

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

(Responder só aos exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1 = 3 puntos, exercicio 2 = 3 puntos, exercicio 3 = 2 puntos, exercicio 4 = 2 puntos)

OPCIÓN A

1) Decidimos investir unha cantidade de 15000 euros en bolsa, comprando accións de tres entidades A , B e C . Investimos en A o dobre que en B e en C xuntas. Transcorrido un ano, as accións da entidade A revalorizáronse un 3%, as de B un 4% e as de C perderon un 2% e, como consecuencia, obtivemos un beneficio de 380 euros. Determina canto investimos en cada unha das entidades.

2) A ganancia producida por unha máquina que durou 6 anos estímase pola función $f(x) = ax^3 + bx^2$, $0 \leq x \leq 6$.

($f(x)$ representa a ganancia (en miles de euros) aos x anos de funcionamento, a e b son constantes)

(a) Determina o valor de a e b , se se sabe que a función $f(x)$ ten un punto de inflexión no punto $(2, 32)$.

(b) Se $a = -2$ e $b = 12$, calcula o ano no que a máquina produciu a maior ganancia, ¿cal foi o valor da devandita ganancia? Para estes valores, representa a gráfica da función $f(x)$ en $[0, 6]$.

3) Trátase contra unha determinada enfermidade ao 40% das árbores dunha parcela. Sábese que enferman o 5% das árbores tratadas e o 30% das non tratadas contra a enfermidade.

(a) Calcula a probabilidade de que non enferme unha árbore calquera da parcela.

(b) Supoñamos que un 80% das árbores non están enfermas e que na parcela hai 625 árbores, ¿cal é a probabilidade de que máis de 475 árbores desta parcela non estean enfermas?

4) Suponse que o número de telespectadores (en millóns) dun programa semanal de televisión, aproxímase a unha distribución normal, con desviación típica de 0,5 (millóns). A dirección do programa afirma que a media semanal de telespectadores que ven o citado programa é de, polo menos, 7 millóns. Para contrastar tal afirmación, obsérvase unha mostra de 10 semanas, obténdose unha media semanal de 6,54 millóns de telespectadores.

(a) Utilizando a mostra dada, calcula un intervalo do 95% de confianza para a media semanal de telespectadores dese programa.

(b) Formula un test para contrastar que a media semanal de telespectadores que ven o programa é a que afirma a dirección, fronte á alternativa de que é menor, ¿cal é a conclusión á que se chega, cun nivel de significación do 5%?

OPCIÓN B

1) Consideremos o seguinte sistema de inecuacións $x \geq 1$, $y \geq x$, $x + y \leq 10$, $3y - 2x \leq 10$.

(a) Representa graficamente a rexión factible e calcula os seus vértices.

(b) ¿En que punto ou puntos desa rexión alcanza os valores máximo e mínimo a función $f(x, y) = 2x - 2y + 7$?

2) Nun ámbito controlado, o tamaño dunha poboación de aves, $P(t)$ (en centos), axústase á función

$$P(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 50, & 0 \leq t \leq 10 \\ 95 - \frac{250}{t}, & t > 10 \end{cases}, \text{ onde } t \text{ é o tempo transcorrido en anos.}$$

(a) ¿A partir de que ano crecerá a poboación $P(t)$? ¿Nalgún ano a poboación é mínima?

(b) Determina o valor ao que tende a poboación de aves co paso do tempo.

(c) Calcula o intervalo de tempo no que a poboación se mantén entre 5000 e 7500 aves.

3) O 40% dos aspirantes a un posto de traballo superou unha determinada proba de selección. Terminan sendo contratados o 80% dos aspirantes que superan esa proba e o 5% dos que non a superan.

(a) Calcula a porcentaxe de aspirantes ao posto de traballo que terminan sendo contratados.

(b) Se un aspirante non é contratado, ¿cal é a probabilidade de que superase a proba de selección?

4) Realízase unha enquisa para determinar a intención de voto ao partido político MLM. Dos 2000 entrevistados, 600 din que votarán ao MLM.

(a) Calcula un intervalo do 95% de confianza para a proporción de futuros votantes a favor dese partido.

(b) Unha información publicada por certa prensa afirma que "a intención de voto para ese partido é de, polo menos, o 33%". Formula un test para contrastar a devandita afirmación fronte a que a proporción de futuros votantes é inferior, tal como parece prognosticar a enquisa. ¿A que conclusión se chega, cun nivel de significación do 1%?

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

(Responder só aos exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1 = 3 puntos, exercicio 2 = 3 puntos, exercicio 3 = 2 puntos, exercicio 4 = 2 puntos)

OPCIÓN A

1) (a) Determina a matriz X sabendo que $X^{-1} \cdot B^t = A + B$, sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, B^t a matriz trasposta de B e X^{-1} a matriz inversa de X .

(b) Dada $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$, calcula, se o hai, algún valor de "a" para o que se verifique que A^2 sexa a matriz identidade.

2) A cantidade de auga (en centos de litros) que chega a unha depuradora para o seu procesado ao longo de certo día, vén estimada pola función $C(t) = -2t^3 + 75t^2 - 600t + 2000$, $0 \leq t \leq 24$, onde t é o tempo en horas transcorrido a partir das 0:00 horas.

- Determina en que períodos se produce un aumento e unha diminución da cantidade de auga.
- Calcula a cantidade máxima e mínima de auga.
- Calcula o punto de inflexión e representa a gráfica da función $C(t)$, $0 \leq t \leq 24$.

3) Sábese que en certa poboación de persoas de 18 ou máis anos, o 60% está en contra da eutanasia.

- Realízase unha enquisa a unha mostra aleatoria de 150 persoas desa poboación, ¿cal é a probabilidade de que máis da metade se manifeste en contra da eutanasia?
- Se nesa poboación o 68% son maiores de 65 anos e o 75% deles está en contra da eutanasia, ¿que porcentaxe dos que teñen entre 18 e 65 anos está en contra da eutanasia?

4) O tempo de espera para a realización de certa proba médica nun hospital segue unha distribución normal con desviación típica de 5 días. A xerencia afirma que "o tempo medio de espera para a realización da devandita proba é como máximo de 20 días". Para contrastar esa afirmación tomouse unha mostra aleatoria de 100 pacientes que precisaban facerse a proba, resultando que o tempo medio de espera foi de 21 días.

- Formula un test para contrastar a hipótese que afirma a xerencia fronte a que o tempo medio foi superior. ¿A que conclusión se chega cun nivel de significación do 5%? ¿Chegaríase á mesma conclusión cun nivel de significación do 1%?
- Explica, no contexto do problema, en que consisten os erros de tipo I e de tipo II.

OPCIÓN B

1) Considérase a función $f(x, y) = x + 2y$ suxeita ás restricións: $x + y \leq 9$; $y - x \leq 5$; $2y \geq 4 - x$; $0 \leq x \leq 6$; $y \geq 0$

- Representa a rexión R do plano determinada polo conxunto de restricións e calcula os seus vértices.
- Calcula os puntos de R onde a función alcanza os seus valores máximo e mínimo. Calcula eses valores.
- Responde ao apartado anterior se se elimina a restrición $y \geq 0$ do anterior conxunto de restricións.

2) Nunha empresa a relación entre a produción x (expresada en miles de toneladas) e o custo medio de fabricación

$C(x)$ (expresado en miles de euros) é do tipo $C(x) = 2 + x + \frac{9}{x}$, $1 \leq x \leq 10$.

- Calcula a cantidade de produción que minimiza o custo medio de fabricación e o custo medio mínimo.
- Calcula a cantidade de produción que maximiza o custo medio de fabricación e o custo medio máximo.
- Se non desexan superar os 12 mil euros de custo medio de fabricación ¿entre que valores deberá estar comprendida a produción?

3) A probabilidade de obter rendibilidade positiva no prazo dun ano cun fondo de investimento recentemente constituído é 0'4. Se no primeiro ano se obtivo rendibilidade positiva, a probabilidade de obtela no segundo ano é 0'6. A probabilidade de non obter rendibilidade positiva nin no primeiro nin no segundo ano é 0'48.

- ¿Que probabilidade hai de obter rendibilidade positiva no segundo ano?
- Calcula a probabilidade de obter rendibilidade positiva nalgún dos dous anos.

4) (a) Quérese estimar a porcentaxe de españois que, tendo dereito a voto, non votarán nas próximas eleccións ao Parlamento Europeo. ¿Cal debe ser o tamaño da mostra para garantir unha marxe de erro non superior ao 2'5% cun nivel do 95% de confianza?

(b) Selecciónase unha mostra aleatoria de 1540 españois con dereito a voto e deles 693 aseguran que non votarán nas próximas eleccións ao Parlamento Europeo. Calcula un intervalo do 95% de confianza para a porcentaxe de españois con dereito a voto que non votarán nas citadas eleccións. ¿Que erro máximo se está a cometer nesta estimación?

Criterios de Avaliación / Corrección

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

EXERCICIO 1 (3 puntos)

- Formular o sistema: **1'50 puntos**.
- Resolución: **1'50 puntos**.

EXERCICIO 2 (3 puntos)

(a) **1'25 puntos:**

- Chegar a formular o sistema de dúas ecuacións coas dúas incógnitas "a" e "b": **0'75 puntos**.
- Resolver o sistema, obtendo "a" e "b": **0'50 puntos**.

(b) **1'75 puntos:**

- Por calcular os puntos críticos: **0'25 puntos**.
- Por determinar o máximo: **0'25 puntos**.
- Comprobar que é máximo absoluto: **0'25 puntos**.
- Polo valor da ganancia máxima: **0'25 puntos**.
- Por reflexar na gráfica o punto de inflexión: **0'25 puntos**.
- Representación gráfica: **0'50 puntos**.

EXERCICIO 3 (2 puntos)

(a) **0'75 puntos:**

- Expresar o teorema das probabilidades totais e identificar cada unha das probabilidades da fórmula anterior: **0'50 puntos**.
- Resultado final: **0'25 puntos**.

(b) **1'25 puntos:**

- Formular a probabilidade pedida: **0'25 puntos**.
- Paso da binomial a normal: **0'50 puntos**.
- Corrección de medio punto: **0'25 puntos**.
- Tipificación e resultado: **0'25 puntos**.

EXERCICIO 4 (2 puntos)

(a) **1 punto:**

- Expresión do intervalo de confianza: **0'25 puntos**.
- Calcular numericamente os extremos do intervalo: **0'50 puntos**.
- Responder á pregunta no contexto do problema: **0'25 puntos**.

(b) **1 punto:**

- Especificar as hipóteses nula e alternativa: **0'25 puntos**.
- Establecer a rexión crítica: **0'25 puntos**.
- Avaliar o estatístico de contraste para a mostra dada: **0'25 puntos**.
- Conclusión: **0'25 puntos**.

OPCIÓN B

EXERCICIO 1 (3 puntos)

(a) **2 puntos:**

- Vértices da rexión factible: **1 punto**.
- Representación gráfica da rexión factible: **1 punto** (por debuxar as rectas e a rexión do plano limitada por elas e os catro vértices).

(b) **1 punto:**

- Puntos da rexión nos que a función obxectivo alcanza o valor máximo: **0'75 puntos**.
- Punto da rexión no que alcanza o valor mínimo: **0'25 puntos**.

EXERCICIO 2 (3 puntos)

(a) **1'25 puntos:**

- Determinar a primeira derivada en cada un dos anacos da función: **0'75 puntos**.
- Responder á pregunta: ano a partir do que crece a poboación: **0'25 puntos**.
- Ano no que a poboación é mínima: **0'25 puntos**.

- (b) **0'75 puntos:**
- Calcular o límite da función: **0'50 puntos.**
 - Por determinar o valor ao que tende a poboación de aves co paso do tempo: **0'25 puntos.**
- (c) **1 punto:**
- Solución no primeiro anaco: **0'50 puntos.**
 - Solución no segundo anaco: **0'50 puntos.**

EXERCICIO 3 (2 puntos)

- (a) **1 punto:**
- Aplicar o teorema das probabilidades totais: **0'50 puntos.**
 - Cálculos e resultado final: **0'50 puntos.**
- (b) **1 punto:**
- Formulación da probabilidade pedida: **0'25 puntos.**
 - Expresión da probabilidade condicionada anterior: **0'25 puntos.**
 - Cálculos e resultado final: **0'50 puntos.**

EXERCICIO 4 (2 puntos)

- (a) **1 punto:**
- Expresión do intervalo de confianza: **0'25 puntos.**
 - Calcular numericamente os extremos do intervalo: **0'50 puntos.**
 - Responder á pregunta no contexto do problema: **0'25 puntos.**
- (b) **1 punto:**
- Especificar as hipóteses nula e alternativa: **0'25 puntos.**
 - Establecer a rexión crítica: **0'25 puntos.**
 - Avaliar o estatístico de contraste para a mostra dada: **0'25 puntos.**
 - Conclusión: **0'25 puntos.**

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

EXERCICIO 1 (3 puntos)

- (a) **2 puntos:**
- Despejar a matriz X : **0'50 puntos.**
 - Calcular a suma das matrices A e B : **0'25 puntos.**
 - Calcular a matriz inversa de $A+B$: **0'75 puntos.**
 - Obter a matriz X : **0'50 puntos.**
- (b) **1 punto:**
- Calcular a matriz A^2 : **0'25 puntos.**
 - Formular a igualdade pedida: **0'25 puntos.**
 - Resolver para calcular o valor de a : **0'50 puntos.**

EXERCICIO 2 (3 puntos)

- (a) **1'75 puntos:**
- Determinar a primeira derivada: **0'25 puntos.**
 - Calcular os puntos críticos: **0'25 puntos.**
 - Determinar os intervalos de crecemento e de decrecemento: **0'75 puntos.**
 - Determinar os periodos de tempo pedidos: **0'50 puntos.**
- (b) **0'50 puntos:**
- Cantidade máxima e mínima de auga: **0'25 puntos** por cada unha delas.
- (c) **0'75 puntos:**
- Calcular o punto de inflexión: **0'25 puntos.**
 - Representación gráfica da función: **0'50 puntos.**

EXERCICIO 3 (2 puntos)

- (a) **1'25 puntos:**
- Formular a probabilidade pedida: **0'25 puntos.**
 - Paso da binomial á normal: **0'50 puntos.**
 - Corrección de medio punto: **0'25 puntos.**
 - Tipificación e resultado final: **0'25 puntos.**
- (b) **0'75 puntos:**
- Resolver, ben coa definición da probabilidade condicionada ou co cadro de continxencia ou coa árbore: **0'75 puntos.**

EXERCICIO 4 (2 puntos)

(a) **1'50 puntos:**

- Especificar as hipóteses nula e alternativa: **0'25 puntos.**
- Establecer a rexión crítica: **0'25 puntos.**
- Avaliar o estatístico de contraste para a mostra dada: **0'25 puntos.**
- Conclusión para o nivel de significación do 5%: **0'25 puntos.**
- Rexión crítica e conclusión para o nivel do 1%: **0'50 puntos.**

(b) **0'50 puntos:**

- Explicar, no contexto do problema, en que consisten os erros de tipo I e de tipo II: **0'25 puntos** por cada un deles.

OPCIÓN B

EXERCICIO 1 (3 puntos)

(a) **1'5 puntos:**

- Vértices da rexión factible: **1 punto (0'50 puntos** polos catro que intersecan aos eixes de coordenadas máis **0'50 puntos** polos outros dous).
- Representación gráfica da rexión factible: **0'50 puntos** (por debuxar as rectas e a rexión do plano limitada por elas e os correspondentes vértices).

(b) **0'75 puntos:**

- Punto da rexión no que a función obxectivo alcanza o valor máximo e valor máximo: **0'25 puntos.**
- Puntos da rexión nos que alcanza o valor mínimo e valor mínimo: **0'50 puntos.**

(c) **0'75 puntos:**

- Sinalar a nova rexión factible co novo vértice: **0'25 puntos.**
- Punto da nova rexión no que a función obxectivo alcanza o valor máximo: **0'25 puntos.**
- Puntos da nova rexión nos que alcanza o valor mínimo: **0'25 puntos.**

EXERCICIO 2 (3 puntos)

(a) **1'50 puntos:**

- Determinar a primeira derivada: **0'25 puntos.**
- Calcular os puntos críticos: **0'25 puntos.**
- Xustificar que é un punto mínimo: **0'25 puntos.**
- Cantidade de produción que minimiza o custo medio: **0'25 puntos.**
- Valor mínimo da función: **0'25 puntos.**
- Polo custo medio mínimo: **0'25 puntos.**

(b) **0'50 puntos:**

- Cantidade que maximiza o custo medio de fabricación: **0'25 puntos.**
- Custo medio máximo: **0'25 puntos.**

(c) **1 punto:**

- Resolver a inecuación: **0'75 puntos.**
- Responder entre que valores estará comprendida a produción: **0'25 puntos.**

EXERCICIO 3 (2 puntos)

(a) **1'25 puntos:**

- Calcular a probabilidade de obter rendibilidade positiva no primeiro e no segundo ano: **0'50 puntos.**
- Obter a probabilidade pedida, utilizando ou o cadro de continxencia, ou a árbore e o teorema das probabilidade totais: **0'75 puntos.**

(b) **0'75 puntos:**

- Formular a probabilidade pedida: **0'25 puntos.**
- Expresión da probabilidade da unión anterior: **0'25 puntos.**
- Cálculos e resultado final: **0'25 puntos.**

EXERCICIO 4 (2 puntos)

(a) **1 punto:**

- Formulación: **0'25 puntos.**
- Cálculo de n : **0'50 puntos.**
- Expresión do valor (e valores) enteiro de n : **0'25 puntos**

(b) **1 punto:**

- Expresión do intervalo de confianza: **0'25 puntos.**
- Calcular numericamente os extremos do intervalo: **0'50 puntos.**
- Erro máximo que se está a cometer nesta estimación: **0'25 puntos.**

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

O/A alumno/a debe responder só aos exercicios dunha das dúas opcións (A ou B)

OPCIÓN A

Exercicio 1. (A puntuación máxima deste exercicio é 3 puntos)

– Formular o sistema
$$\begin{cases} x + y + z = 15000 \\ x = 2(y + z) \\ \frac{3}{100}x + \frac{4}{100}y - \frac{2}{100}z = 380 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 15000 \\ x - 2y - 2z = 0 \\ 3x + 4y - 2z = 38000 \end{cases} \quad \mathbf{1'50 \text{ puntos.}}$$

sendo x a cantidade investida na entidade A, y a cantidade investida na B e z na C (0'50 puntos por cada unha das tres ecuacións)

– Resolución (por calquera método) $x = 10000$, $y = 3000$, $z = 2000$.

“Investimos 10000 euros na entidade A 0'50 puntos, 3000 na entidade B 0'50 puntos e 2000 na entidade C” 0'50 puntos.

Exercicio 2. (A puntuación máxima deste exercicio é 3 puntos)

A ganancia producida por unha máquina estímase pola función $f(x) = ax^3 + bx^2$, $0 \leq x \leq 6$ ($f(x)$ representa a ganancia (en miles de euros) aos x anos de funcionamento, a e b son constantes)

(a) 1'25 puntos: Determina o valor de “ a ” e “ b ”, se se sabe que a función ten un punto de inflexión no punto (2,32)

– Determinar a primeira e segunda derivada: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx$; $f''(x) = 6ax + 2b$ 0'25 puntos.

– Pola condición de punto de inflexión no punto $x = 2$: $f''(2) = 0 \Leftrightarrow 12a + 2b = 0$ 0'25 puntos.

– Pola condición de que $f(x)$ pasa polo punto (2, 32) $f(2) = 32 \Leftrightarrow 8a + 4b = 32$ 0'25 puntos.

– Resolver o sistema $\begin{cases} 6a + b = 0 \\ 2a + b = 8 \end{cases}$ obtendo o valor $a = -2$ 0'25 puntos e $b = 12$ 0'25 puntos.

(b) 1'75 puntos: Calcula o ano no que a máquina produciu a maior ganancia, ¿cal foi o valor da devandita ganancia? Representa a gráfica da función $f(x)$ en $[0, 6]$

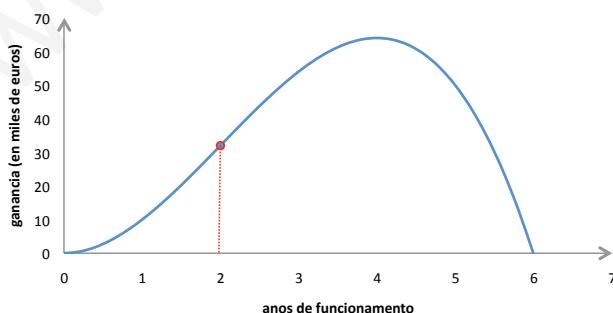
– Polos puntos críticos: $f'(x) = -6x^2 + 24x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(24 - 6x) = 0 \Rightarrow x = 0$ y $x = 4$ 0'25 puntos.

– Determinar o máximo: $f''(x) = -12x + 24$, $f''(0) = 24 > 0$; $f''(4) = -24 < 0$ 0'25 puntos, deducíndose que en $x = 4$ a función presenta un máximo e é absoluto xa que $f(0) = 0$ e $f(6) = 0$ 0'25 puntos, é dicir, “no cuarto ano de funcionamento a máquina produce a ganancia máxima”.

– “A ganancia máxima ascendeu a 64000 euros” 0'25 puntos.

– Representación gráfica da función 0'50 puntos., reflexando o punto de inflexión: 0'25 puntos.

Recuperando a información que tiñamos sobre $f(x)$, os puntos de corte co eixe x son (0, 0) e (6, 0). No punto (4, 64) hai un máximo, no punto (0, 0) un mínimo e no enunciado din que o punto (2, 32) é un punto de inflexión, o que reflexaremos na gráfica, (neste exercicio restábanse 0'25 puntos se se representaba unha parábola)



Exercicio 3. (A puntuación máxima deste exercicio é 2 puntos)

Trátase contra unha determinada enfermidade ao 40% das árbores dunha parcela. Enferman o 5% das árbores tratadas e o 30% das non tratadas

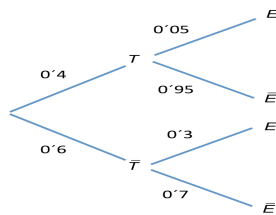
(a) 0'75 puntos: Calcula a probabilidade de que non enferme unha árbora calquera da parcela

– Definimos os sucesos, E: unha árbore enferma, T: unha árbore se trata contra a enfermidade. Os datos que nos dan son: $P(T) = 0'40$, $P(E|T) = 0'05$, $P(E|\bar{T}) = 0'30$

– Utilizar o teorema das probabilidades totais e substituir os valores de cada probabilidade na fórmula anterior:
 $P(\bar{E}) = P(T)P(\bar{E} | T) + P(\bar{T})P(\bar{E} | \bar{T}) = 0'4 \cdot 0'95 + 0'6 \cdot 0'7 = 0'8$ (**0'50 puntos** por identificar cada unha das probabilidades na fórmula anterior+ **0'25 puntos** por chegar ao resultado final).

Se se fai o diagrama de árbore, puntúase **0'25 puntos** máis **0'50 puntos** se se aplica ben a fórmula das probabilidades totais e se chega ao resultado final. Se se fai por medio de táboas, puntúase esta con **0'50 puntos** máis **0'25 puntos** polo resultado final.

	T	\bar{T}	
E	2	18	20
\bar{E}	38	42	80
	40	60	100



(b) **1'25 puntos**: Supoñamos que un 80% das árbores non están enfermas e que na parcela hai 625 árbores, ¿cal é a probabilidade de que máis de 475 árbores desta parcela non estean enfermas?

– Sexa a variable aleatoria binomial $X =$ número de árbores enfermas, en mostras de 625 árbores.
 $X \sim B(n = 625, p = 0'8)$.

– Formular a probabilidade pedida: $P(X > 475)$ **0'25 puntos**.

– Paso da binomial á normal: $X \sim B(n = 625, p = 0'8) \Rightarrow X' \sim N(\mu = np = 500, \sigma = \sqrt{np(1-p)} = 10)$ (Pasamos da variable X discreta á variable X' continua) **0'50 puntos**.

– Corrección de medio punto: $P(X > 475) = P(X' \geq 475'5)$ **0'25 puntos**.

– Tipificación e resultado final: $P(X' \geq 475'5) = P(Z \geq -2'45) = 0'9929$ **0'25 puntos**.

Exercicio 4. (A puntuación máxima deste exercicio é 2 puntos)

Sexa " $X =$ número de telespectadores (en millóns) dun programa semanal de televisión" $X \sim N(\mu, \sigma = 0'5)$. A dirección do programa afirma que a media semanal de telespectadores dese programa é de polo menos 7 millóns, é dicir, $\mu \geq 7$. Para contrastar tal afirmación, observáse unha mostra de 10 semanas, obténdose unha media semanal de 6'54 millóns de telespectadores.

\bar{X} : estatístico media mostral $\xrightarrow{\text{evaluámolo para a mostra dada}}$ $\bar{x} = 6'54$ (millóns de espectadores)

Estatístico de proba: $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

(a) **1 punto**. Utilizando a mostra dada, calcula un intervalo do 95% de confianza para a media semanal de telespectadores dese programa.

– Expresión do intervalo de confianza: $P\left(\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$ **0'25 puntos**.

– Calcular numericamente os extremos do intervalo 6'23 e 6'85 **0'50 puntos**

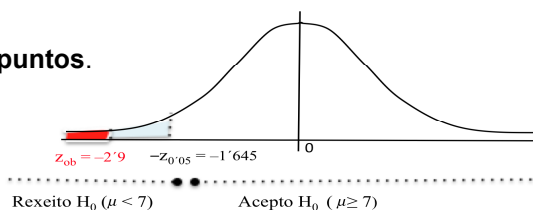
– Responder á pregunta no contexto do problema: "en base a mostra dada, estímase cun 95% de confianza, que a media semanal de telespectadores dese programa está entre 6.230.000 e 6.850.000 espectadores" **0'25 puntos**.

(b) **1 punto**. Formula un test para contrastar que a media semanal de telespectadores que ven o programa é a que afirma a dirección, fronte á alternativa de que é menor, ¿cal é a conclusión á que se chega, cun nivel de significación do 5%?

– Especificar as hipóteses nula e alternativa: $\begin{cases} H_0 : \mu \geq 7 \\ H_1 : \mu < 7 \end{cases}$ **0'25 puntos**.

– Estatístico de proba: $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

– Establecer a rexión crítica: $(-\infty, -1'645)$ **0'25 puntos**.



– Avaliar o estatístico de proba, "baixo a hipótese H_0 certa", para a mostra dada: $z_{ob} = \frac{6'54 - 7}{0'5/\sqrt{10}} = -2'9$ **0'25 puntos**.

– Decisión: $z_{ob} = -2'9 \in (-\infty, -1'645) \Rightarrow$ Rexeito H_0 . Cos datos desta mostra e con risco de equivocarnos dun 5%, concluiríamos que a media semanal de telespectadores é menor de 7 millóns, é dicir, non é a que afirma a dirección do programa **0'25 puntos**. (o último risco de equivocarnos, ante esta afirmación, é o valor-P = $P(Z < -2'9) = 0'0019$, é dicir, aproximadamente dun 0'19%, sendo polo tanto o test significativo, xa que o risco de equivocarnos non é do 5% de partida, senon moito máis baixo: dun 0'19%).

OPCIÓN B

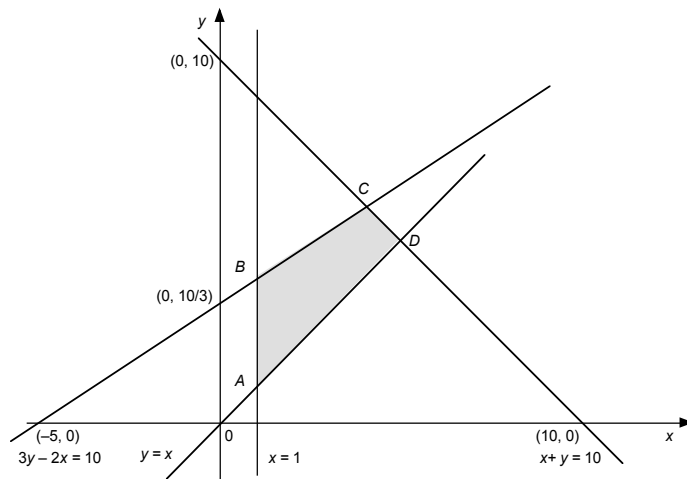
Exercicio 1. (A puntuación máxima deste exercicio é 3 puntos)

Sexa o seguinte sistema de inecuacións: $x \geq 1$, $y \geq x$, $x + y \leq 10$, $3y - 2x \leq 10$

(a) **2 puntos**: Representa graficamente a rexión factible e calcula os seus vértices.

– Vértices da rexión factible **1 punto**, polos vértices: A (1, 1); B (1, 4); C (4, 6); D (5, 5) **0'25 puntos** por cada un deles.

– Representación gráfica da rexión factible **1 punto**:



- (b) **1 punto:** Punto ou puntos desa rexión onde alcanza os valores máximo e mínimo a función $f(x,y) = 2x - 2y + 7$
- A función alcanza o mínimo no punto B (1, 4) **0'25 puntos.**
 - A función alcanza o máximo nos puntos A (1, 1) **0'25 puntos**, D (5, 5) **0'25 puntos** e nos infinitos puntos do segmento AD **0'25 puntos.**

Exercicio 2. (A puntuación máxima deste exercicio é 3 puntos)

Sexa $P(t)$ o tamaño dunha poboación de aves (en centos) nun entorno controlado

$$P(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 50, & 0 \leq t \leq 10 \\ 95 - \frac{250}{t}, & t > 10 \end{cases}$$

(a) **1'25 puntos:** ¿A partir de que ano crecerá a poboación $P(t)$? ¿Nalgún ano a poboación é mínima?

- No intervalo $(0, 10)$, $P'(t) = 2t - 8$ **0'25 puntos.** No $(10, +\infty)$, $P'(t) = \frac{250}{t^2}$ **0'50 puntos.**
- En $(0, 10)$, $P'(t) = 2t - 8 > 0 \Leftrightarrow t > 4$; en $(10, +\infty)$ $P'(t) > 0$ para todo t , é dicir, a poboación $P(t)$ crece sempre no intervalo $(10, +\infty)$ “A partir do cuarto ano crece a poboación de aves **0'25 puntos.**”
- No $(0, 10)$, $P''(t) = 2 > 0$. Polo tanto, “a poboación é mínima no cuarto ano” ($t = 4$) **0'25 puntos.**

(b) **0'75 puntos:** Determina o valor ao que tende a poboación de aves co paso do tempo

- Teremos que calcular o límite da función $P(t)$: $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(95 - \frac{250}{t} \right) = 95$ **0'50 puntos.**

– “A poboación tende a 9500 aves co paso do tempo” **0'25 puntos.**

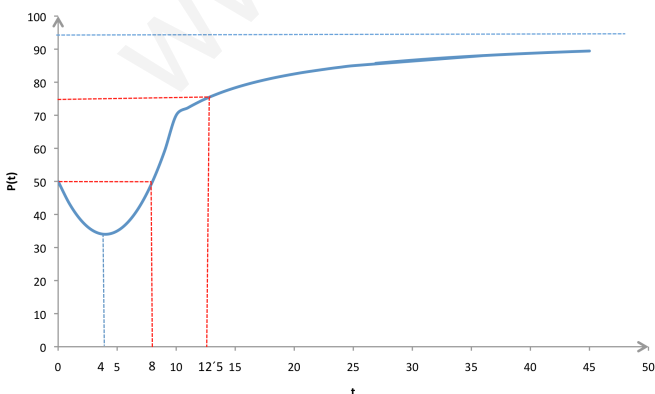
(c) **1 punto:** Calcula o intervalo de tempo no que a poboación se mantén entre 5000 e 7500 aves

- Haberá que buscar o tempo t para o que se verifica $50 \leq P(t) \leq 75$
- Primeiro buscamos o anaco que corresponde a cada desigualdade, e como para $t = 0$ $P(0) = 50$ e para $t = 10$ $P(10) = 70$, temos que no primeiro anaco:

$$[0, 10]: P(t) \geq 50 \Leftrightarrow t^2 - 8t + 50 \geq 50 \Rightarrow t(t - 8) \geq 0 \begin{cases} \text{como } t \geq 0 \\ t - 8 \geq 0 \Rightarrow t \geq 8 \end{cases} \text{ **0'50 puntos**}$$

$$\text{e no segundo } (10, +\infty): P(t) \leq 75 \Leftrightarrow 95 - \frac{250}{t} \leq 75 \Rightarrow \frac{250}{t} \geq 20 \Rightarrow t \leq 12'5 \text{ **0'50 puntos**}$$

Entón, “dende o oitavo ano ata o doce e medio, mantense a poboación entre 5000 e 7500 aves”



Ainda que non se pide a gráfica da función, poderíase trazar, xa que axuda a escoller as desigualdades nos anacos correspondentes da función.

Exercicio 3. (A puntuación máxima deste exercicio é 2 puntos)

O 40% dos aspirantes a un posto de traballo superou unha determinada proba de selección. Terminan sendo contratados o 80% dos aspirantes que superan esa proba e o 5% dos que non a superan.

(a) **1 punto:** Calcula a porcentaxe de aspirantes ao posto de traballo que terminan sendo contratados.

Denominamos aos sucesos C: un aspirante é contratado, S: un aspirante supera a proba de selección. Os datos que recolleemos do enunciado son: $P(S) = 0'4$; $P(C/S) = 0'8$; $P(C/\bar{S}) = 0'05$

– Formular a probabilidade pedida: $P(C)$ **0'25 puntos**.

– Utilizar o teorema das probabilidades totais e substituir os valores de cada probabilidade na fórmula anterior:
 $P(C) = P(S) \cdot P(C/S) + P(\bar{S}) \cdot P(C/\bar{S}) = 0'4 \cdot 0'8 + 0'6 \cdot 0'05 = 0'35$ **0'50 puntos**.

– “O 35% dos aspirantes terminan sendo contratados” **0'25 puntos**.

(b) **1 punto**: Se un aspirante non é contratado, ¿cal é a probabilidade de que superase a proba de selección?

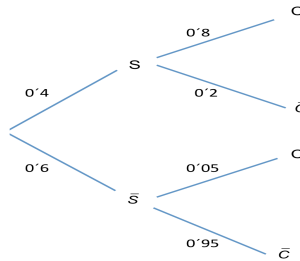
– Formular a probabilidade pedida $P(S/\bar{C})$ **0'25 puntos**.

– Expresión da probabilidade condicionada anterior $P(S/\bar{C}) = \frac{P(S \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} = \frac{P(S) \cdot P(\bar{C}/S)}{1 - P(C)}$ **0'25 puntos**.

– Substituir os valores de cada probabilidade e resultado final $P(S/\bar{C}) = \frac{0'4 \cdot 0'2}{0'65} = 0'123$ **0'50 puntos**.

Tamén podemos facer o exercicio construíndo o diagrama de árbore, nese caso, a árbore ben feito puntúase con **0'50 puntos** e os apartados (a) e (b) con **0'75 puntos** cada un deles. No caso de facer cadro valórase con **1 punto**, e os apartados (a) e (b) con **0'50 puntos** cada un deles.

	C	\bar{C}	
S	32	8	40
\bar{S}	3	57	60
	35	65	100



Exercicio 4. (A puntuación máxima deste exercicio é 2 puntos)

Realízase unha enquisa para determinar a intención de voto ao partido MLM, de 2000 entrevistados, 600 din que votarán ao MLM

Sexan “ p ”: proporción de votantes a favor do MLM (parámetro poboacional a estimar)

\hat{P} : proporción mostral de votantes a favor do MLM, en mostras de 2000 entrevistados (estatístico mostral)

↓
 avaliación de \hat{P} para a mostra dada $\hat{p} = 600/2000 = 0'3$ (estimación puntual de p)

(a) **1 punto**. Calcula un intervalo do 95% de confianza para a proporción de futuros votantes a favor dese partido.

– Expresión do intervalo de confianza: $P\left(\underbrace{\hat{P} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}_{L_1} \leq p \leq \underbrace{\hat{P} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}_{L_2}\right) = 1 - \alpha$ **0'25 puntos**.

– Calcular numericamente os extremos do intervalo, avaliando para a mostra dada os estatísticos L_1 e L_2 , de forma que, o parámetro “ p ” descoñecido estimámolo polo seu estimador puntual coñecido: \hat{p} , resultando:

$$L_1 \xrightarrow{\text{avaliámos para a mostra dada}} 0'3 - 1'96 \sqrt{\frac{0'3 \cdot 0'7}{2000}} = 0'3 - 0'02 = 0'28 \quad \mathbf{0'25 \text{ puntos}}$$

$$L_2 \xrightarrow{\text{avaliámos para a mostra dada}} 0'3 + 1'96 \sqrt{\frac{0'3 \cdot 0'7}{2000}} = 0'3 + 0'02 = 0'32 \quad \mathbf{0'25 \text{ puntos}}$$

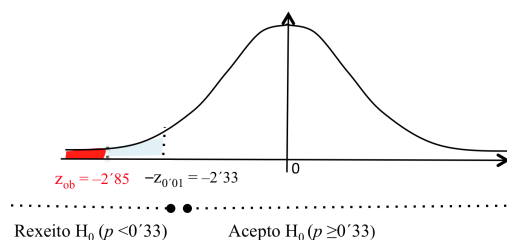
– Responder á pregunta no contexto do problema, concluíndo que: “en base a mostra dada, estímase cun 95% de confianza, que a proporción de futuros votantes do partido MLM, está entre un 28% e un 32% (erro máximo cometido na estimación dun 2%)” **0'25 puntos**.

(b) **1 punto**. Unha información publicada por certa prensa afirma que “a intención de voto para ese partido é de, polo menos, o 33%”. Formula un test para contrastar a devandita información fronte a que a proporción de futuros votantes é inferior, tal como parece prognosticar a enquisa. ¿A que conclusión se chega cun nivel de significación do 1%?

– Especificar as hipóteses nula e alternativa:

$$\begin{cases} H_0 : p \geq 0'33 \\ H_1 : p < 0'33 \end{cases} \quad \mathbf{0'25 \text{ puntos}}$$

– Estatístico de proba: $\frac{\hat{P} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0,1)$



– Establecer a rexión crítica: $z_{0'01} = 2'33, (-\infty, -2'33)$ **0'25 puntos**.

– Avaliar o estatístico de proba, “baixo H_0 certa”, para a mostra dada: $z_{ob} = \frac{0'3 - 0'33}{\sqrt{\frac{0'33 \cdot 0'67}{2000}}} = -2'85$ **0'25 puntos**.

– Decisión: $z_{ob} = -2'85 \in (-\infty, -2'33) \Rightarrow$ Rexeito H_0 . Cun risco de equivocarnos do 1%, concluíríamos que a proporción de futuros votantes ao MLM é menor do 33% que afirma a información publicada pola prensa **0'25 puntos**. (o último risco de equivocarnos, ante esta afirmación, é o valor- $P = P(Z < -2'85) = 0'0022$, é dicir, dun 0'22%, sendo polo tanto o test significativo).

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

O/A alumno/a debe responder só aos exercicios dunha das dúas opcións (A ou B)

OPCIÓN A

Exercicio 1. (A puntuación máxima deste exercicio é 3 puntos)

(a) **2 puntos:** Determina a matriz X , sabendo que $X^{-1} \cdot B^t = A + B$, sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

– Despejar a matriz X : $X = B^t (A + B)^{-1}$ **0'50 puntos.**

– Calcular a suma das matrices $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ **0'25 puntos.**

– Calcular a matriz inversa $(A + B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ **0'75 puntos.**

– Determinar $B^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **0'25 puntos**, e $X = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$ **0'25 puntos.**

(b) **1 punto:** Dada $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$, calcula se o hai, algún valor de "a" para o que se verifique que A^2 sexa a matriz identidade.

– Calcular a matriz $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ a^2 + a & 1 \end{pmatrix}$ **0'25 puntos.**

– Formular a igualdade pedida $\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ a^2 + a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **0'25 puntos.**

– Formular as ecuacións $\begin{cases} a^2 = 1 \\ a^2 + a = 0 \end{cases}$ **0'25 puntos.**

– Resolver para calcular o valor de "a", sendo a única solución posible "a = -1" **0'25 puntos.**

Exercicio 2. (A puntuación máxima deste exercicio é 3 puntos)

Sexa $C(t) = -2t^3 + 75t^2 - 600t + 2000$, $0 \leq t \leq 24$ a cantidade de auga (en centos de litros) que chega a unha depuradora para o seu procesado ao longo de certo día e t o tempo en horas transcurrido a partir das 0:00 horas.

(a) **1'75 puntos:** Determina en que períodos se produce un aumento e unha diminución da cantidade de auga.

– Determinar a primeira derivada $C'(t) = -6t^2 + 150t - 600$ **0'25 puntos.**

– Calcular os puntos críticos $C'(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 - 25t + 100 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = 20 \end{cases}$ **0'25 puntos.**

– Determinar os intervalos de crecemento e de decrecemento

	(0, 5)	(5, 20)	(20, 24)
t	$t = 1$	$t = 10$	$t = 22$
signo de $C'(t)$	$C'(1) < 0$	$C'(10) > 0$	$C'(22) < 0$

No intervalo (0, 5) e no (20, 24) a función $C(t)$ é decrecente **0'50 puntos.** No (5, 20) a función $C(t)$ é crecente **0'25 puntos.**

– Contestamos á pregunta do exercicio. "Prodúcese un aumento da cantidade de auga dende as 5:00 horas ata as 20:00 horas" **0'25 puntos.** Prodúcese unha diminución dende as 0:00 horas ata as 5:00 e dende as 20:00 ata as 24:00 horas" **0'25 puntos.**

(b) **0'50 puntos:** Calcula a cantidade máxima e mínima de auga.

– No punto $t = 5$ a función $C(t)$ presenta un mínimo. $C_{\min} = C(5) = 625$.

– No punto $t = 20$ a función $C(t)$ presenta un máximo. $C_{\max} = C(20) = 4000$.

"Cantidade mínima de auga 62.500 litros" **0'25 puntos.** "Cantidade máxima de auga 400.000 litros" **0'25 puntos.**

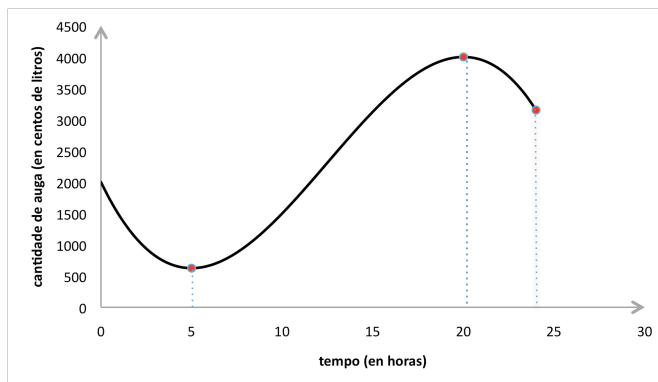
(En $t = 0$ $C(0) = 2000$ e en $t = 24$ $C(24) = 3152$. Logo os puntos 5 e 20 son mínimo e máximo absoluto, respectivamente)

(c) **0'75 puntos:** Calcula o punto de inflexión e representa a gráfica da función $C(t)$, $0 \leq t \leq 24$.

– O punto de inflexión preséntase no (12'5, 2312'5) **0'25 puntos.**

– Representación gráfica da función **0'50 puntos.**

Recuperamos toda a información que tiñamos sobre $C(t)$ e representamos a súa gráfica



Exercicio 3. (A puntuación máxima deste exercicio é 2 puntos)

Sábese que en certa poboación de persoas de 18 ou máis anos, o 60% está en contra da eutanasia.

(a) **1'25 puntos:** Realízase unha enquisa a unha mostra aleatoria de 150 persoas desa poboación, ¿cal é a probabilidade de que máis da metade se manifeste en contra da eutanasia?

– Definimos a variable aleatoria X = número de persoas de 18 ou máis anos, que están en contra da eutanasia nunha mostra aleatoria de 150 persoas desa poboación. X segue unha distribución binomial, $B(n = 150, p = 0,6)$.

– Formulamos a probabilidade pedida $P(X > 75) = P(X \geq 76)$ **0'25 puntos**.

– Paso da binomial á normal $X \sim B(150, 0,6) \Rightarrow X' \sim N(\mu = np = 90, \sigma = \sqrt{np(1-p)} = 6)$ **0,50 puntos (0,25 puntos por determinar a media e 0,25 puntos pola desviación típica. Cambiamos a variable X pola X' por ter que pasar dunha variable aleatoria discreta a unha continua, e no paso seguinte facemos a corrección de medio punto pola mesma razón).**

– Corrección de medio punto $P(X > 75) = P(X' > 75,5)$ **0'25 puntos**.

– Tipificación e resultado final $P(X' > 75,5) = P(Z > -2,42) = 0,9922$ **0'25 puntos**.

(b) **0'75 puntos:** Se nesa poboación o 68% son maiores de 65 anos e o 75% deles está en contra da eutanasia, ¿que porcentaxe dos que teñen entre 18 e 65 anos está en contra da eutanasia?

– Denominamos os sucesos e formulamos as probabilidades do enunciado do exercicio:

E_{+65} : unha persoa desa poboación é maior de 65 anos,

E_{18-65} : unha persoa desa poboación téñen entre 18 e 65 anos,

C_E : unha persoa desa poboación está en contra da eutanasia,

$P(E_{+65}) = 0,68$, $P(C_E/E_{+65}) = 0,75$, $P(C_E) = 0,60$

– Calculamos o dato que nos falta e que é imprescindible para poder determinar a probabilidade pedida por calquera dos seguintes métodos:

– $P(C_E \cap E_{+65}) = P(E_{+65}) \cdot P(C_E/E_{+65}) = 0,68 \cdot 0,75 = 0,51$ **0'25 puntos**,

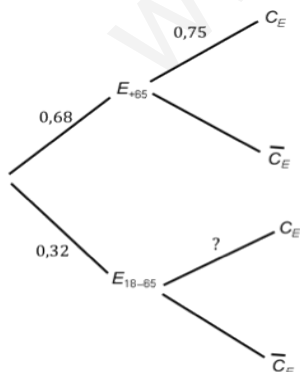
poñemos o resultado no cadro e completámolo **0'25 puntos**, e a probabilidade pedida é $P(C_E/E_{18-65}) = \frac{9}{32} = 0,2812$

0'25 puntos.

Outro método, se utilizamos a definición de probabilidade condicionada,

$$P(C_E/E_{18-65}) = \frac{P(C_E) - P(C_E \cap E_{+65})}{1 - P(E_{+65})} = \frac{0,6 - 0,51}{1 - 0,68} = 0,2812$$
 0'75 puntos.

	C_E	\bar{C}_E	
E_{+65}	51	17	68
E_{18-65}	9	23	32
	60	40	100



Por último, se usamos a árbore (pola árbore **0,25 puntos**):

– Facemos uso do teorema das probabilidades totais:

$$0,6 = 0,68 \cdot 0,75 + 0,32 \cdot P(C_E/E_{18-65})$$
 0,25 puntos.

– Despexamos $P(C_E/E_{18-65}) = \frac{0,09}{0,32} = 0,2812$ **0,25 puntos**.

“Podemos polo tanto concluir que o 28,12% dos que teñen entre 18 e 65 anos está en contra da eutanasia”

Exercicio 4. (A puntuación máxima deste exercicio é 2 puntos)

Sexa “ X = días de espera para a realización de certa proba médica nun hospital”, $X \sim N(\mu, \sigma = 5)$.

A xerencia afirma que “o tempo medio de espera para a realización da devandita proba é como máximo de 20 días, é dicir, $\mu \leq 20$. Para contrastar esa afirmación, tomouse unha mostra aleatoria de 100 pacientes que precisaban facer a proba, resultando que o tempo medio de espera foi de 21 días.

$n = 100$ pacientes

\bar{X} : estatístico media mostral \equiv tempo medio de espera en mostras de 100 pacientes

↓ evaluación do estatístico para a mostra dada → $\bar{x} = 21$ días: estimación puntual de μ

(a) **1'50 puntos**: Formula un test para contrastar a hipótese que afirma a xerencia fronte a que o tempo medio foi superior. ¿A que conclusión se chega cun nivel de significación do 5%? ¿Chegaríase á mesma conclusión cun nivel de significación do 1%?

– Especificar as hipótesis nula e alternativa: $\begin{cases} H_0 : \mu \leq 20 \\ H_1 : \mu > 20 \end{cases}$ **0'25 puntos.**

– Estatístico de proba: $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

– Establecer a rexión crítica: $(1'645, +\infty)$ **0'25 puntos.**

– Avaliar o estatístico de proba, "baixo a hipótese H_0 certa": $z_{ob} = \frac{21 - 20}{5/\sqrt{100}} = 2$ **0'25 puntos.**

– Decisión: $z_{ob} = 2 > z_{crit} = 1'645 \Rightarrow$ Rexeito H_0 . Cos datos desta mostra e con risco de equivocarnos dun 5%, concluiríamos que o tempo medio de espera para a realización da devandita proba foi superior a 20 días, é dicir, rexeitaríamos o que afirma a xerencia. **0'25 puntos.** (O último risco de equivocarnos, ante esta afirmación, é o valor-P = $P(Z > 2) = 0'0228$, é dicir, aproximadamente dun 2'3%).

– Para o nivel do 1%, establecer a rexión crítica: $(2'33, +\infty)$ **0'25 puntos.**

– Decisión: $z_{ob} = 2 < z_{crit} = 2'33 \Rightarrow$ Acepto H_0 .

Non se chegaría á mesma conclusión, xa que con risco de equivocarme dun 1% non podería rexeitar H_0 .

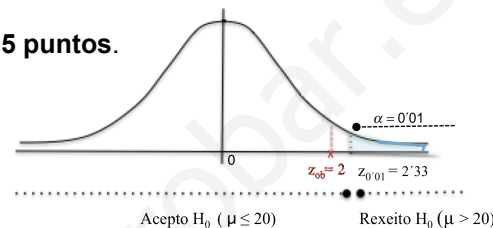
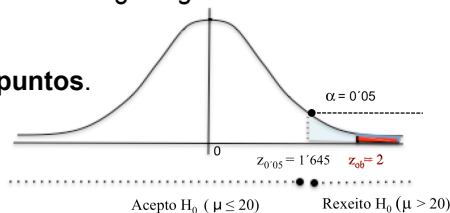
Non se pode concluir que o tempo medio é superior a 20 días.

Aceptaría a afirmación da xerencia **0'25 puntos.**

(b) **0'50 puntos**: Explica, no contexto do problema, en que consisten os erros de tipo I e de tipo II.

– $\alpha = P(\text{Rechazar } H_0 / H_0 \text{ certa}) \equiv P(\text{Aceptar } H_1 / H_1 \text{ falsa})$. O erro de tipo I consiste en rexeitar a hipótese que afirma a xerencia, cando realmente é certa. Decidiríamos que o tempo medio de espera é superior a 20 días cando realmente non o é **0'25 puntos.**

– $\beta = P(\text{Aceptar } H_0 / H_0 \text{ falsa}) \equiv P(\text{Rechazar } H_1 / H_1 \text{ certa})$. O erro de tipo II consiste en aceptar a hipótese que afirma a xerencia, cando realmente é falsa. Decidiríamos que o tempo medio de espera é como máximo de 20 días, cando realmente non o é **0'25 puntos.**



OPCIÓN B

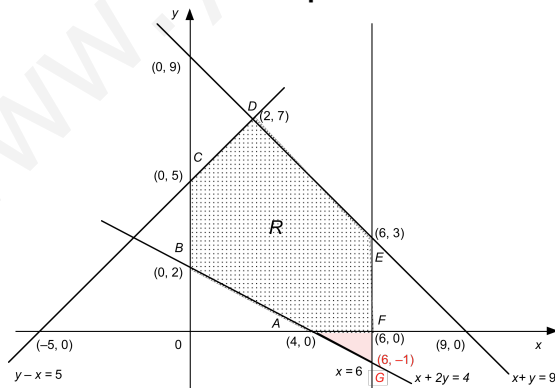
Exercicio 1. (A puntuación máxima deste exercicio é 3 puntos)

Sexa a función $f(x, y) = x + 2y$ suxeita ás restricións: $x + y \leq 9$, $y - x \leq 5$, $2y \geq 4 - x$, $0 \leq x \leq 6$, $y \geq 0$.

(a) **1'50 puntos**: Representa a rexión R do plano determinada polo conxunto de restricións e calcula os seus vértices.

– Vértices da rexión factible **1 punto** repartido en: A (4, 0) e B (0, 2) **0'25 puntos**; C (0, 5) e F (6, 0) **0'25 puntos**; D (2, 7) **0'25 puntos** e por E (6, 3) **0'25 puntos**.

– Representación gráfica da rexión factible **0'50 puntos**:



(b) **0'75 puntos**: Calcula os puntos de R onde a función alcanza os seus valores máximo e mínimo. Calcula eses valores.

– A función alcanza o máximo no vértice D (2, 7). Valor máximo = 16 **0'25 puntos.**

– A función alcanza o mínimo nos vértices A (4, 0), B (0, 2) **0'25 puntos**, e nos infinitos puntos do segmento AB. Valor mínimo = 4 **0'25 puntos.**

(c) **0'75 puntos**: Responde ao apartado anterior se se elimina a restrición $y \geq 0$ do anterior conxunto de restricións.

– Sinalar a nova rexión factible calculando o novo vértice G (6, -1) (rexión do plano limitada polos vértices GBCDE) **0'25 puntos.**

– A función alcanza o máximo no vértice D (2, 7). Valor máximo = 16 **0'25 puntos.**

– A función alcanza o mínimo nos vértices G (6, -1), B (0, 2), e nos infinitos puntos do segmento GB. Valor mínimo = 4 **0'25 puntos.**

Exercicio 2. (A puntuación máxima deste exercicio é 3 puntos)

Nunha empresa a relación entre a produción x (expresada en miles de toneladas) e o custo medio de fabricación $C(x)$ (expresado en miles de euros) é do tipo $C(x) = 2 + x + \frac{9}{x}$, $1 \leq x \leq 10$

(a) **1'50 puntos:** *Calcula a cantidade de produción que minimiza o custo medio de fabricación e o custo medio mínimo.*

– Determinar a primeira derivada $C'(x) = 1 - \frac{9}{x^2}$ **0'25 puntos.**

– Calcular os puntos críticos $C'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ $x = -3$ non válido **0'25 puntos.**

– Xustificar que en $x = 3$ hai un mínimo, calculando $C''(x) = \frac{18}{x^3}$; $C''(3) > 0$ **0'25 puntos.**

– Cantidade de produción que minimiza o custo medio: “para 3000 toneladas de produción o custo medio é mínimo” **0'25 puntos.**

– Valor mínimo da función: $C_{\min} = C(3) = 8$ **0'25 puntos.**

Polo custo medio mínimo: “O custo mínimo é 8000 euros” **0'25 puntos.**

(Observar que hai que responder ás preguntas do exercicio, expresándoas nas correspondentes unidades, xa que noutro caso se acabaría restando 0'50 puntos neste apartado).

(b) **0'50 puntos:** *Calcula a cantidade de produción que maximiza o custo medio de fabricación e o custo medio máximo.*

– Cantidade que maximiza o custo medio de fabricación: $C(1)=12$, $C(10) = 12'9$ e a función é continua, logo “para 10.000 toneladas de produción o custo medio é máximo” **0'25 puntos.**

– Custo medio máximo: “é de 12.900 euros” **0'25 puntos.**

(c) **1 punto:** *Se non desexan superar os 12 mil euros de custo medio de fabricación ¿entre que valores deberá estar comprendida a produción?*

– Formulamos a desigualdade, é dicir, buscamos o valor (ou valores) de x para o que se verifica:

$C(x) \leq 12 \Leftrightarrow 2 + x + \frac{9}{x} \leq 12$ **0'25 puntos.**

– Operamos na desigualdade anterior: $x^2 - 10x + 9 \leq 0$ **0'25 puntos.**

– Resolvemos a inecuación: $1 \leq x \leq 9$ **0'25 puntos.**

– Respondemos á pregunta do exercicio: “Para non superar os 12.000 euros de custo medio de fabricación, a produción ten que estar comprendida entre 1.000 e 9.000 toneladas” **0'25 puntos.**

Exercicio 3. (A puntuación máxima deste exercicio é 2 puntos)

A probabilidade de obter rendibilidade positiva no prazo dun ano cun fondo de investimento recentemente constituído é 0'4. Se no primeiro ano se obtivo rendibilidade positiva, a probabilidade de obtela no segundo ano é 0'6. A probabilidade de non obter rendibilidade positiva nin no primeiro nin no segundo ano é 0'48.

(a) **1'25 puntos:** *¿Que probabilidade hai de obter rendibilidade positiva no segundo ano?*

Denominamos aos sucesos R_1^+ : obter rendibilidade positiva no primeiro ano, R_2^+ : obter rendibilidade positiva no segundo ano.

Os datos que recolleemos do enunciado son: $P(R_1^+) = 0'4$, $P(R_2^+/R_1^+) = 0'6$, $P(\bar{R}_1^+ \cap \bar{R}_2^+) = 0'48$

– Se o facemos usando a táboa de continxencia, calculamos, en primeiro lugar, a probabilidade de obter rendibilidade positiva no primeiro e no segundo ano:

$P(R_1^+ \cap R_2^+) = P(R_1^+) \cdot P(R_2^+/R_1^+) = 0'4 \cdot 0'6 = 0'24$ **0'50 puntos.**

Completamos a táboa: **0'50 puntos**

– A probabilidade pedida é $P(R_2^+) = 0'36$ **0'25 puntos.**

	R_2^+	\bar{R}_2^+	
R_1^+	24	16	40
\bar{R}_1^+	12	48	60
	36	64	100

– Se o facemos utilizando o teorema das probabilidades totais, primeiro temos que calcular:

$P(\bar{R}_2^+/\bar{R}_1^+) = \frac{P(\bar{R}_1^+ \cap \bar{R}_2^+)}{P(\bar{R}_1^+)} = \frac{0,48}{0,6} = 0,8$ **0'50 puntos.** Logo, $P(R_2^+/\bar{R}_1^+) = 1 - 0,8 = 0,2$ **0'25 puntos.**

$P(R_2^+) = P(R_1^+) \cdot P(R_2^+/R_1^+) + P(\bar{R}_1^+) \cdot P(R_2^+/\bar{R}_1^+)$ **0'25 puntos.**

$P(R_2^+) = 0,4 \cdot 0,6 + 0,6 \cdot 0,2 = 0,36$ **0'25 puntos.**

– Se o facemos construíndo o diagrama de árbore: **0'75 puntos** e chegar ao resultado pedido **0'50 puntos**

(b) **0,75 puntos:** *Calcula a probabilidade de obter rendibilidade positiva nalgún dos dous anos.*

– Formular a probabilidade pedida $P(R_1^+ \cup R_2^+)$ **0'25 puntos.**

– Expresión da probabilidade da unión: $P(R_1^+ \cup R_2^+) = P(R_1^+) + P(R_2^+) - P(R_1^+ \cap R_2^+)$ **0'25 puntos.**

– Cálculos e resultado final $P(R_1^+ \cup R_2^+) = 0,4 + 0,36 - 0,24 = 0,52$ **0'25 puntos.**

Este exercicio pódese facer tamén utilizando as leis de Morgan.

Exercicio 4. (A puntuación máxima deste exercicio é 2 puntos)

(a) **1 punto.** *Quérese estimar a porcentaxe de españois que, tendo dereito a voto, non votarán nas próximas eleccións ao Parlamento Europeo. ¿Cal debe ser o tamaño da mostra para garantir unha marxe de erro non superior ao 2,5% cun nivel do 95% de confianza?*

Sexan " p : proporción de españois con dereito a voto que "non votarán" nas próximas eleccións ao Parlamento Europeo (parámetro poboacional a estimar)

\hat{P} : proporción mostral de españois con dereito a voto que "non votarán" nas próximas eleccións ao Parlamento Europeo, en mostras de tamaño " n " (estatístico mostral, estimador puntual de p)

O estatístico a utilizar é $\frac{\hat{P} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \sim N(0,1)$. Como non coñecemos unha estimación puntual previa de " p ", tomamos o

caso máis desfavorable para " p ", $p = 1/2$, (xa que a función $f(p) = p(1-p)$ se maximiza para $p = 1/2$).

– Formulamos a marxe de erro non superior ao 2,5%: $z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq 0,025$ **0'25 puntos.**

– Substituímos na fórmula: $1,96 \cdot \sqrt{\frac{1/4}{n}} \leq 0,025$ **0'25 puntos.**

– Despexamos " n ": $n \geq 1536,64$ **0'25 puntos.**

– Concluimos, coa expresión do valor (e valores) enteiro de n : "Para garantir ese erro, con ese nivel de confianza, necesitamos mostras de 1537 ou máis españois con dereito a voto" **0'25 puntos.**

(b) **1 punto.** *Selecciónase unha mostra aleatoria de 1540 españois con dereito a voto e deles 693 aseguran que non votarán nas próximas eleccións ao Parlamento Europeo. Calcula un intervalo do 95% de confianza para a porcentaxe de españois con dereito a voto que non votarán nas citadas eleccións. ¿Que erro máximo se está a cometer nesta estimación?*

– Expresión do intervalo de confianza: $P \left(\underbrace{\hat{P} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}_{L_1} \leq p \leq \underbrace{\hat{P} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}_{L_2} \right) = 1 - \alpha$ **0'25 puntos.** – Calcular

numéricamente os extremos do intervalo, avaliando para a mostra dada os estatísticos L_1 e L_2 , de forma que, o parámetro " p " descoñecido estimámolo polo valor da súa estimación puntual $\hat{p} = 693/1540 = 0,45$

resultando: $L_1 \xrightarrow{\text{avaliamos para a mostra dada}} 0,45 - 1,96 \sqrt{\frac{0,45 \cdot 0,55}{1540}} = 0,45 - 0,0248 = 0,4252$ **0'25 puntos.**

$L_2 \xrightarrow{\text{avaliamos para a mostra dada}} 0,45 + 1,96 \sqrt{\frac{0,45 \cdot 0,55}{1540}} = 0,45 + 0,0248 = 0,4748$ **0'25 puntos.**

"Estímase, cun 95% de confianza, que entre un 42,52% e un 47,48%, aproximadamente, de españois con dereito a voto, non votarán nas próximas eleccións ao Parlamento Europeo"

– O erro máximo que se está a cometer nesta estimación é dun 2,48% **0'25 puntos.**