

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

(O alumno/a debe responder só aos exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1 = 3 puntos, exercicio 2 = 3 puntos, exercicio 3 = 2 puntos, exercicio 4 = 2 puntos)

OPCIÓN A

1) Sexan as matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

- (a) Determina o valor de x para que se verifique $B^2 = A$.
 (b) Calcula o valor de x para que $B + C = A^{-1}$, (A^{-1} é a matriz inversa de A).
 (c) Calcula o valor de x para que se verifique $A - B + \frac{1}{2}C = 3I_2$, sendo I_2 a matriz identidade de orde 2.

2) A cantidade de madeira (en metros cúbicos) que se extrae dunha explotación forestal durante un período de cinco días vén dada pola función: $M(t) = t^3 - 9t^2 + 24t$, $0 \leq t \leq 5$, onde t é o tempo transcorrido en días.

- (a) Estuda en que períodos se rexistrou un aumento e nos que se rexistrou unha diminución da cantidade de madeira extraída.
 (b) ¿En que día ou días se extraeu a máxima cantidade de madeira?, ¿e a mínima? Calcular a cantidade máxima e mínima de metros cúbicos de madeira extraída.
 (c) Representa graficamente a función $M(t)$, calculando, se os hai, os puntos de inflexión.

3) Un control de calidade é superado por catro de cada cinco artigos de pesca. Sométense ao devandito control un total de 225 artigos,

- (a) ¿cantos artigos de pesca se espera que superen o control de calidade?
 (b) ¿cal é a probabilidade de que superen o control de calidade entre 170 e 187 (incluídos) artigos?

4) No proceso industrial de envasado dun produto, o peso dos envases aproxímase a unha Normal de media 500 gramos e desviación típica 4 gramos. Os directivos da empresa sospeitan que a maquinaria de envasado está avariada e decidirán cambiala se o peso medio dos envases é superior a 500 gramos. Para iso, analizan unha mostra aleatoria de 30 envases e obteñen un peso medio de 501,5 gramos.

- (a) Formula un test para contrastar a hipótese de que non é necesario cambiar a maquinaria fronte a que sí o é, tal como sospeitan os directivos, ¿a que conclusión se chega cun nivel de significación do 5%?
 (b) Explica o tipo de erro que cometerían se decidisen erroneamente non cambiar a maquinaria.

OPCIÓN B

1) Sexa a función $f(x, y) = -0,8x + 1,5y$ suxeita ás restricións: $x + y \leq 10$; $x + 2y \geq 8$; $2 \leq y \leq x + 6$; $x \leq 6$.

- (a) Representa a rexión R do plano determinado polo conxunto de restricións e calcula os seus vértices.
 (b) Calcula os puntos de R onde a función alcanza os seus valores máximo e mínimo.

2) O prezo de venda (en euros) dun artigo deportivo dende o momento inicial da súa comercialización axústase á función

$$P(t) = \begin{cases} -\frac{1}{5}t^2 + 4t + 80, & 0 \leq t < 15 \\ 87 + \frac{32}{t-11}, & t \geq 15 \end{cases}, \text{ onde } t \text{ é o tempo transcorrido en meses.}$$

- (a) ¿Cal é o prezo inicial do artigo? ¿E despois de transcorridos 15 meses?
 (b) Estuda en que meses se produce un aumento e nos que se produce unha diminución do prezo do artigo. ¿Cal é o prezo máximo que alcanza o artigo? ¿E o prezo mínimo?
 (c) Despois de transcorridos 15 meses, ¿haberá algún mes no que o prezo sexa inferior a 85 euros? Razona a resposta.

3) Unha fábrica produce CDs en dúas quendas. A primeira quenda produce 2000 discos diarios e a segunda quenda produce 3000. Pola experiencia pasada, sábese que na primeira quenda e na segunda quenda prodúcense 1% e 2% de discos defectuosos, respectivamente. Ao final do día seleccionouse ao azar un disco da produción total.

- (a) Determina a probabilidade de que o CD sexa defectuoso.
 (b) Se o CD non é defectuoso, calcula a probabilidade de que proveña da primeira quenda.

4) Un estudo sobre o hábito de fumar entre os habitantes adultos dunha cidade informa que o intervalo da proporción de fumadores se estima entre un 30% e un 40%.

- (a) Determina a proporción mostral de fumadores observada, segundo o devandito estudo.
 (b) O estudo engade que os datos obtéñenos dunha enquisa aleatoria realizada a 364 habitantes adultos da cidade, ¿cal é entón o nivel de confianza do devandito intervalo de estimación da proporción de fumadores?

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

(O alumno/a debe responder só aos exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1 = 3 puntos, exercicio 2 = 3 puntos, exercicio 3 = 2 puntos, exercicio 4 = 2 puntos)

OPCIÓN A

1) O dono dunha tenda de fotografía desexa comercializar dous tipos de cámaras de fotos A e B cun prezo de venda ao público de 210 e 300 euros a unidade, respectivamente. Para a compra de ambos os dous tipos dispón dun máximo de 2760 euros e fará o pedido a un almacén que lle cobra 120 euros por cada cámara do tipo A e 180 euros por cada cámara do B . O dono fará o pedido coa condición de que: polo menos 3 cámaras sexan do tipo A , entre 4 e 12 sexan do B e o número de cámaras do tipo A non debe superar en máis de tres unidades ao número de cámaras do tipo B .

- (a) Formula o sistema de inecuacións asociado ao problema. Representa a rexión factible, calcula os seus vértices.
- (b) ¿Cantas cámaras de cada tipo deberá adquirir para que os beneficios obtidos sexan máximos?

2) Sexa a función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

- (a) Calcula a , b , c e d , sabendo que a función presenta os seus extremos relativos nos puntos $(0, 0)$, e $(1, 1)$.
- (b) Determina que tipo de extremos relativos son cada un dos puntos anteriores.
- (c) Representa a gráfica da función, determinando os puntos de corte cos eixes e o punto de inflexión.

3) Estímase que un tercio das empresas nun sector da economía, terán un aumento nas súas ganancias trimestrais. Declara un dividendo un 60% das empresas que teñen aumento e un 10% das que non o teñen.

- (a) ¿Que porcentaxe das empresas que declaren un dividendo terán un aumento nas súas ganancias trimestrais?
- (b) ¿Que porcentaxe de empresas nin teñen aumento nas súas ganancias nin declaran un dividendo?

4) En certo país, a renda anual familiar segue unha distribución normal de media 16260 euros e desviación típica 6320 euros. Un estudo realizado con 200 familias elixidas ao azar nunha comarca proporcionou unha renda media de 15308 euros. Supoñendo que se mantén a desviación típica,

- (a) calcula un intervalo de confianza do 95% para a renda media anual das familias da comarca
- (b) formula un test para contrastar a hipótese de que a renda media anual das familias da comarca é a mesma, fronte a hipótese de que é menor que a global para todo o país. ¿Cal é a conclusión á que se chega, cun nivel de significación do 5%? ¿Chegaríase á mesma conclusión se o nivel é do 1%?

OPCIÓN B

1) (a) Calcula as matrices X e Y que verifican o sistema $3X + 2Y = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$; $X - 5Y = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -12 & -4 \end{pmatrix}$.

(b) Calcula a matriz inversa de $X \cdot Y$.

2) O número de nacementos anuais (en centos) que se producen nunha cidade a partir do ano 2000 vén dado pola función

$$N(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}t^2 - 3t + 15, & 0 \leq t < 8 \\ 10 - \frac{6}{t-6}, & t \geq 8 \end{cases}, \quad t \text{ é o tempo transcorrido en anos } (t = 0 \text{ corresponde ao ano 2000}).$$

- (a) ¿Cantos nacementos se produciron no ano 2000?
- (b) Estuda entre que anos se produciu un decrecemento da natalidade. Determina en que ano se produciu o menor número de nacementos e cal foi ese número.
- (c) ¿Cal é a tendencia do número de nacementos no futuro? Razona a resposta.

3) Un estudo realizado por unha entidade bancaria informa que o 60% dos seus clientes ten un préstamo hipotecario, o 50% ten un préstamo persoal e o 40% dos que teñen un préstamo persoal tamén ten un préstamo hipotecario.

- (a) Calcula a porcentaxe de clientes que teñen ambos os dous tipos de préstamos.
- (b) Calcula a porcentaxe de clientes que non teñen ningún dos dous tipos de préstamos.

4) Nun estudo sobre hixiene dental, a porcentaxe de nenos que presentaron indicios de carie utilizando un dentífrico tradicional foi de, polo menos, o 10%. Nun grupo de 500 nenos elixidos aleatoriamente que utilizaron un novo dentífrico, presentaron indicios de carie 35 deles.

- (a) Formula un test para contrastar a hipótese de que a proporción de nenos con indicios de carie usando o novo dentífrico é a mesma que co tradicional fronte a hipótese de que se reduce ¿A que conclusión se chega cun nivel de significación do 5%?
- (b) Calcula un intervalo do 95% de confianza para a proporción de nenos con indicios de carie utilizando o novo dentífrico.

Criterios de Avaliación / Corrección

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

EXERCICIO 1 (3 puntos)

- (a) **0,75 puntos:**
- Calcular a matriz B^2 : **0,25 puntos**.
 - Resolver a igualdade de matrices, obtendo o valor de “x”: **0,50 puntos**.
- (b) **1,50 puntos:**
- Calcular a matriz inversa de A: **1 punto**.
 - Calcular $B + C$: **0,25 puntos**.
 - Resolver, obtendo o valor pedido: **0,25 puntos**.
- (c) **0,75 puntos:**
- Operar alxébricamente coas matrices dadas: **0,50 puntos**.
 - Obter o valor de “x” : **0,25 puntos**.

EXERCICIO 2 (3 puntos)

- (a) **1 punto:**
- Determinar a primeira derivada: **0,25 puntos**.
 - Calcular os puntos críticos: **0,25 puntos**.
 - Polos períodos nos que se registrou un aumento e nos que se registrou unha diminución da cantidade de madeira: **0,50 puntos**.
- (b) **1,25 puntos:**
- Días nos que se extraeu a máxima cantidade de madeira: **0,50 puntos**.
 - Día no que se extraeu a mínima cantidade de madeira: **0,25 puntos**.
 - Cantidade máxima e mínima: **0,50 puntos**.
- (c) **0,75 puntos:**
- Polo punto de inflexión: **0,25 puntos**.
 - Representación gráfica da función: **0,50 puntos**.

EXERCICIO 3 (2 puntos)

- (a) **0,50 puntos:**
- Polo cálculo do número esperado de artigos de pesca que superan o control de calidade: **0,50 puntos**.
- (b) **1,50 puntos:**
- Formular a probabilidade pedida: **0,25 puntos**.
 - Paso da binomial a normal: **0,50 puntos**.
 - Corrección de medio punto: **0,25 puntos**.
 - Tipificación: **0,25 puntos**.
 - Paso a táboas e resultado final: **0,25 puntos**.

EXERCICIO 4 (2 puntos)

- (a) **1,50 puntos:**
- Especificar as hipóteses nula e alternativa: **0,50 puntos**.
 - Establecer a rexión crítica: **0,25 puntos**.
 - Avaliar o estatístico de contraste para a mostra dada: **0,25 puntos**.
 - Decidir se aceptamos ou rexeitamos a hipótese nula: **0,25 puntos**.
 - Concluir se é preciso ou non cambiar a maquinaria: **0,25 puntos**.
- (b) **0,50 puntos:**
- Explicar o tipo de erro que se comete: **0,50 puntos**.

Criterios de Avaliación / Corrección

OPCIÓN B

EXERCICIO 1 (3 puntos)

(a) **2,50 puntos:**

- Vértices da rexión factible: **1,25 puntos**.
- Representación gráfica da rexión factible: **1,25 puntos** (por debuxar as rectas e a rexión do plano limitada por elas e os catro vértices).

(b) **0,50 puntos:**

- Punto da rexión no que a función obxectivo alcanza o valor máximo: **0,25 puntos**.
- Punto da rexión no que alcanza o valor mínimo: **0,25 puntos**.

EXERCICIO 2 (3 puntos)

(a) **0,50 puntos:**

- Determinar o prezo inicial: **0,25 puntos**.
- Determinar o prezo aos 15 meses: **0,25 puntos**.

(b) **2 puntos:**

- Determinar a primeira derivada en cada un dos anacos da función: **0,50 puntos**.
- Determinar o intervalo de crecemento: **0,25 puntos**.
- Determinar os intervalos de decrecemento: **0,50 puntos**.
- Responder á pregunta: en que momento se produce un aumento e unha diminución do prezo do artigo: **0,25 puntos**.
- Prezo máximo e prezo mínimo: **0,50 puntos**.

(c) **0,50 puntos:**

- Calcular o límite da función: **0,50 puntos**.

EXERCICIO 3 (2 puntos)

(a) **1 punto:**

- Aplicar o teorema das probabilidades totais identificando cada unha das probabilidades do enunciado do exercicio: **0,75 puntos**.
- Resultado final: **0,25 puntos**.

(b) **1 punto:**

- Formulación da probabilidade pedida: **0,25 puntos**.
- Expresión da probabilidade condicionada anterior: **0,25 puntos**.
- Identificar as probabilidades da fórmula anterior: **0,25 puntos**.
- Resultado final: **0,25 puntos**.

EXERCICIO 4 (2 puntos)

(a) **0,50 puntos:**

- Calcular a proporción da mostra: **0,50 puntos**.

(b) **1,50 puntos:**

- Identificar o radio do intervalo co valor numérico que lle corresponde: **0,50 puntos**.
- Obter $z_{\alpha/2}$: **0,25 puntos**.
- Uso da táboa e obter o valor de $1 - \alpha/2$: **0,25 puntos**.
- Obter o nivel de confianza: **0,50 puntos**.

Criterios de Avaliación / Corrección

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

EXERCICIO 1 (3 puntos)

(a) **2,50 puntos:**

- Formular o sistema de inecuacións: **1 punto**.
- Vértices da rexión factible: **1 punto**.
- Representación gráfica da rexión factible: **0,50 puntos** (por debuxar as rectas e a rexión do plano limitada por elas e os cinco vértices).

(b) **0,50 puntos:**

- Función beneficio a maximizar: **0,25 puntos**.
- Pola solución óptima: **0,25 puntos**.

EXERCICIO 2 (3 puntos)

(a) **1,50 puntos:**

- Calcular “c” e “d”: **0,50 puntos**.
- Formular o sistema das dúas ecuacións coas dúas incógnitas “a” e “b”: **0,50 puntos**.
- Determinar o valor de “a” e o valor de “b”: **0,50 puntos**.

(b) **0,50 puntos:**

- Por determinar o máximo: **0,25 puntos**.
- Por determinar o mínimo: **0,25 puntos**.

(c) **1 punto:**

- Puntos de corte cos eixes: **0,25 puntos**.
- Punto de inflexión: **0,25 puntos**.
- Representación gráfica da función: **0,50 puntos**.

EXERCICIO 3 (2 puntos)

(a) **1,25 puntos:**

- Formulación da probabilidade pedida: **0,25 puntos**.
- Expresión da probabilidade anterior, identificar cada unha das probabilidades da fórmula e cálculos: **0,75 puntos**.
- Responder á pregunta da porcentaxe pedida: **0,25 puntos**.

(b) **0,75 puntos:**

- Formulación da probabilidade pedida: **0,25 puntos**.
- Expresión da probabilidade anterior e resultado: **0,25 puntos**.
- Responder á porcentaxe pedida: **0,25 puntos**.

EXERCICIO 4 (2 puntos)

(a) **0,75 puntos:**

- Expresión do intervalo de confianza: **0,25 puntos**.
- Calcular numericamente os extremos do intervalo: **0,50 puntos**.

(b) **1,25 puntos:**

- Especificar as hipóteses nula e alternativa: **0,25 puntos**.
- Establecer a rexión crítica: **0,25 puntos**.
- Avaliar o estatístico de contraste para a mostra dada: **0,25 puntos**.
- Conclusión para o 5% de nivel de significación: **0,25 puntos**.
- Conclusión para o 1% de nivel de significación: **0,25 puntos**.

Criterios de Avaliación / Corrección

OPCIÓN B

EXERCICIO 1 (3 puntos)

- (a) **1,50 puntos:**
- Calcular a matriz X : **0,75 puntos.**
 - Calcular a matriz Y : **0,75 puntos.**
- (b) **1,50 puntos:**
- Calcular a matriz $X \cdot Y$: **0,50 puntos.**
 - Cálculo da matriz inversa de $X \cdot Y$: **1 punto.**

EXERCICIO 2 (3 puntos)

- (a) **0,25 puntos:**
- Determinar o número de nacementos pedido: **0,25 puntos.**
- (b) **2 puntos:**
- Determinar a primeira derivada nos dous anacos da función: **0,75 puntos.**
 - Estudo do decrecemento da función: **0,50 puntos.**
 - Entre que anos se produciu o decrecemento da natalidade: **0,25 puntos.**
 - Determinar o ano en que se produciu o menor número de nacementos: **0,25 puntos.**
 - Determinar o número mínimo de nacementos: **0,25 puntos.**
- (c) **0,75 puntos:**
- Calcular o límite da función: **0,50 puntos.**
 - Tendencia do número de nacementos: **0,25 puntos.**

EXERCICIO 3 (2 puntos)

- (a) **1 punto:**
- Formular a probabilidade pedida: **0,25 puntos.**
 - Expresión e cálculos na probabilidade anterior, identificando as probabilidades do enunciado: **0,50 puntos.**
 - Expresión da porcentaxe pedida: **0,25 puntos.**
- (b) **1 punto:**
- Formulación da probabilidade pedida: **0,25 puntos.**
 - Expresión e cálculos na probabilidade anterior: **0,50 puntos.**
 - Resultado pedido: **0,25 puntos.**

EXERCICIO 4 (2 puntos)

- (a) **1,25 puntos:**
- Especificar as hipóteses nula e alternativa: **0,25 puntos.**
 - Establecer a rexión crítica: **0,25 puntos.**
 - Avaliar o estatístico de contraste para a mostra dada: **0,25 puntos.**
 - Decidir se aceptamos ou rexeitamos a hipótese nula: **0,25 puntos.**
 - Conclusión sobre se se reduce (ou non) a carie usando o novo dentífrico: **0,25 puntos.**
- (b) **0,75 puntos:**
- Expresión do intervalo de confianza: **0,25 puntos.**
 - Calcular numericamente os extremos do intervalo: **0,50 puntos.**

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

O/A alumno/a debe responder só aos exercicios dunha das dúas opcións (A ou B)

OPCIÓN A

Exercicio 1. (A puntuación máxima deste exercicio é 3 puntos)

Sexan as matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

(a) **0'75 puntos.** Determina o valor de x para que se verifique $B^2 = A$

– Calcular a matriz $B^2 = \begin{pmatrix} 4+x^2 & 3x \\ 3x & x^2+1 \end{pmatrix}$ **0'25 puntos.**

– Resolver a igualdade de matrices, obtendo o valor da solución

$$\begin{pmatrix} 4+x^2 & 3x \\ 3x & x^2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4+x^2=5 \\ 3x=3 \\ x^2+1=2 \end{cases} \Rightarrow x=1,$$

a solución $x = -1$ non é válida, xa que aínda que é solución das ecuacións $x^2 + 1 = 2$ e da $4 + x^2 = 5$, non o é da ecuación $3x = 3$ **0'50 puntos.**

(b) **1'50 puntos.** Calcula o valor de x para que $B + C = A^{-1}$

– Calcular a matriz inversa de A , $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ **1 punto.**

– Calcular $B + C$, $B + C = \begin{pmatrix} 2 & x-1 \\ x-1 & 5 \end{pmatrix}$ **0'25 puntos.**

– Resolver, obtendo o valor pedido $\begin{pmatrix} 2 & x-1 \\ x-1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow x = -2$ **0'25 puntos.**

(c) **0'75 puntos.** Calcula o valor de x para que se verifique $A - B + \frac{1}{2}C = 3I_2$

– Operar alxébricamente coas matrices dadas $A - B + \frac{1}{2}C = \begin{pmatrix} 3 & 3-x-1/2 \\ 3-x-1/2 & 3 \end{pmatrix}$ **0'50 puntos.**

– Obter o valor de x , $\begin{pmatrix} 3 & 3-x-1/2 \\ 3-x-1/2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow 3-x-1/2=0 \Rightarrow x=5/2$ **0'25 puntos.**

Exercicio 2. (A puntuación máxima deste exercicio é 3 puntos)

A cantidade de madeira (en metros cúbicos) que se extrae dunha explotación forestal durante un período de cinco días vén dada pola función: $M(t) = t^3 - 9t^2 + 24t$, $0 \leq t \leq 5$, onde t é o tempo transcorrido en días.

(a) **1 punto.** Estuda en que períodos se rexistrou un aumento e nos que se rexistrou unha diminución da cantidade de madeira extraída.

Exemplos de resposta / Solucións

- Determinar a primeira derivada: $M'(t) = 3t^2 - 18t + 24$ **0'25 puntos**.
- Calcular os puntos críticos: $M'(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 18t + 24 = 0 \Rightarrow t = 2$ e $t = 4$ **0'25 puntos**.
- Estudo do crecemento e do decrecemento da función:

	(0, 2)	(2, 4)	(4, 5)
t	$t = 1$	$t = 3$	$t = 4,5$
signo de $M'(t)$	$M'(1) > 0$	$M'(3) < 0$	$M'(4,5) > 0$

Concluir, respondendo aos períodos preguntados no exercicio:

“dende o instante inicial ao segundo día e dende o cuarto ao quinto día, rexistrouse un aumento da cantidade de madeira extraída” **0'25 puntos**.

“dende o segundo ao cuarto día rexistrouse unha diminución” **0'25 puntos**.

(b) **1'25 puntos**. ¿En que día ou días se extraeu a máxima cantidade de madeira?, ¿e a mínima? Calcular a cantidade máxima e mínima de metros cúbicos de madeira extraída.

– En $t = 2$, $M(t)$ presenta un máximo; $M(2) = 20$.

– En $t = 4$, $M(t)$ presenta un mínimo; $M(4) = 16$.

– Estudamos a función nos extremos do intervalo de definición: $\begin{cases} M(0) = 0 \\ M(5) = 20 \end{cases}$. Entón podemos concluir:

“No segundo e no quinto día extraeuse a máxima cantidade de madeira” **0'50 puntos (0'25 puntos por cada un dos resultados)**.

“a cantidade mínima extraeuse no instante inicial” **0'25 puntos**.

– “A cantidade máxima extraída foi 20 metros cúbicos de madeira” **0'25 puntos**.

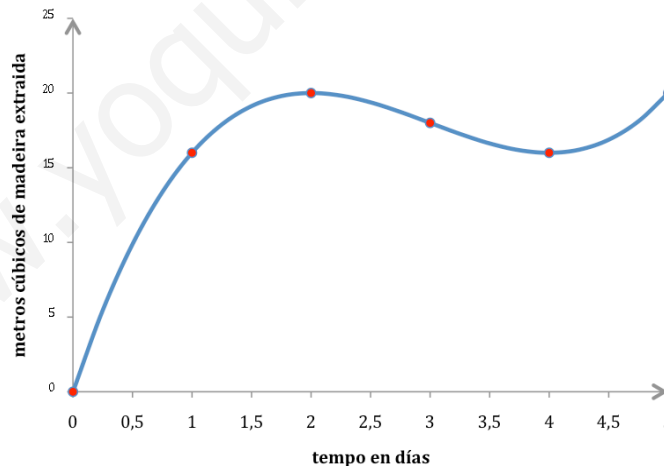
– “A cantidade mínima extraída foi 0 metros cúbicos de madeira” **0'25 puntos**.

(c) **0'75 puntos**. Representa graficamente a función $M(t)$, calculando, se os hai, os puntos de inflexión.

– O punto de inflexión preséntase no (3, 18) **0'25 puntos**.

– Representación gráfica da función **0'50 puntos**.

Recuperamos toda a información que tiñamos sobre $M(t)$ e representamos a súa gráfica



Exercicio 3. (A puntuación máxima deste exercicio é 2 puntos)

Un control de calidade é superado por catro de cada cinco artigos de pesca. Sométense ao devandito control un total de 225 artigos,

(a) **0'50 puntos**. ¿Cantos artigos de pesca se espera que superen o control de calidade?

– Definimos a variable aleatoria binomial $X =$ número de artigos de pesca “que superan” o control de calidade, en mostras de 225 artigos. $X \sim B(n = 225, p = 4/5 = 0,8)$ **0'25 puntos**.

– $E(X) = n \cdot p = 225 \cdot 0,8 = 180$. “Espérase que, en mostras de 225 artigos de pesca, 180 superen o control de calidade” **0'25 puntos**.

(b) **1'50 puntos**. ¿Cal é a probabilidade de que superen o control de calidade entre 170 e 187 (incluídos) artigos?

Exemplos de resposta / Solucións

– Formular a probabilidade pedida: $P(170 \leq X \leq 187)$ **0'25 puntos**.

– Paso da binomial á normal: $X \sim B(n = 225, p = 0'8) \Rightarrow X' \sim N(\mu = n \cdot p = 180, \sigma = \sqrt{n \cdot p(1-p)} = 6)$ **0'50 puntos**.

– Corrección de medio punto: $P(170 \leq X \leq 187) = P(169'5 < X' < 187'5)$ **0'25 puntos**.

– Tipificación:

$P(170 \leq X \leq 187) = P(169'5 < X' < 187'5) = P\left(\frac{169'5 - 180}{6} < Z < \frac{187'5 - 180}{6}\right) = P(-1'75 < Z < 1'25)$ **0'25 puntos**.

– Paso a táboas e resultado final: $P(-1'75 < Z < 1'25) = P(Z < 1'25) + P(Z < -1'75) - 1 = 0'8543$ **0'25 puntos**.

Exercicio 4. (A puntuación máxima deste exercicio é 2 puntos)

Sexa " $X =$ peso, en gramos, dun envase", $X \sim N(\mu = 500, \sigma = 4)$. Os directivos da empresa sospeitan que a maquinaria de envasado está avariada, e decidirán cambiala se o peso medio dos envases é superior a 500 gramos, é dicir se $\mu > 500$. Para iso, analizan unha mostra aleatoria de 30 envases e obteñen un peso medio de 501'5 gramos.

\bar{X} : estatístico media mostral $\xrightarrow{\text{valor particular para a mostra dada}} \bar{x} = 501'5$ (gramos)

Estatístico de proba: $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

(a) **1'50 puntos**. Formula un test para contrastar a hipótese de que non é necesario cambiar a maquinaria fronte a que si o é, tal como sospeitan os directivos, ¿a que conclusión se chega cun nivel de significación do 5%

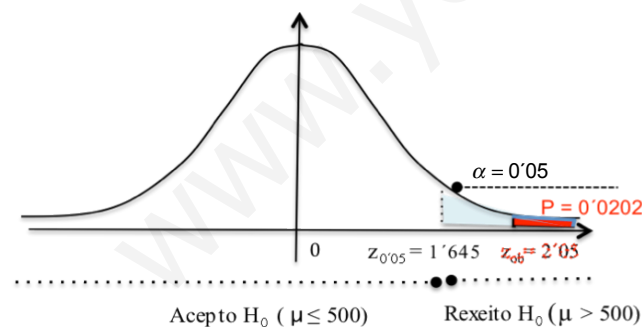
– Especificar as hipótesis nula e alternativa: $\begin{cases} H_0 : \mu \leq 500 \text{ (non é necesario cambiar a maquinaria)} \\ H_1 : \mu > 500 \text{ (si é necesario cambiar a maquinaria)} \end{cases}$ **0'50 puntos**.

puntos.

– Establecer a rexión crítica: $(1'645, +\infty)$ **0'25 puntos**.

– Avaliar o estatístico de proba, "baixo a hipótese H_0 certa", para a mostra dada:

$$z_{ob} = \frac{501'5 - 500}{4/\sqrt{30}} = 2'05 \text{ } \mathbf{0'25 \text{ puntos.}}$$



– Decisión: $z_{ob} = 2'05 \in (1'645, +\infty) \Rightarrow$ **Rexeito H_0 . 0'25 puntos**.

– Conclusión: *Cos datos desta mostra e con risco de equivocarnos dun 5%, concluíramos que o peso medio dos envases supera os 500 gramos, tal como sospeitaban os directivos, co cal decidirían cambiar a maquinaria* **0'25 puntos**. (o último risco de equivocarnos, ante esta afirmación, é o **valor-P** = $P(Z > 2'05) = 0'0202$, é dicir, aproximadamente dun 2%, sendo polo tanto o test significativo).

(b) **050 puntos**. Explica o tipo de erro que cometerían se decidisen erroneamente non cambiar a maquinaria.

– Erro tipo II = Aceptar H_0 , sendo H_0 falsa **0'25 puntos**.

– Decidirían non cambiar a maquinaria, sendo o peso medio dos envases superior aos 500 gramos **0'25 puntos**.

Exemplos de resposta / Solucións

OPCIÓN B

Exercicio 1. (A puntuación máxima deste exercicio é 3 puntos)

Sexa a función $f(x,y) = -0,8x + 1,5y$ suxeita ás restricións: $x + y \leq 10$; $x + 2y \geq 8$; $2 \leq y \leq x + 6$; $x \leq 6$.

(a) **2'50 puntos.** Representa a rexión R do plano determinado polo conxunto de restricións e calcula os seus vértices.

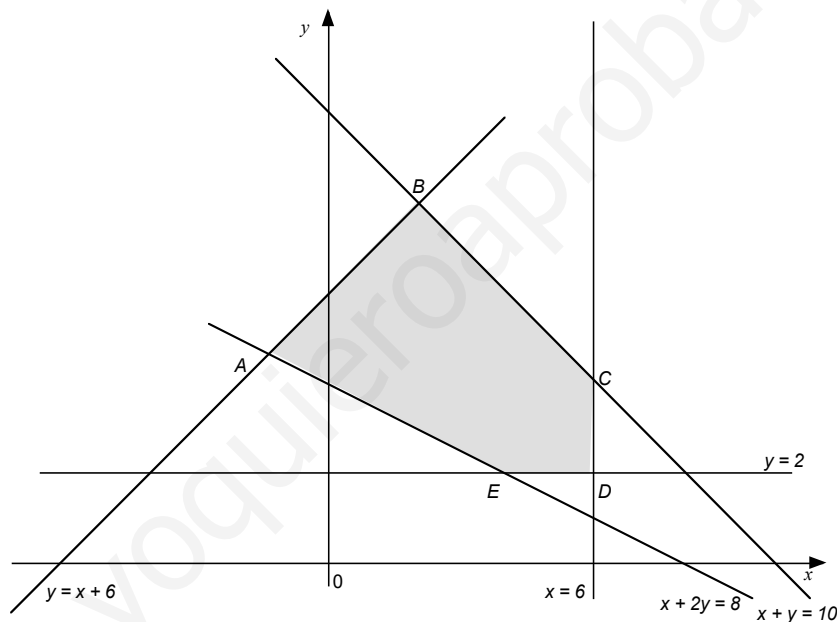
– Vértices da rexión factible **1'25 puntos**, polos vértices: $A(-4/3, 14/3)$; $B(2, 8)$; $C(6, 4)$; $D(6, 2)$; $E(4, 2)$ **0'25 puntos** por cada un deles.

– Representación gráfica da rexión factible (por debuxar as rectas e a rexión do plano limitada por elas e os cinco vértices) **1'25 puntos**:

(b) **0'50 puntos.** Calcula os puntos de R onde a función alcanza os seus valores máximo e mínimo.

– A función obxectivo alcanza o *valor máximo* no punto $B(2, 8)$ **0'25 puntos**.

– A función obxectivo alcanza o *valor mínimo* no punto $D(6, 2)$ **0'25 puntos**.



Exercicio 2. (A puntuación máxima deste exercicio é 3 puntos)

O prezo de venda (en euros) dun artigo deportivo dende o momento inicial da súa comercialización

axústase á función $P(t) = \begin{cases} -\frac{1}{5}t^2 + 4t + 80, & 0 \leq t < 15 \\ 87 + \frac{32}{t-11}, & t \geq 15 \end{cases}$, onde t é o tempo transcorrido en meses.

(a) **0'50 puntos.** ¿Cal é o prezo inicial do artigo? ¿E despois de transcorridos 15 meses?

– Prezo inicial do artigo = $P(0) = 80$ euros **0'25 puntos**.

– Prezo despois de transcorridos 15 meses = $P(15) = 95$ euros **0'25 puntos**.

(b) **2 puntos.** Estuda en que meses se produce un aumento e nos que se produce unha diminución do prezo do artigo. ¿Cal é o prezo máximo que alcanza o artigo? ¿E o prezo mínimo?

– Determinar a primeira derivada en cada un dos anacos da función:

No intervalo $(0, 15)$, $P'(t) = -\frac{2}{5}t + 4$ **0'25 puntos**. No $(15, +\infty)$, $P'(t) = -\frac{32}{(t-11)^2}$ **0'25 puntos**.

– Determinar os intervalos de crecemento e de decrecemento da función:

No intervalo $(0, 15)$ $P'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 10$ punto crítico

Exemplos de resposta / Solucións

	(0, 10)	(10, 15)
t	$t = 5$	$t = 12$
signo de $P'(t)$	$P'(5) > 0$	$P'(12) < 0$

No intervalo $(15, +\infty)$ $P'(t) < 0$, xa que a función $P'(t) = -\frac{32}{(t-11)^2}$ é menor que 0 para todo t .

- No $(0, 10)$, $P(t)$ é crecente **0'25 puntos**. No $(10, 15)$, $P(t)$ é decrecente **0'25 puntos**.
- No $(15, +\infty)$ $P(t)$ é decrecente **0'25 puntos**.

– Responder á pregunta, en que momento se produce un aumento e unha diminución do prezo do artigo: “Prodúcese un aumento do prezo nos dez primeiros meses da súa comercialización e a partir do décimo mes o prezo do artigo diminúe” **0'25 puntos**.

– O prezo máximo que alcanza o artigo: $P(10) = 100$ euros **0'25 puntos**.

– O prezo mínimo que alcanza o artigo: $P(0) = 80$ euros **0'25 puntos**.

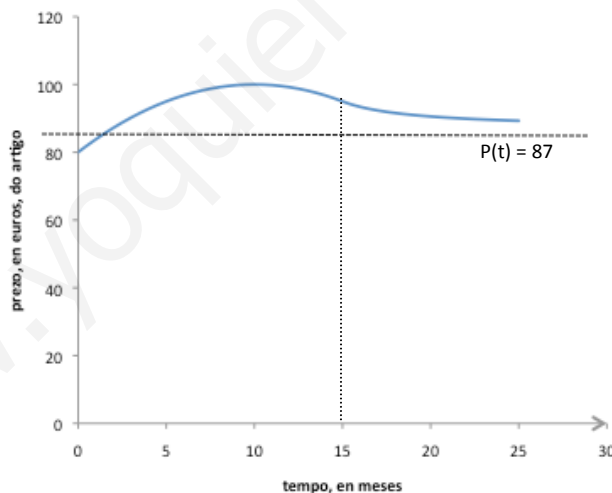
(c) **0'50 puntos**. Despois de transcorridos 15 meses, ¿habera algún mes no que o prezo sexa inferior a 85 euros? Razona a resposta.

Pódese responder de distintas formas:

- Así: $87 + \frac{32}{t-11} < 85$ é imposible, xa que $t > 15$, **0'25 puntos**. “logo despois de transcorridos 15 meses, o prezo non será nunca inferior a 85 euros” **0'25 puntos**.
- Ou tamén así: $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(87 + \frac{32}{t-11} \right) = 87$ **0'25 puntos**.

$P(t) = 87$ é asíntota horizontal; partindo de $t \geq 15$, $P(15) = 95$, a función vai decrecendo e tendendo a 87, logo o prezo non será inferior a 85 euros **0'25 puntos**.

- Tamén se podería facer un esbozo da gráfica da función $P(t)$ e chegaríase ao mesmo resultado



Exercicio 3. (A puntuación máxima deste exercicio é 2 puntos)

Unha fábrica produce CDs en dúas quendas. A primeira quenda produce 2000 discos diarios e a segunda quenda produce 3000. Pola experiencia pasada, sábese que na primeira quenda e na segunda quenda prodúcense 1% e 2% de discos defectuosos, respectivamente. Ao final do día seleccionouse ao azar un disco da produción total.

(a) **1 punto**. Determina a probabilidade de que o CD sexa defectuoso.

Denominamos aos sucesos “A”: o CD prodúcese na primeira quenda, “B”: o CD prodúcese na segunda quenda e “D”: o CD é defectuoso.

Os datos que recolleemos do enunciado son: $P(A) = 2/5$; $P(B) = 3/5$; $P(D/A) = 0'01$; $P(D/B) = 0'02$

– Formular a probabilidade pedida: $P(D)$ **0'25 puntos**.

– Utilizar o teorema das probabilidades totais e substituír os valores de cada probabilidade na fórmula anterior: $P(D) = P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) = 0'4 \cdot 0'01 + 0'6 \cdot 0'02$ **0'50 puntos**.

– Resultado $P(D) = 0'016$ **0'25 puntos**.

Exemplos de resposta / Solucións

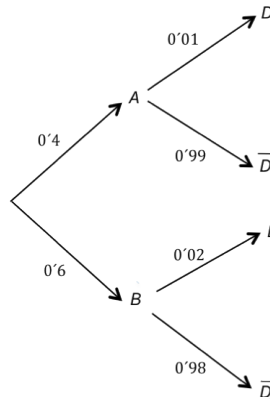
(b) **1 punto.** Se o CD non é defectuoso, calcula a probabilidade de que proveña da primeira quenda.

– Formular a probabilidade pedida $P(A/\bar{D})$ **0'25 puntos.**

– Expresión da probabilidade condicionada anterior $P(A/\bar{D}) = \frac{P(A \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{P(A) \cdot P(\bar{D}/A)}{1 - P(D)}$ **0'25 puntos.**

– Substituir os valores de cada probabilidade e resultado final $P(A/\bar{D}) = \frac{0'4 \cdot 0'99}{1 - 0'016} = 0'402$ **0'50 puntos.**

Tamén podemos facer o exercicio construíndo o diagrama de árbore, nese caso, a árbore ben feito puntúase con **0'50 puntos** e os apartados (a) e (b) con **0'75 puntos** cada un deles.



Exercicio 4. (A puntuación máxima deste exercicio é 2 puntos)

Un estudo sobre o hábito de fumar entre os habitantes adultos dunha cidade informa que o intervalo da proporción de fumadores se estima entre un 30% e un 40%.

(a) **0'50 puntos.** Determina a proporción mostral de fumadores observada, segundo o devandito estudo

Sexan

" p : proporción de fumadores entre os habitantes adultos da cidade (parámetro poboacional)

\hat{P} : proporción mostral de fumadores (entre habitantes adultos), en mostras de tamaño n (estimador puntual de " p ")

↓

$\hat{p} = x/n$ (estimación puntual de p)

•

$$\left. \begin{aligned} \hat{p} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} &= 0'30 \\ \hat{p} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} &= 0'40 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{p} = \frac{0'30 + 0'40}{2} = 0'35$$

• A proporción mostral de fumadores no estudo dado é do 35%. **0'50 puntos.**

(b) **1'50 puntos.** O estudo engade que os datos obtéñenos dunha enquisa aleatoria realizada a 364 habitantes adultos da cidade, ¿cal é entón o nivel de confianza do devandito intervalo de estimación da proporción de fumadores?

– Identificar o radio do intervalo co valor numérico que lle corresponde:

$$z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{0'35 \cdot 0'65}{364}} = 0'05 \quad \mathbf{0'50 \text{ puntos.}}$$

– Obter $z_{\alpha/2} = 2$ **0'25 puntos.**

– Uso da táboa e obter o valor de $1 - \alpha/2 = 0'9772$ **0'25 puntos.**

– Obter o valor de $\alpha = 0'0456$ **0'25 puntos.**

– Por último, obter o nivel de confianza $1 - \alpha = 0'9544$. "Cun 95'44% de confianza, estimamos que a proporción de fumadores entre os habitantes adultos da cidade está entre un 30% e un 40%, en base aos datos obtidos coa enquisa feita a 364 habitantes adultos da cidade" **0'25 puntos.**

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

O/A alumno/a debe responder só aos exercicios dunha das dúas opcións (A ou B)

OPCIÓN A

Exercicio 1. (A puntuación máxima deste exercicio é 3 puntos)

O dono dunha tenda de fotografía desexa comercializar dous tipos de cámaras de fotos A e B cun prezo de venda ao público de 210 e 300 euros a unidade, respectivamente. Para a compra de ambos os dous tipos dispón dun máximo de 2760 euros e fará o pedido a un almacén que lle cobra 120 euros por cada cámara do tipo A e 180 euros por cada cámara do B. O dono fará o pedido coa condición de que: polo menos 3 cámaras sexan do tipo A, entre 4 e 12 sexan do B e o número de cámaras do tipo A non debe superar en máis de tres unidades ao número de cámaras do tipo B.

(a) **2'50 puntos.** Formula o sistema de inecuacións asociado ao problema. Representa a rexión factible, calcula os seus vértices.

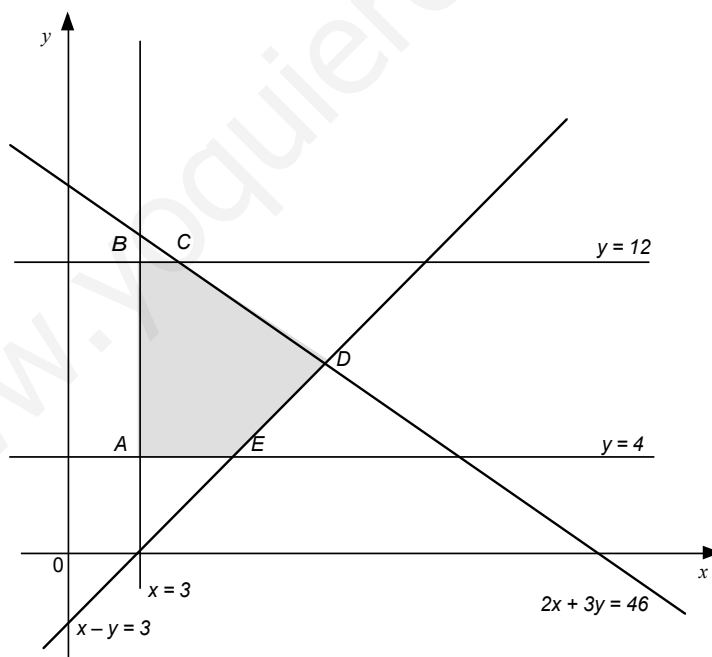
Sexan x o número de cámaras do tipo A e y o número de cámaras do tipo B.

– Formular o sistema de inecuacións

$120x + 180y \leq 2760$	0'25 puntos
$x \geq 3$	0'25 puntos
$4 \leq y \leq 12$	0'25 puntos
$x \leq y + 3$	0'25 puntos

– Vértices da rexión factible A (3, 4) e B (3, 12) **0'25 puntos**, C (5, 12) **0'25 puntos**, D (11, 8) **0'25 puntos**, E (7, 4) **0'25 puntos**.

– Representación gráfica da rexión factible (debuxar as rectas e a rexión do plano limitada por elas e os cinco vértices) **0'50 puntos**



(b) **0'50 puntos.** ¿Cantas cámaras de cada tipo deberá adquirir para que os beneficios obtidos sexan máximos?

– Función beneficio a maximizar: $f(x, y) = (210 - 120)x + (300 - 180)y = 90x + 120y$ **0'25 puntos**.

– Solución óptima: "Deberá adquirir 11 cámaras do tipo A e 8 cámaras do tipo B para que os beneficios obtidos sexan máximos" **0'25 puntos**.

Exemplos de resposta / Solucións

Exercicio 2. (A puntuación máxima deste exercicio é 3 puntos)

Sexa a función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

(a) **1'50 puntos.** Calcula a , b , c e d , sabendo que a función presenta os seus extremos relativos nos puntos $(0, 0)$, e $(1, 1)$.

- $f(x)$ pasa polo $(0, 0)$: $f(0) = 0 \Rightarrow d = 0$ **0'25 puntos.** Calculamos a derivada de $f(x)$, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.
- Por ter un extremo no punto $(0, 0)$: $f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$ **0'25 puntos.**
- Por ter un extremo no punto $(1, 1)$: $f'(1) = 0 \Rightarrow 3a + 2b = 0$ **0'25 puntos.**
- $f(x)$ pasa polo $(1, 1)$: $f(1) = 1 \Rightarrow a + b = 1$ **0'25 puntos.**
- Resolvemos o sistema anterior, obtendo $a = -2$ **0'25 puntos** e $b = 3$ **0'25 puntos.**

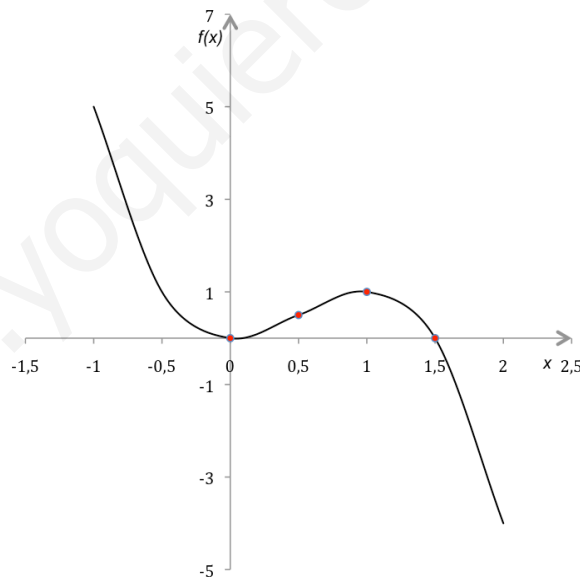
(b) **0'50 puntos.** Determina qué tipo de extremos relativos son cada un dos puntos anteriores.

Substituíndo na función $f(x)$ os valores de a , b , c e d obtidos no apartado anterior, resulta: $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ e derivando $f'(x) = -6x^2 + 6x$, $f''(x) = -12x + 6$

- Para $x = 0$; $f''(0) = 6 > 0 \Rightarrow "x = 0$ é un mínimo" **0'25 puntos.** $(0, 0)$ é un mínimo relativo.
- Para $x = 1$; $f''(1) = -6 < 0 \Rightarrow "x = 1$ é un máximo" **0'25 puntos.** $(1, 1)$ é un máximo relativo.

(c) **1 punto.** Representa a gráfica da función, determinando os puntos de corte cos eixes e o punto de inflexión.

- Puntos de corte cos eixes: $(0, 0)$ e $(3/2, 0)$ **0'25 puntos.**
- Punto de inflexión: $(1/2, 1/2)$ **0'25 puntos.**
- Representación gráfica da función **0'50 puntos.**



Exercicio 3. (A puntuación máxima deste exercicio é 2 puntos)

Estímase que un tercio das empresas nun sector da economía, terán un aumento nas súas ganancias trimestrais. Declara un dividendo un 60% das empresas que teñen aumento e un 10% das que non o teñen.

(a) **1'25 puntos.** ¿Que porcentaxe das empresas que declaren un dividendo terán un aumento nas súas ganancias trimestrais?

- Denominamos aos sucesos "A": unha empresa terá aumento nas súas ganancias trimestrais e "D": unha empresa declara un dividendo

Os datos que nos dan son: $P(A) = 1/3$, $P(D/A) = 0'6$, $P(D/\bar{A}) = 0'1$

- Formular a probabilidade $P(A/D)$ **0'25 puntos.**
- Expresión da probabilidade anterior e identificar cada unha das probabilidades da fórmula e cálculos

Exemplos de resposta / Solucións

$$\frac{P(A) \cdot P(D/A)}{P(A) \cdot P(D/A) + P(\bar{A}) \cdot P(D/\bar{A})} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0'6}{\frac{1}{3} \cdot 0'6 + \frac{2}{3} \cdot 0'1} = \frac{0'75}{0'25 \text{ puntos}}$$

– Responder á pregunta da porcentaxe pedida “O 75% das empresas que declaren un dividendo, terán un aumento nas súas ganancias trimestrais” **0'25 puntos**.

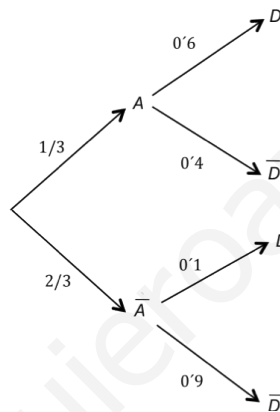
(b) **0'75 puntos**. ¿Que porcentaxe de empresas nin teñen aumento nas súas ganancias nin declaran un dividendo?

– Formulación da probabilidade $P(\bar{A} \cap \bar{D})$ **0'25 puntos**.

– Expresión da probabilidade anterior e resultado $P(\bar{A} \cap \bar{D}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{D}/\bar{A}) = \frac{2}{3} \cdot 0'9 = 0'6$ **0'25 puntos**.

– Responder á porcentaxe pedida “O 60% das empresas nin teñen aumento nin declaran un dividendo” **0'25 puntos**.

Tamén podemos facer o exercicio construíndo o diagrama de árbore, nese caso, a árbore ben feito puntúase con **0'75 puntos**, sumándolle **0'50 puntos** do apartado (a) e o resto do apartado (b).



Exercicio 4. (A puntuación máxima deste exercicio é 2 puntos)

En certo país, a renda anual familiar = X_P , segue unha distribución normal de media 16260 euros e desviación típica 6320 euros, é dicir $X_P \sim N(\mu_P = 16260 \text{ euros}, \sigma = 6320 \text{ euros})$.

Un estudo realizado con 200 familias eleixidas ao azar nunha comarca proporcionou unha renda media de 15308 euros. Definimos

“ $X =$ renda anual familiar, en euros, dunha familia da comarca”, $X \sim N(\mu, \sigma = 6320)$.

\bar{X} : estatístico media mostral $\xrightarrow{\text{valor particular para a mostra dada}}$ $\bar{x} = 15308$ (euros)

Estatístico de proba $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

(a) **0'75 puntos**. Calcula un intervalo de confianza do 95% para a renda media anual das familias da comarca.

– Expresión do intervalo de confianza: $P\left(\underbrace{\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{L_1} \leq \mu \leq \underbrace{\bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{L_2}\right) = 1 - \alpha$. **0'25 puntos**.

– Calcular numericamente os extremos do intervalo, avaliando para a mostra dada os estatísticos L_1 e L_2 , de

$L_1 \xrightarrow{\text{avaliámos para a mostra dada}}$ $15308 - 1'96 \frac{6320}{\sqrt{200}} = 15308 - 875'9 = 14432'1$ **0'25 puntos**

forma que, $L_2 \xrightarrow{\text{avaliámos para a mostra dada}}$ $15308 + 1'96 \frac{6320}{\sqrt{200}} = 15308 + 875'9 = 16183'9$ **0'25 puntos**

“Cun 95% de confianza, estímase que a renda media anual das familias da comarca, está entre 14432'1 euros e 16183'9 euros”

Exemplos de resposta / Solucións

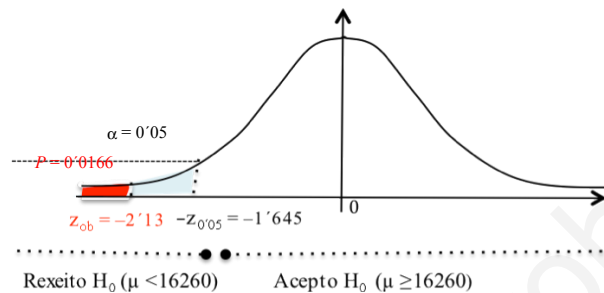
(b) **1'25 puntos.** Formula un test para contrastar a hipótese de que a renda media anual das familias da comarca é a mesma, fronte a hipótese de que é menor que a global para todo o país. ¿Cal é a conclusión á que se chega, cun nivel de significación do 5%? ¿Chegaríase á mesma conclusión se o nivel é do 1%?

– Especificar as hipótesis nula e alternativa: $\begin{cases} H_0 : \mu \geq 16260 \\ H_1 : \mu < 16260 \end{cases}$ **0'25 puntos.**

– Establecer a rexión crítica: $(-\infty, -1'645)$ **0'25 puntos.**

– Avaliar o estatístico de proba, “baixo a hipótese H_0 certa”, para a mostra dada:

$$z_{ob} = \frac{15308 - 16260}{6320/\sqrt{200}} = -2'13 \quad \mathbf{0'25 \text{ puntos.}}$$



– Decisión: $z_{ob} = -2'13 \in (-\infty, -1'645) \Rightarrow$ *Rexeito H_0 .*

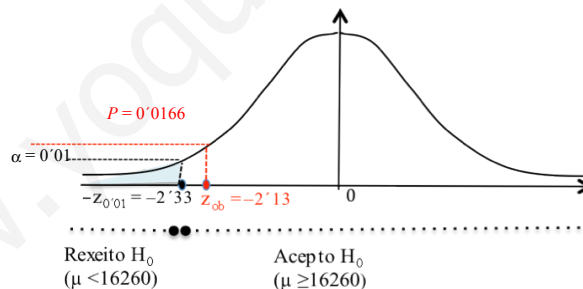
– Conclusión: “cos datos da mostra e con risco de equivocarnos dun 5%, concluíriamos que a media da comarca é menor que a media global para todo o país” **0'25 puntos.**

(o último risco de equivocarnos, ante esta afirmación, é o **valor-P** = $P(Z < -2'13) = 0'0166$, é dicir, dun 1'6%, máis baixo que o erro do 5% de partida).

– Conclusión para o 1% de nivel de significación:

– Rexión crítica $(-\infty, -2'33)$; $z_{ob} = -2'13 \in (-2'33, +\infty) \Rightarrow$ *Acepto H_0 ,*

“Con risco de equivocarnos dun 1%, non poderíamos asegurar que a media da comarca fose menor que a global do país” **0'25 puntos.**



OPCIÓN B

Exercicio 1. (A puntuación máxima deste exercicio é 3 puntos)

(a) **1'50 puntos.** Calcula as matrices X e Y que verifican o sistema

$$3X + 2Y = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}; \quad X - 5Y = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -12 & -4 \end{pmatrix}.$$

– Multiplicando a segunda matriz, $X - 5Y$, por -3 e sumando o resultado obtido coa primeira, $3X + 2Y$, resulta:

$$17 \cdot Y = \begin{pmatrix} 17 & 0 \\ 34 & 17 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{0'75 \text{ puntos.}} \quad X = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -12 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{0'75 \text{ puntos.}}$$

(b) **1'50 puntos.** Calcula a matriz inversa de $X \cdot Y$

Exemplos de resposta / Solucións

Calcular a matriz $X \cdot Y = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **0'50 puntos.**

– Cálculo da matriz inversa, $(X \cdot Y)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **1 punto.**

Exercicio 2. (A puntuación máxima deste exercicio é 3 puntos)

O número de nacementos anuais (en centos) que se producen nunha cidade a partir do ano 2000 vén dado pola función

$$N(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}t^2 - 3t + 15, & 0 \leq t < 8 \\ 10 - \frac{6}{t-6}, & t \geq 8 \end{cases}, \quad t \text{ é o tempo transcorrido en anos } (t = 0 \text{ corresponde ao ano 2000}).$$

(a) **0'25 puntos.** ¿Cantos nacementos se produciron no ano 2000?

– $N(0) = 15$; “No ano 2000 producíronse 1500 nacementos” **0'25 puntos.**

(b) **2 puntos.** Estuda entre que anos se produciu un decrecemento da natalidade. Determina en que ano se produciu o menor número de nacementos e cal foi ese número.

– Determinar a primeira derivada en cada un dos anacos da función:

No intervalo $(0, 8)$, $N'(t) = \frac{1}{2}t - 3$ **0'25 puntos.** No $(8, +\infty)$, $N'(t) = \frac{6}{(t-6)^2}$ **0'50 puntos.**

– Estudo do decrecemento da función:

No intervalo $(0, 8)$ $N'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 6$ punto crítico

t	$(0, 6)$ $t = 1$	$(6, 8)$ $t = 7$
signo de $N'(t)$	$N'(1) < 0$	$N'(7) > 0$

No intervalo $(8, +\infty)$ $N'(t) > 0$, xa que a función $N'(t) = \frac{6}{(t-6)^2}$ é maior que 0 para todo t .

- No $(0, 6)$, $N(t)$ é decrecente **0'25 puntos.**
- Dende o ano 2000 ata o 2006 produciuse un decrecemento da natalidade **0'25 puntos.**
- Non hai decrecemento dende o ano 2006 **0'25 puntos.**

– Ano no que se produciu o menor número de nacementos, en $t = 6$ $N(t)$ é mínimo **0'25 puntos.**

– Número mínimo de nacementos: “O menor número de nacementos produciuse no 2006 e foron 600 nacementos” **0'25 puntos.**

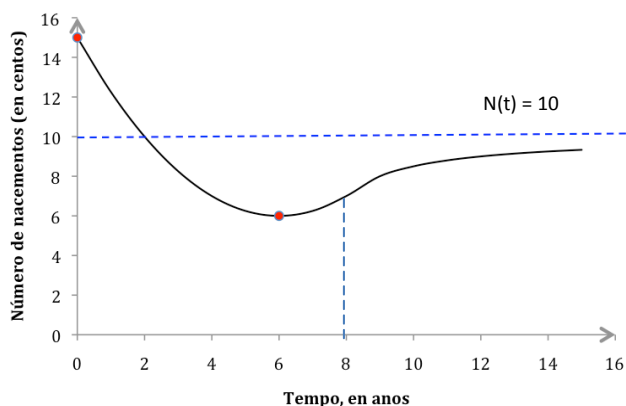
(c) **0'75 puntos.** ¿Cal é a tendencia do número de nacementos no futuro? Razona a resposta.

Pódese responder de distintas formas:

- Así: $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(10 - \frac{6}{t-6}\right) = 10$ **0'50 puntos.**

Polo tanto, a tendencia é de 1000 nacementos **0'25 puntos.**

- Tamén se podería facer un esbozo da gráfica da función $N(t)$ e chegaríase ao mesmo resultado



Exemplos de resposta / Solucións

Exercicio 3. (A puntuación máxima deste exercicio é 2 puntos)

Un estudo realizado por unha entidade bancaria informa que o 60% dos seus clientes ten un préstamo hipotecario, o 50% ten un préstamo persoal e o 40% dos que teñen un préstamo persoal tamén ten un préstamo hipotecario.

(a) **1 punto:** *Calcula a porcentaxe de clientes que teñen ambos os dous tipos de préstamos.*

Denominamos aos sucesos "H": *un cliente ten un préstamo hipotecario*, "A": *un cliente ten un préstamo persoal*.

Os datos que recolleemos do enunciado son: $P(H) = 0.6$; $P(A) = 0.5$; $P(H/A) = 0.4$

– Formular a probabilidade pedida $P(A \cap H)$ **0.25 puntos**.

– Expresión e cálculos na probabilidade anterior, identificando as probabilidades do enunciado

$$P(A \cap H) = P(A) \cdot P(H/A) = \underbrace{0.5}_{0.25 \text{ puntos}} \cdot \underbrace{0.4}_{0.25 \text{ puntos}} = 0.2$$

– Expresión da porcentaxe pedida "O 20% dos clientes teñen ambos os dous tipos de préstamos" **0.25 puntos**.

(b) **1 punto.** *Calcula a porcentaxe de clientes que non teñen ningún dos dous tipos de préstamos.*

– Formular a probabilidade pedida $P(\bar{A} \cap \bar{H})$ **0.25 puntos**.

– Expresión e cálculos na probabilidade anterior $P(\bar{A} \cap \bar{H}) = 1 - P(A \cup H) = 1 - (\underbrace{0.5}_{0.25 \text{ puntos}} + \underbrace{0.6}_{0.25 \text{ puntos}} - 0.2) = 0.1$

– Resultado pedido "O 10% dos clientes non teñen ningún dos dous tipos de préstamos" **0.25 puntos**.

Tamén podemos facer o exercicio construíndo a táboa, pero para elo, é imprescindible ter o resultado do apartado (a). A táboa puntúase entón para o apartado (b) con **0.50 puntos**, formular o enunciado **0.25 puntos** e expresión da porcentaxe **0.25 puntos**.

	A	\bar{A}	
H	20 (a)	40	60
\bar{H}	30	10	40
	50	50	100

Exercicio 4. (A puntuación máxima deste exercicio é 2 puntos)

Nun estudo sobre hixiene dental, a porcentaxe de nenos que presentaron indicios de carie utilizando un dentífrico tradicional foi de, polo menos, o 10%. Nun grupo de 500 nenos elixidos aleatoriamente que utilizaron un novo dentífrico, presentaron indicios de carie 35 deles.

(a) **1.25 puntos.** *Formula un test para contrastar a hipótese de que a proporción de nenos con indicios de carie usando o novo dentífrico é a mesma que co tradicional fronte a hipótese de que se reduce. ¿A que conclusión se chega cun nivel de significación do 5%?*

Sexan

"p": *proporción de nenos con indicios de carie usando o novo dentífrico (parámetro poboacional)*

\hat{p} : *proporción de nenos con indicios de carie (co novo dentífrico), en mostras de 500 nenos (estimador puntual de "p")*

↓ *avaliamos para a mostra dada*

$$\hat{p} = \frac{35}{500} = 0.07 \text{ (estimación puntual de } p \text{)}$$

– Especificar as hipóteses nula e alternativa: $\begin{cases} H_0 : p \geq 0.10 \\ H_1 : p < 0.10 \end{cases}$ **0.25 puntos**.

Exemplos de resposta / Solucións

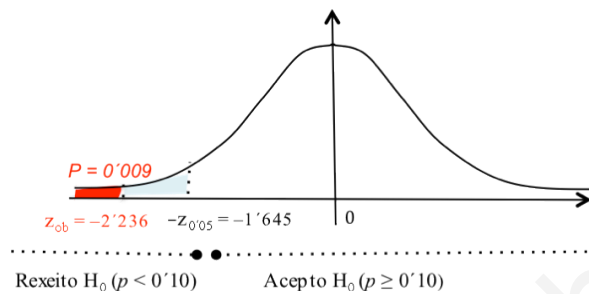
– Estatístico de proba: $\frac{\hat{P} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0,1)$

– Establecer a rexión crítica: $(-\infty, -1'645)$ **0'25 puntos.**

– Avaliar o estatístico de proba, “baixo H_0 certa”, para a mostra dada:

$$z_{ob} = \frac{0'07 - 0'1}{\sqrt{\frac{0'1 \cdot 0'9}{500}}} = -2'236 \quad \mathbf{0'25 \text{ puntos.}}$$

– Decisión: $z_{ob} = -2'236 \in (-\infty, -1'645) \Rightarrow \text{Rexeito } H_0$ **0'25 puntos.**



– Conclusión sobre se se reduce (ou non) a carie usando o novo dentífrico:

“Cun risco de equivocarnos dun 5%, concluíramos que, en base á mostra dada, o novo dentífrico reduce a carie dental, con respecto ao tradicional” **0'25 puntos.** (O último risco de equivocarnos, ante esta afirmación, é o **valor-P** = $P(Z < -2'236) = 0'009$, é dicir, dun 0'9%).

(b) **0'75 puntos.** Calcula un intervalo do 95% de confianza para a proporción de nenos con indicios de carie utilizando o novo dentífrico.

– Expresión do intervalo de confianza: $P \left(\underbrace{\hat{P} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}_{L_1} \leq p \leq \underbrace{\hat{P} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}_{L_2} \right) = 1 - \alpha$ **0'25 puntos.**

– Calculamos numericamente os extremos do intervalo avaliando, para a mostra dada, os estatísticos L_1 e L_2 , de tal forma que o parámetro “ p ” descoñecido estimámolo polo seu estimador puntual coñecido \hat{p} ,

$$L_1 \xrightarrow{\text{avallamos para a mostra dada}} 0'07 - 1'96 \sqrt{\frac{0'07 \cdot 0'93}{500}} = 0'07 - 0'022 = 0'048 \quad \mathbf{0'25 \text{ puntos}}$$

$$L_2 \xrightarrow{\text{avallamos para a mostra dada}} 0'07 + 1'96 \sqrt{\frac{0'07 \cdot 0'93}{500}} = 0'07 + 0'022 = 0'092 \quad \mathbf{0'25 \text{ puntos}}$$

– Responder á pregunta no contexto do problema, concluíndo que: “en base a mostra dada, estímase cun 95% de confianza, que a proporción nenos con carie, usando o novo dentífrico, está entre un 4'8% e un 9'2% (erro máximo cometido na estimación dun 2'2%)”