Repartos proporcionales

Procedimiento de cálculo que permite distribuir cierta cantidad, en partes proporcionales a otras.

Dependiendo de la relación que exista entre la cantidad a repartir, y las partes proporcionales, distinguimos dos tipos:

- Reparto proporcional simple directo.
- Reparto proporcional simple inverso.

Repartir una cantidad C en varias partes: $x_1, x_2, \dots x_n$
que son proporcionales a los números: $a_1, a_2, \dots, a_n$

Donde los a_i se denominan *números proporcionales* y los x_i son las distintas *cantidades buscadas*, correspondientes respectivamente a cada número proporcional dado.

REPARTO PROPORCIONAL **DIRECTO**

En un reparto directo, ***cuanto mayor*** *es el número proporcional,* ***más*** *le corresponde en el reparto y viceversa.*

MÉTODO I, DE LAS PROPORCIONES

Para un reparto de una cantidad C en tres partes x_1, x_2, x_3 **directamente proporcionales** a tres números a_1, a_2, a_3,
y aplicando la **propiedad de las proporciones** que dice que:
en una serie de razones iguales, cada antecedente es a su consecuente como la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes, tenemos:

$$\boxed{\frac{x_1}{a_1}=\frac{x_2}{a_2}=\frac{x_3}{a_3}=\frac{x_1+x_2+x_3}{a_1+a_2+a_3}}$$

Si llamamos: $C = x_1 + x_2 + x_3$ y $S = a_1 + a_2 + a_3$

El reparto queda como se indica:

$$\frac{x_1}{a_1}=\frac{x_1+x_2+x_3}{a_1+a_2+a_3} \Rightarrow x_1=\frac{a_1\cdot C}{S}$$

$$\frac{x_2}{a_2}=\frac{x_1+x_2+x_3}{a_1+a_2+a_3} \Rightarrow x_2=\frac{a_2\cdot C}{S}$$

$$\frac{x_3}{a_3}=\frac{x_1+x_2+x_3}{a_1+a_2+a_3} \Rightarrow x_3=\frac{a_3\cdot C}{S}$$

MÉTODO II, DE REDUCCIÓN A LA UNIDAD

Para un reparto de una cantidad C en tres partes x_1, x_2, x_3 **directamente proporcionales** a tres números a_1, a_2, a_3,
y calculando la **constante *k* de proporcionalidad**, tenemos:

- Cantidad a repartir: $C = x_1 + x_2 + x_3$
- Suma de los números proporcionales: $S = a_1 + a_2 + a_3$
- Constante de proporcionalidad: $k=\dfrac{C}{S}$
- Y el reparto queda así: $\begin{cases} x_1 = a_1\cdot k \\ x_2 = a_2\cdot k \\ x_3 = a_3\cdot k \end{cases}$
- Comprobamos que: $x_1 + x_2 + x_3 = C$

REPARTO PROPORCIONAL **INVERSO**

En un reparto inverso, ***cuanto mayor*** *es el número proporcional,* ***menos*** *le corresponde en el reparto y viceversa.*

MÉTODO I, DE LAS PROPORCIONES

Para un reparto de una cantidad C en tres partes x_1, x_2, x_3 **inversamente proporcionales** a tres números a_1, a_2, a_3,
y aplicando la **propiedad de las proporciones** que dice que:
en una serie de razones iguales, cada antecedente es a su consecuente como la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes, tenemos:

$$\boxed{\frac{x_1}{\frac{1}{a_1}}=\frac{x_2}{\frac{1}{a_2}}=\frac{x_3}{\frac{1}{a_3}}=\frac{x_1+x_2+x_3}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}}}$$

Si llamamos: $C = x_1 + x_2 + x_3$ y $S=\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}$

Queda el reparto como sigue:

$$\frac{x_1}{\frac{1}{a_1}}=\frac{C}{S} \Rightarrow x_1=\frac{C}{a_1\cdot S}$$

$$\frac{x_2}{\frac{1}{a_2}}=\frac{C}{S} \Rightarrow x_2=\frac{C}{a_2\cdot S}$$

$$\frac{x_3}{\frac{1}{a_3}}=\frac{C}{S} \Rightarrow x_3=\frac{C}{a_3\cdot S}$$

Comprobando que $x_1 + x_2 + x_3 = C$

MÉTODO II, DE REDUCCIÓN A LA UNIDAD

Para un reparto de una cantidad C en tres partes x_1, x_2, x_3 **inversamente proporcionales** a tres números a_1, a_2, a_3,
y calculando la **constante de proporcionalidad**, tenemos:

- Cantidad a repartir: $C = x_1 + x_2 + x_3$
- Números proporcionales: a_1, a_2, a_3
- Inversos de los números proporcionales: $\dfrac{1}{a_1}, \dfrac{1}{a_2}, \dfrac{1}{a_3}$
- Reducimos a común denominador las tres fracciones

  $$\frac{b_1}{\mathrm{M}}, \frac{b_2}{\mathrm{M}}, \frac{b_3}{\mathrm{M}}$$

  siendo M el $mcm(a_1, a_2, a_3)$
- Suma de los <u>numeradores</u>: $S = b_1 + b_2 + b_3$
- Constante de proporcionalidad: $k=\dfrac{C}{S}$
- Y el reparto, utilizando los numeradores, queda así:

  $$\begin{cases} x_1 = b_1\cdot k \\ x_2 = b_2\cdot k \\ x_3 = b_3\cdot k \end{cases}$$
- Comprobamos que: $x_1 + x_2 + x_3 = C$

Problema 1

Repartir la cantidad de 1.000 €, en tres partes que sean directamente proporcionales a los números 2, 3, y 5.

Cantidad a repartir: $C = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow C = 1000$

Suma de los números directamente proporcionales:

$$S = 2 + 3 + 5 \rightarrow S = 10$$

Constante de proporcionalidad: $k = \frac{C}{S} = \frac{1000}{10} \rightarrow k = 100$

Reparto:

$$x_1 = 2 \cdot k \rightarrow 2 \cdot 100 \rightarrow x_1 = 200\,€$$
$$x_2 = 3 \cdot k \rightarrow 3 \cdot 100 \rightarrow x_2 = 300\,€$$
$$x_3 = 5 \cdot k \rightarrow 5 \cdot 100 \rightarrow x_3 = 500\,€$$

Y comprobamos que: $200\,€ + 300\,€ + 500\,€ = 1000\,€$

Problema 2

Repartir la cantidad de 720 € en 3 partes, que sean inversamente proporcionales a los números: 3, 4, y 6.

Cantidad a repartir:

$$C = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow C = 720$$

Números proporcionales inversos y reducción a común denominador:

$$\frac{1}{3} \; ; \; \frac{1}{4} \; ; \; \frac{1}{6} \xrightarrow{mcm(3,4,6)=12} \frac{4}{12} \; ; \; \frac{3}{12} \; ; \; \frac{2}{12}$$

Suma de los numeradores:

$$S = 4 + 3 + 2 \rightarrow S = 9$$

Constante de proporcionalidad: $k = \frac{C}{S} = \frac{720}{9} \rightarrow k = 80$

Reparto:

$$x_1 = 4 \cdot k \rightarrow 4 \cdot 80 \rightarrow x_1 = 320\,€$$
$$x_2 = 3 \cdot k \rightarrow 3 \cdot 80 \rightarrow x_2 = 240\,€$$
$$x_3 = 2 \cdot k \rightarrow 2 \cdot 80 \rightarrow x_3 = 160\,€$$

Y comprobamos que: $320\,€ + 240\,€ + 160\,€ = 720\,€$

Problema 3

Tres amigos invierten en un negocio las siguientes cantidades: Juan deposita 6.000 €, Luis 4.500 € y Pedro 9.500 €.
Si en el primer año han tenido un beneficio de 2.000 €.
¿Qué beneficio corresponde a cada uno?

Cuanta más cantidad invertida, más beneficio tienes; luego se trata de un reparto directamente proporcional.

Cantidad a repartir: $C = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow C = 2000$

Suma de los números directamente proporcionales:

$$S = 6000 + 4500 + 9500 \rightarrow S = 20000$$

Constante de proporcionalidad: $k = \frac{C}{S} = \frac{2000}{20000} \rightarrow k = \frac{1}{10}$

Reparto:

$$x_1 = 6000 \cdot k \rightarrow x_1 = 600\,€$$
$$x_2 = 4500 \cdot k \rightarrow x_2 = 450\,€$$
$$x_3 = 9500 \cdot k \rightarrow x_3 = 950\,€$$

Y comprobamos que: $600\,€ + 450\,€ + 950\,€ = 2.000\,€$

Problema 4

Tres familias alquilan conjuntamente un apartamento en la costa por 1.200 € para 20 días. Los Rodríguez lo disfrutan durante la primera semana; los García, los 8 días siguientes y, el resto del tiempo, los Ochoa. ¿Cuánto debe pagar cada familia por la estancia?

Cuantos más días se disfruta del apartamento, más debe pagar la familia; luego será un reparto directamente proporcional.

Cantidad a repartir: $C = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow C = 1200$

Suma de los números directamente proporcionales:

$$S = 7 + 8 + 5 \rightarrow S = 20$$

Constante de proporcionalidad: $k = \frac{C}{S} = \frac{1200}{20} \rightarrow k = 60$

Reparto:

$$x_1 = 7 \cdot k \rightarrow 7 \cdot 60 \rightarrow x_1 = 420\,€$$
$$x_2 = 8 \cdot k \rightarrow 8 \cdot 60 \rightarrow x_2 = 480\,€$$
$$x_3 = 5 \cdot k \rightarrow 5 \cdot 60 \rightarrow x_3 = 300\,€$$

Y comprobamos que: $420\,€ + 480\,€ + 300\,€ = 1.200\,€$

Problema 5

En una carrera de motos el primer clasificado ha tardado tres cuartos de hora, el segundo 3 minutos más que el primero y el tercero 2 minutos más que el segundo.
Si el premio de 9.080 €, ¿cómo debemos repartir el dinero entre los tres clasificados?

Cuanto menos tiempo tarde más dinero ganará, luego se trata de un reparto inversamente proporcional:

Cantidad a repartir:

$$C = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow C = 9080$$

Números proporcionales inversos:

$$\frac{1}{45} \; ; \; \frac{1}{48} \; ; \; \frac{1}{50}$$

Reducción a común denominador

$$\xrightarrow[mcm=3600]{mcm(45,48,50)} \frac{80}{3600} \; ; \; \frac{75}{3600} \; ; \; \frac{72}{3600}$$

Suma de los numeradores:

$$S = 80 + 75 + 72 \rightarrow S = 227$$

Constante de proporcionalidad: $k = \frac{C}{S} = \frac{9080}{227} \rightarrow k = 40$

Reparto:

$$x_1 = 80 \cdot k \rightarrow 80 \cdot 40 \rightarrow x_1 = 3200\,€$$
$$x_2 = 75 \cdot k \rightarrow 75 \cdot 40 \rightarrow x_2 = 3000\,€$$
$$x_3 = 72 \cdot k \rightarrow 72 \cdot 40 \rightarrow x_3 = 2880\,€$$

Y comprobamos que: $3200\,€ + 3000\,€ + 2880\,€ = 9.080\,€$