., se divide uno de sus diámetros en dos partes que se toman a su vez, como diámetros de las circunferencias tangentes interiores a la circunferencia. ¿Qué longitud debe tener cada uno de estos diámetros para que sea máxima el área limitada por las tres circunferencias? (ver en el dibujo la región sombreada)



6. **GALICIA EXTRAORDINARIA 2011**. Descompón el número 40 en dos sumandos tales que el producto del cubo de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo. ¿Cuánto vale ese producto?

7. **GALICIA ORDINARIA 2006**. De entre todos los triángulos de hipotenusa 10 cm., calcula las longitudes de los catetos que corresponden al de área máxima.

8. **ANDALUCÍA EXTRAORDINARIA 2006**.Un alambre de 170 cm de longitud se divide en dos partes. Con una de las partes se quiere formar un cuadrado y con la otra un rectángulo de forma que la base mida el doble que la altura. Calcula las longitudes de las partes en las que se tiene que dividir el alambre para que la suma de las áreas del cuadrado y del rectángulo sea mínima.

9. **GALICIA ORDINARIA 2004**. Un barco B y dos ciudades A y C de la costa forman un triángulo rectángulo en C. Las distancias del barco a las ciudades A y C son 13 Km y 5Km, respectivamente. Un hombre situado en A desea llegar hasta el barco B. Sabiendo que puede nadar a 3 Km/k y caminar a 5 Km/h ¿a qué distancia de A debe abandonar la costa para nadar hasta B si quiere llegar lo antes posible?

10. **ARAGÓN EXTRAORDINARIA 2021**. Se desea construir un depósito con forma de prisma regular de base cuadrada. Además, el depósito es abierto (sin tapa superior). La capacidad total debe ser de 64 m^3. El material de construcción de los laterales tiene un precio de 70 euros por m^2, mientras que el de la base, más resistente, es de 140 euros por m^2. Halle las dimensiones del depósito para que tenga el menor coste posible.

11. **ASTURIAS ORDINARIA 2021**. Sean tres números reales positivos cuya suma es 90 y uno de ellos es la media de los otros dos. Determina los números de forma que el producto entre ellos sea máximo.

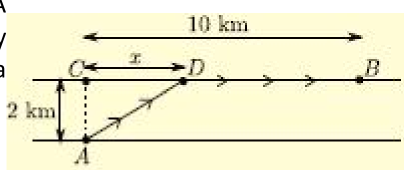
12. **ASTURIAS EXTRAORDINARIA 2021**. En un salón de actos se quiere instalar una pantalla de cine en el escenario. La pared en esa zona es curva y se ajusta a la gráfica de la función $3y = 36 - x^2$ Calcula los valores para que la superficie de la pantalla sea máxima-

13. **ANDALUCÍA ORDINARIA 2022**. De entre todos los rectángulos con lados paralelos a los ejes de coordenadas, determina las dimensiones de aquel de área máxima que puede inscribirse en la región limitada por las gráficas de las $f(x)=4-\frac{x^2}{3}$ y $g(x)=\frac{x^2}{6}-2$ funciones:

14. **ANDALUCÍA EXTRAORDINARIA 2022**. Calcula los vértices y el área del rectángulo de área máxima inscrito en el recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)=-x^2+12$ y el eje de abscisas, y que tiene su base sobre dicho eje.

15. **CANTABRIA ORDINARIA 2022**. Una imprenta debe diseñar un cartel con 90 cm2 de área para texto y además, con margen superior 3 cm, inferior 2 cm y márgenes laterales 4 cm cada uno. Calcule las dimensiones (anchura y altura) que debe tener el cartel de manera que se utilice la menor cantidad de papel posible.

16. **MURCIA ORDINARIA 2022**. En este ejercicio se puede utilizar el resultado del apartado a) para realizar el apartado b), aun en el caso en que no se sepa realizar el apartado a). Un triatleta participa en una competición de SwimRun en la que debe ir desde el punto A, situado en la orilla de un canal de agua en reposo de 2 kilómetros de ancho, hasta el punto B, situado en la otra orilla del canal y a una distancia de 10 kilómetros del punto C (punto opuesto de A), tal y como se indica en la figura. Para ello, debe ir nadando desde A hasta cualquier punto D de la otra orilla del canal y continuar corriendo desde D hasta B. El triatleta tiene plena libertad para elegir D.

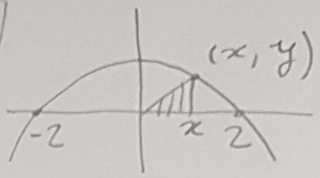


   (a) Sabiendo que el triatleta es capaz de nadar a una velocidad de 4 km/h y de correr a una velocidad de 12 km/h, demuestre que el tiempo total empleado por el triatleta en ir desde A hasta B (pasando por D) viene dado por la función $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}}{4} + \frac{10-x}{12}$, donde x denota la distancia de C a D.
   (b) Calcule cual debe ser el punto D para que el tiempo empleado por el triatleta en ir desde A hasta B sea mínimo. ¿Cuánto tardara en dicho caso?

17. **VALENCIA ORDINARIA 2022**. Se desea construir un cuadrado y un triángulo equilátero cortando en dos partes un cable de acero de 240 m. de longitud.
   (a) Calcular la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado en función del valor x que corresponde con los metros que mide un lado del triángulo.
   (b) Calcular la longitud de cable necesaria para construir el triángulo de modo que la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado sea mínima y calcular el área mínima.

Ficha Optimización 2022 ①

1 GALICIA EXT 2019



Área $= \boxed{\dfrac{xy}{2}}$ FUNCIÓN

$\boxed{y = 4 - x^2}$ CONDICIÓN

paso 4 $\rightarrow$ $y = 4 - x^2$

paso 5 $\rightarrow$ $A(x) = \dfrac{x(4-x^2)}{2} = \dfrac{4x - x^3}{2} = \boxed{2x - \dfrac{x^3}{3}}$

paso 6 $\rightarrow$ $A'(x) = 2 - \dfrac{3}{2}x^2$

paso 7 $\rightarrow$ $A'(x) = 0 \iff 2 - \dfrac{3}{2}x^2 = 0 \iff x = \pm \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

Como es en el 1er cuadrante sólo vale $+\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

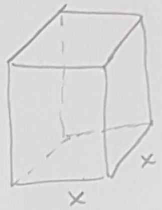
paso 8 $\rightarrow$ $A''(x) = -3x$; $A''\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) = -\dfrac{6}{\sqrt{3}} < 0 \Rightarrow$ MÁXIMO

Solución cateto $x = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ u ✓ hipotenusa $\dfrac{\sqrt{76}}{3}$

cateto $y = 4 - \dfrac{4}{3} = \dfrac{8}{3}$ u ✓

área máximo $= \dfrac{8}{3\sqrt{3}}$ u^2

2 GALICIA ORD 2017



$V = \boxed{x^2 y = 80}$ dm^3 $\rightarrow$ CONDICIÓN

Coste tapa + Coste Sup. lateral $= 2(x^2 + 4xy)$

coste base $= x^2$

Coste $= 2(x^2 + 4xy) + 3x^2 = \boxed{5x^2 + 8xy}$ FUNCIÓN

paso 4 y 5: $y = \dfrac{80}{x^2}$; $C(x) = 5x^2 + 8x\left(\dfrac{80}{x^2}\right) =$ obviamente $x > 0$, $y > 0$

$= \boxed{5x^2 + \dfrac{640}{x}}$

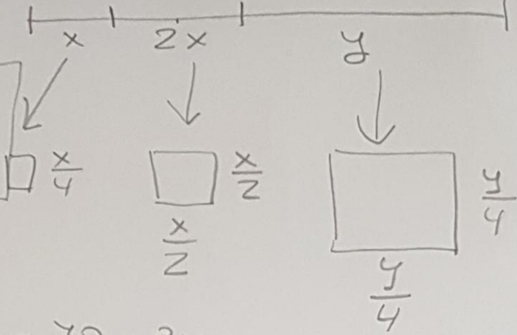
paso 6 y 7 $C'(x) = 10x - \dfrac{640}{x^2} = 0 \Rightarrow 10x = \dfrac{640}{x^2} \underset{x \neq 0}{\Rightarrow} 10x^3 = 640 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^3 = \dfrac{640}{10} \Rightarrow x^3 = 64 \Rightarrow \boxed{x = 4}$

paso 8 : $C''(x) = 10 - \dfrac{-640 \cdot 2x}{x^4} \underset{x \neq 0}{=} 10 + \dfrac{1280}{x^3}$; $C''(4) > 0 \Rightarrow$ MÍNIMO

Solución $x = 4$dm, $y = 5$dm ✓

3 GALICIA EXT 2014



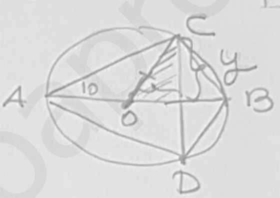
$\boxed{3x+y=70}$ CONDICIÓN

$\boxed{A=\frac{x^2}{16}+\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}}$ FUNCIÓN

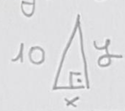
- $y=70-3x$
- $A(x)=\frac{x^2}{16}+\frac{x^2}{4}+\frac{(70-3x)^2}{16}=\frac{14x^2-420x+4900}{16}$
- $A'(x)=\frac{28x-420}{16}$
- $A'(x)=0 \Rightarrow 28x=420 \Rightarrow \boxed{x=15}$
- $A''(x)=\frac{28}{16}>0 \Rightarrow$ Mínimo

Solución: el hilo se divide en 3 trozos de $\boxed{15, 30 \text{ y } 25 \text{ cm}}$ ✓

4 radio circunf. grande es 10



triáng. rectángulo



GALICIA ORD 2013

$\boxed{100=x^2+y^2}$ CONDICIÓN

x? Área (A◁ C D) − Área (▷B C D) = sea Máxima

$$= \cancel{2}\left(\frac{(10+x)y}{\cancel{2}}\right)-\cancel{2}\left(\frac{(10-x)y}{\cancel{2}}\right)=\boxed{2xy} \text{ FUNCIÓN}$$

- $y=\sqrt{100-x^2}$
- $F(x)=2x\sqrt{100-x^2}$; $F'(x)=2\sqrt{100-x^2}+2x\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{100-x^2}}=$

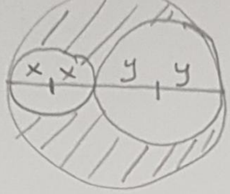
$$=\frac{2\left(\sqrt{100-x^2}\right)^2-2x^2}{\sqrt{100-x^2}}=\frac{2(100-x^2)-2x^2}{\sqrt{100-x^2}}=\frac{200-2x^2-2x^2}{\sqrt{100-x^2}}=$$

$$=\frac{200-4x^2}{\sqrt{100-x^2}}\ ;\quad F'(x)=0 \Rightarrow 200-4x^2=0 \Rightarrow 4x^2=200$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{200}{4}=50 \Rightarrow \boxed{x=+\sqrt{50}} \text{ u. de medida } ✓$$

$$= \sqrt{5^2 \cdot 2}=\boxed{5\sqrt{2}} \text{ u. de medida}$$

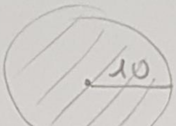
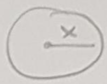
5 GALICIA ORD 2011



$2x+2y=20$

- $\boxed{x+y=10}$ CONDICIÓN

$y=10-x$

Área rayada =  $-$  $-$  $=$

$= \boxed{\pi\, 10^2 - \pi x^2 - \pi y^2}$ FUNCIÓN

- $A(x) = 100\pi - x^2\pi - (10-x)^2\pi = (\cancel{100} - x^2 - \cancel{100} + 20x - x^2)\pi =$

$= (-2x^2+20x)\pi$

- $A'(x) = -2\pi \cdot 2x + 20\cdot\pi = -4\pi x + 20\pi$
- $A'(x)=0 \Rightarrow 20\pi = 4\pi x \Rightarrow x = \dfrac{20\pi}{4\pi} = \boxed{5}$ cm
- $y = 10-5 = 5$ cm
- Para ver si máx. ó min

$A''(x) = -4\pi < 0 \Rightarrow$ MÁX.

$x=5 \Rightarrow \boxed{d_1 = 10\text{ cm}}$
$y=5 \Rightarrow \boxed{d_2 = 10\text{ cm}}$ ✓

Solu.

6 GALICIA EXT 2011

$40 = x+y$ CONDICIÓN $\rightarrow y = 40-x$

$x^3y^2 = F$ FUNCIÓN $\rightarrow F(x) = x^3(40-x)^2 = 1600x^3 - 80x^4 + x^5$

$F'(x) = 4800x^2 - 320x^3 + 5x^4 \longrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=24 \\ x=40 \end{cases}$

$F''(x) = 9600x - 960x^2 + 20x^3$

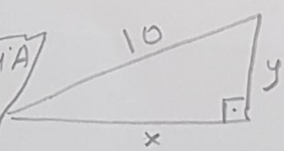
$\boxed{F''(24)<0 \rightarrow \text{Máx}}$

$F''(40)>0 \rightarrow$ Mínimo

$F''(0)=0$ (pto silla)

$\boxed{\text{Solución } x=24;\ y = 40-24 = 16}$ ✓

7 GALICIA ORD 2006



$x, y > 0$

$\boxed{100 = x^2+y^2}$ CONDICIÓN $\Rightarrow y = +\sqrt{100-x^2}$

$\boxed{A = \dfrac{xy}{2}}$ FUNCIÓN

$A(x) = \dfrac{x\sqrt{100-x^2}}{2}$; $A'(x) = \dfrac{50-x^2}{\sqrt{100-x^2}}$

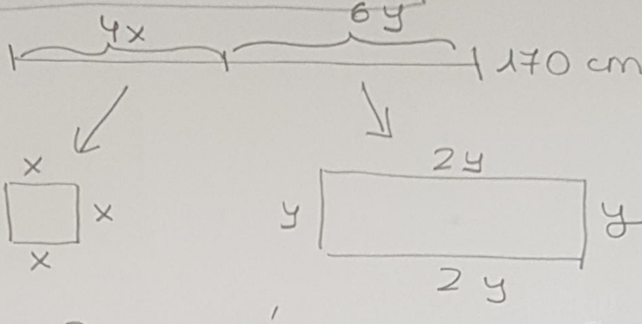
$A'(x)=0 \Rightarrow x = +\sqrt{50}$

Signo A' $\oplus$ $\ominus$

$\nearrow \sqrt{50} \searrow$ es Máx.

solución $\boxed{\begin{matrix} x=\sqrt{50} \\ y=\sqrt{50}\end{matrix}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} x=5\sqrt{2} \\ y=5\sqrt{2}\end{matrix}}$ ✓

8 Andalucía Ext. 2006



; $\boxed{4x + 6y = 170}$

$y = \dfrac{170 - 4x}{6}$

$A = x^2 + 2y^2$ FUNCIÓN ; $A(x) = x^2 + 2\,\dfrac{(170-4x)^2}{36} =$

$= \dfrac{17x^2 + 14\,450 - 680x}{9}$ (FotoMath)

$A'(x) = \dfrac{34}{9}x - \dfrac{680}{9} \Rightarrow A'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{34}{9}x = \dfrac{680}{9} \Leftrightarrow x = \dfrac{680}{34} = 20$

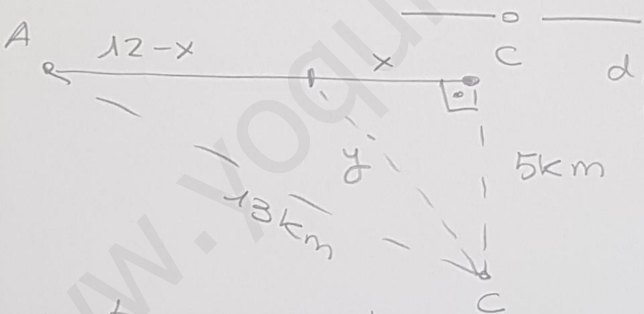
$\underline{x = 20 \text{ cm}}$

¿Mínimo? $A''(x) = \dfrac{34}{9} > 0 \Rightarrow$ Mínimo, sí

Los trozos son : $\boxed{\begin{array}{l} 4x = 4 \cdot 20 = \boxed{80 \text{ cm}} \\ \text{el otro } 170 - 80 = \boxed{90 \text{ cm}} \end{array}}$

Solución

9 GALICIA ORD. 2004



$d_{AC} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ km}$

$\boxed{y^2 = x^2 + 25}$ CONDICIÓN

$x > 0$
$y > 0$

Tiempo = $t_{caminando} + t_{nadando}$ $= \boxed{\dfrac{12 - x}{5} + \dfrac{y}{3}}$ FUNCIÓN

$V_{cam} = 5 \dfrac{km}{h}$ $V_{nada} = 3 \dfrac{km}{h}$

$v = \dfrac{e}{t} \Rightarrow t = \dfrac{e}{v}$

$y = \sqrt{x^2 + 25} \Rightarrow T(x) = \dfrac{12 - x}{5} + \dfrac{\sqrt{x^2+25}}{3}$

$T'(x) = -\dfrac{1}{5} + \dfrac{\cancel{2}x}{3 \cdot \cancel{2}\sqrt{x^2+25}} = -\dfrac{1}{5} + \dfrac{x}{x^2+25}$

$T'(x) = 0 \Rightarrow (5x)^2 = \left(3\sqrt{x^2+25}\right)^2 \Rightarrow 25x^2 = 9(x^2+25)$;

$16x^2 = 225 \Rightarrow x = \dfrac{15}{4} = 3'75 \text{ km}$ (tiene q. ser $x > 0$)

$y = \sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^2 + 25} = \underset{\sim\sim}{6'25\ km}$ (la distancia que nadó)

Comprobar si MÍNIMO   Signo T'

$$\begin{array}{ccc} \ominus & & \oplus \\ \searrow & \frac{15}{4} & \nearrow \end{array}$$

$T'(3) < 0$
$T'(4) > 0$

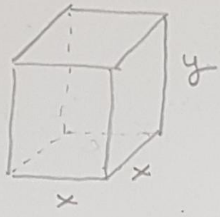
Sí, es mínimo.

Piden $12 - x = 12 - 3'75$

$= \boxed{8'25\ km \text{ distancia desde A al pto en el que se tiró al agua}}$

$\boxed{10}$

ARAGÓN EXT. 2021



$V = 64\ m^3 \Rightarrow \boxed{x^2 y = 64}$ CONDICIÓN

Coste = Coste de la base + Coste laterales =

$= 140x^2 + \underset{\uparrow}{4 \cdot 70}\, xy = 140x^2 + 280xy$

son 4 laterales

$C(x) = 140x^2 + 280x\left(\frac{64}{x^2}\right) = 140x^2 + \frac{17920}{x}$

$\underline{x>0}$

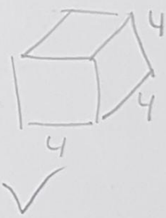
$C'(x) = 280x - \frac{17920}{x^2} = 0 \Rightarrow 280x^3 - 17920 = 0$

$\uparrow$
$x>0$
$x \neq 0$

$x^3 = \frac{17920}{280} = 64 \Rightarrow x = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^6} = 2^2 = \boxed{4}\ m$

$\Rightarrow y = \frac{64}{16} = 4\ m$

Sol: $\boxed{\text{dimensiones son un cubo de 4m de lado}}$



Comprobación si mínimo

Signo C'

$$\begin{array}{ccc} \ominus & & \oplus \\ \searrow & 4 & \nearrow \end{array}$$

Sí, es mínimo.

11 ASTURIAS ORD 2021

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=90 \\ z=\frac{x+y}{2} \end{array}\right\}$$ 2 CONDICIONES

Función $= xyz$

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=90 \\ z=\frac{x+y}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow x+y+\frac{x+y}{2}=90 \; ; \; \frac{2x+2y+x+y}{2}=90$$

$$\frac{3x+3y}{2}=90 \; ; \; 3x+3y=180 \; ; \; \boxed{x+y=60}$$

$$\Rightarrow \boxed{y=60-x} \text{ y } \boxed{z=\frac{x+y}{2}}$$ sustituyendo en la

Función: $F(x)=x\cdot(60-x)\cdot\frac{\cancel{x+60-x}}{2}=x(60-x)30$

$F(x)=(-x^2+60x)30$

$F'(x)=30(-2x+60)=0 \Leftrightarrow -2x=-60 \Leftrightarrow \boxed{x=30}$

$F''(x)=30(-2)<0 \Rightarrow$ MÁXIMO

$y=60-x \Rightarrow y=60-30=30$

$z=\frac{x+y}{2}=\frac{60}{2}=30$

los nºs buscados son $\boxed{30, 30 \text{ y } 30}$ ✓

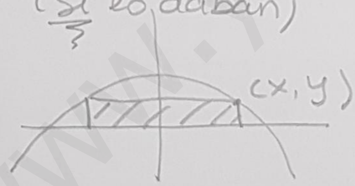
El producto se maximiza cuando los tres números son iguales a 30

---

12 ASTURIAS EXT. 2021

Faltaba el dibujo y el enunciado era ... una caca

(sí lo daban)



$3y=36-x^2 \Rightarrow \boxed{y=\frac{36-x^2}{3}}$ $\boxed{\begin{array}{l} x>0 \\ y>0 \end{array}}$

CONDICIÓN

en realidad piden el rectángulo de área máxima inscrito en la parábola y en 1er y 2º cuadrante (como muestra el dibujo)

$A=xy=x\,\frac{36-x^2}{3}=\frac{36x-x^3}{3}$

$A'(x)=\frac{36}{3}-\frac{3x^2}{3}=12-x^2 \; ; \; A'(x)=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2=12 \\ x>0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$A''(x)=-2x \; ; \; A''(2\sqrt{3})=-4\sqrt{3}<0 \Rightarrow$ MÁXIMO

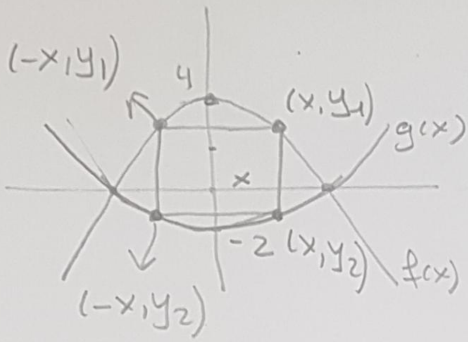
$y=\frac{36-x^2}{3}=\frac{36-12}{3}=\frac{24}{3}=8$ ✓

sol $\leftarrow$ $\boxed{\begin{array}{ll} x=\sqrt{12} & \text{u. medida} \\ y=8 & \text{u. medida} \end{array}}$

13 dibujamos gráficas $f(x) = 4 - \frac{x^2}{3}$; $g(x) = \frac{x^2}{6} - 2$

f $4 - \frac{x^2}{3}$ parábola cóncava
vértice $x=0$, $y=4$
ptos de corte $\pm\sqrt{12}$

g $\frac{x^2}{6} - 2$ parábola convexa
vértice $x=0$; $y=-2$
ptos corte $\pm\sqrt{12}$



calculamos vértices y área

base $2x$

altura $y_1 + y_2 = y$

$$\begin{cases} y_1 = f(x) = 4 - \frac{x^2}{3} \\ y_2 = g(x) = \frac{x^2}{6} - 2 \end{cases}$$

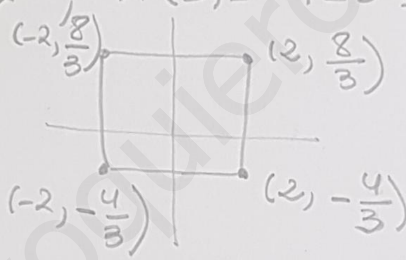
$$Area = 2xy = 2x\left(4 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{6} - 2\right) = 4x - \frac{x^3}{3}$$

$$A'(x) = 4 - \frac{3x^2}{3} = 4 - x^2 \quad ; \quad A'(x) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

$x > 0 \longrightarrow$ ojo!

$$A''(x) = -2x \quad ; \quad A''(2) = -4 < 0 \Rightarrow \text{Máximo}$$

Vértices



$$y_1 = 4 - \frac{x^2}{3} = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

$$y_2 = \frac{x^2}{6} - 2 = \frac{4}{6} - 2 = -\frac{4}{3}$$

La base mide $= 2 + 2 = 4$ unidades de medida

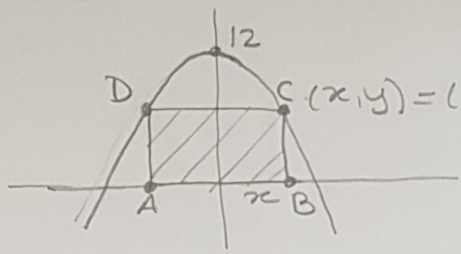
La altura mide $= \frac{8}{3} - \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{12}{3} = 4$ unides de medida

Área $= 16\ u^2$

(Es un cuadrado)

$\triangleright$ Solución ✓

14 $f(x) = -x^2 + 12$



$C(x,y) = (x, -x^2+12)$

$A = xy = x(-x^2+12)$

$A(x) = -x^3 + 12x$

$A'(x) = -3x^2 + 12$; $A'(x) = 0 \Rightarrow \boxed{x=2}$

$A''(x) = -6x$; $A''(2) = -12 < 0$ sí, máximo

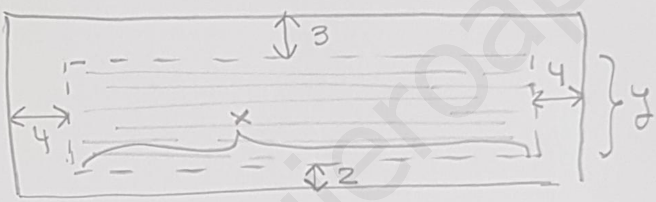
$y = -x^2 + 12 \Rightarrow y = -4 + 12 = 8$

Vértices $A(-2,0)$, $B(2,0)$, $C(2,8)$, $D(-2,8)$ ✓

Área $= b \cdot h = 2 \cdot 2 \cdot 8 = \boxed{32\ u^2}$

Solución

15 $x, y > 0$



$\boxed{xy = 90}$ CONDICIÓN

$A =$ base · altura

base $= 4 + x + 4$

altura $= 2 + y + 3$

$\left.\begin{array}{l} A = (x+8)(5+y) \\ xy = 90 \end{array}\right\} \Rightarrow A(x) = (x+8)\left(5 + \frac{90}{x}\right)$ $\boxed{x>0}$

$A'(x) = 1 \cdot \left(5 + \frac{90}{x}\right) + (x+8)\left(-\frac{90}{x^2}\right) = \frac{5x^2 - 720}{x^2}$

$A'(x) = 0 \Rightarrow 5x^2 - 720 = 0 \Rightarrow x = +\sqrt{144} = \boxed{12}$

como $x > 0$, $x \neq 0$; $x > 0$

Signo A'

(+) | (−) en 12 $\Rightarrow$ 12 Mínimo ✓

$A'(1) = \frac{5 - 720}{1} < 0 \Rightarrow$ (+)

$A'(13) =$ (−)

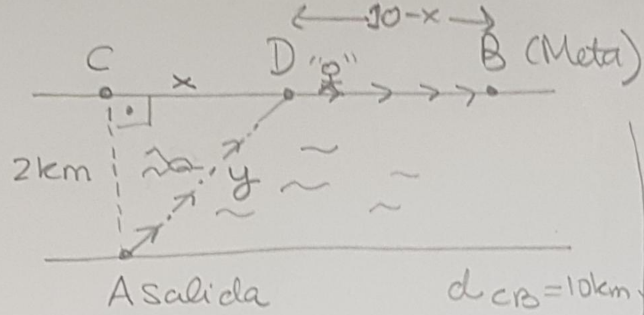
$x = 12 \Rightarrow y = \frac{90}{12} = \frac{45}{6} = \boxed{\frac{15}{2}}$; $x = 12$ cm, $y = 7'5$ cm

Solución

Éstas son las medidas $\leftarrow$ $x + 8 = 20$ cm, $y + 5 = 12'5$ cm ✓

46 (79)

a)



$V_N = 4 \frac{km}{h}$

$V_C = 12 \frac{km}{h}$

$V = \frac{e}{t} \Rightarrow t = \frac{e}{V}$

$t_{nadando} = \frac{y}{4}$

$t_{caminando} = \frac{10-x}{12}$

Pitágoras: $y^2 = 4 + x^2 \Rightarrow y = \sqrt{4+x^2}$

$y > 0$
$x > 0$

$$T(x) = \frac{y}{4} + \frac{10-x}{12} = \boxed{\frac{\sqrt{4+x^2}}{4} + \frac{10-x}{12}} \text{ c.q.d.}$$

b)

$$T'(x) = \frac{\cancel{2}x}{4 \cdot \cancel{2}\sqrt{4+x^2}} + \frac{-1}{12} = \frac{x}{4\sqrt{4+x^2}} - \frac{1}{12}$$

$$T'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x}{4\sqrt{4+x^2}} = \frac{1}{12} \Rightarrow 12x = 4\sqrt{4+x^2}$$

$$3x = \sqrt{4+x^2} \Rightarrow 9x^2 = 4 + x^2 \Rightarrow 8x^2 = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$, comprobamos que vale

¡ojo! $x > 0$

¿$3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{4 + \frac{1}{2}} = 0$?

$3 \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{9}{2}}$ sí vale

¿mínimo? miramos signo de T'

$$T'(x) = \frac{3x - \sqrt{4+x^2}}{12\sqrt{4+x^2}}$$ → esto siempre es ⊕

basta mirar el signo de $3x - \sqrt{4+x^2}$

⊖ ⊕

$\searrow \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0'707 \text{ km} \quad \nearrow$ ⇒ es Mínimo sí

$T'(0) < 0$

$T'(1) > 0$

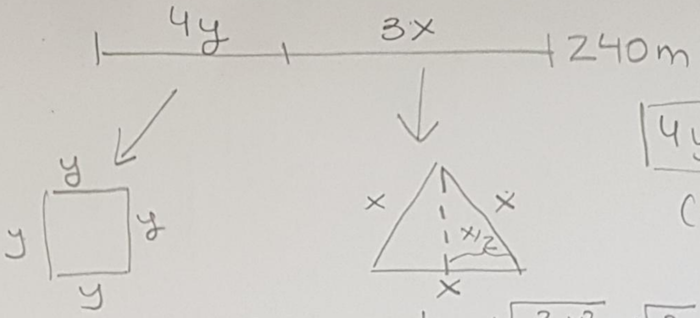
Solución

$\boxed{\text{Tiempo que tarda } T\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \simeq 1'3h \simeq 1h\,18'}$ ✓

Solución: Punto D es:

$x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq$ 710 metr

17



$y = \frac{240-3x}{4}$

$\boxed{4y+3x=240}$ COND.

a)

(Fija el enunciado quién tiene que ser x)

$h = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}}\,x$

$$A(x) = y^2 + \left(x \cdot \sqrt{\frac{3}{4}}\,x\right)\frac{1}{2} = y^2 + x^2\,\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = y^2 + \frac{x^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$$

$$A(x) = \left(\frac{240-3x}{4}\right)^2 + \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A'(x) = \cancel{2}\left(\frac{240-3x}{\cancel{4}\,2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{\cancel{2}\sqrt{3}}{\cancel{4}\,2}\,x =$$

$$= -\frac{240-3x}{2}\cdot\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}x = -120\cdot\frac{3}{4} + \frac{9x}{8} + \frac{\sqrt{3}}{2}x =$$

$$= -90 + \frac{9}{8}x + \frac{\sqrt{3}}{2}x = \boxed{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{9}{8}\right)x - 90}$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{90}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{9}{8}} \simeq \boxed{45'2}$$

$$A''(x) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{9}{8}\right) > 0 \Rightarrow \text{MÍNIMO}$$

Áreas? mínimas $\quad x \simeq 45'2 \Rightarrow y = \frac{240 - 3\cdot 45'2}{4} \simeq \boxed{26'1}$

El área mínima será $A(45'2) \simeq \boxed{1.565'87\,m^2}$ ✓

b) Para construirlo hará falta dividir el cable en un trozo de $3\cdot x \simeq 135'6085\,m$ (para el triáng.)

(para el cuadrado $240 - 135'6085$)

(13)

$f(x) = 4 - \frac{x^2}{3}$ $\qquad$ $g(x) = \frac{x^2}{6} - 2$

Parábola $\cap$ $\qquad$ Parábola $\cup$

$V(0,4)$ cóncava $\qquad$ $V(0,-2)$ convexa

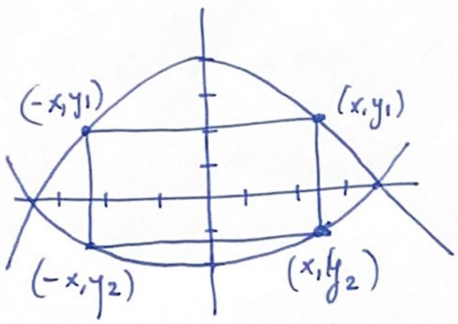
Miro onde se cortan $f(x) = g(x)$

$$4 - \frac{x^2}{3} = \frac{x^2}{6} - 2 \iff \frac{x^2}{6} + \frac{x^2}{3} - 6 = 0$$

$$\frac{3x^2}{6} - 6 = 0 \ ; \ x^2 = 12 \rightarrow x = \pm\sqrt{12}$$

Ptos $(\sqrt{12}, 0)$ $(-\sqrt{12}, 0)$

Coincide co corte cos eixes



$y_1 = 4 - \frac{x^2}{3}$

$\underline{y_2 < 0}$

$y_2 = \frac{x^2}{6} - 2$

O noso rectángulo ten de base $2x$ e de altura $y_1 - y_2$ (pq $y_2 < 0$)

Área do Rectángulo: $2x \cdot y$

con $y = y_1 - y_2$

Entón $A(x) = 2x \cdot \left(4 - \frac{x^2}{3} - \left(\frac{x^2}{6} - 2\right)\right) = 2x \cdot \left(6 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^2}{6}\right)$

$$A(x) = 2x \cdot \left(6 - \frac{3x^2}{6}\right) = 2x \cdot \left(6 - \frac{x^2}{2}\right) = 12x - x^3$$

Derivamos: $A'(x) = 2 \cdot \left(6 - \frac{x^2}{2}\right) + 2x \cdot \left(-\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}}\right) = 12 - x^2 - 2x^2 = 12 - 3x^2$

$A'(x) = 0 \iff 3x^2 = 12 \iff x^2 = 4 \ ; \ \underline{x = 2}$

$x > 0$

Como $A''(x) = -6x$

$A''(2) = -12 < 0 \Rightarrow$ En $x=2$ temos un máximo.

As dimensións do rectángulo serán

$\underline{\underline{x = 2\ u}} \rightarrow \underline{\underline{y}} = y_1 - y_2 = \left(4 - \frac{4}{3}\right) - \left(\frac{4}{6} - 2\right) =$

$= 6 - 2 = \underline{\underline{4}}\ u$

Polo tanto, é un cadrado de lado 4 u.

e a área máxima é

$A = 2x\,y = 2 \cdot 4 \cdot 4 = 32\ u^2$.