CiUG
COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA

**PAU** **Código: 36**

**XUÑO 2010**

# MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS

*O/A alumno/a debe responder só aos exercicios dunha das dúas opcións (**A** ou **B**). A puntuación máxima dos exercicios en cada opción é: 3 puntos o exercicio 1, 3 puntos o exercicio 2, 2 puntos o exercicio 3 e 2 puntos o exercicio 4.*

## OPCIÓN A

**1)** Dadas as matrices $A=\begin{pmatrix}1&0&2x\\0&1&x\\0&0&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&-y&0\\0&1&y\\0&0&1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}1&z&z\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $D=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-6\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Calcula os valores de $x$, $y$, $z$ para os que se verifica $2A-4B+3C=D^{-1}$.

**2)** Unha empresa fabrica bicicletas e vende *cada unidade* dun determinado modelo a un prezo P($x$) (en euros) que depende do número $x$ de bicicletas dese modelo que teña fabricado. Tal función é $P(x)=384-\frac{2x^2}{75}$, $0<x\leq 60$ .

Na fabricación das $x$ bicicletas prodúcese un gasto fixo de 100 euros máis un gasto variable de 256 euros por cada bicicleta fabricada.

(a) Calcula a función que expresa o beneficio obtido pola empresa na fabricación de $x$ bicicletas.
(b) ¿Cantas bicicletas deberá fabricar a empresa para obter o máximo beneficio?
(c) Para o número de bicicletas anterior, calcula o gasto, o ingreso e o beneficio máximo.

**3)** Un estudo sociolóxico afirma que 3 de cada 10 persoas dunha determinada poboación son obesas, das cales o 60% segue unha dieta. Por outra parte, o 63% da poboación non é obesa e non segue unha dieta.

(a) ¿Que porcentaxe da poboación segue unha dieta?
(b) Se unha persoa elexida ao chou segue unha dieta, ¿cal é a probabilidade de que sexa obesa?

**4)** O peso (en gramos) dos polos que chegan a un matadoiro segue unha distribución normal cunha desviación típica de $\sigma=320$ gramos.

(a) Se se estableceu o intervalo (2990, 3130) como intervalo de confianza para a media $\mu$ a partir dunha mostra de 64 polos, ¿cal é o valor da media mostral, $\bar{X}$ ?, ¿con que nivel de confianza se construíu o intervalo?
(b) ¿Cantos polos deberiamos pesar para que o nivel de confianza do intervalo anterior sexa do 97%?

## OPCIÓN B

**1)** Unha empresa de transportes ten que trasladar bloques de granito dende unha canteira a un serradoiro de pedra. Para iso dispón dun máximo de 8 camións de tipo *A* e un máximo de 12 camións de tipo *B*. Cada camión de tipo *A* necesita un operario e pode transportar 24 toneladas de granito cun gasto de 150 euros, mentres que cada camión de tipo *B* necesita dous operarios e pode transportar 12 toneladas de granito cun gasto de 300 euros. Sábese que se necesitarán un mínimo de 15 operarios, que se transportarán un mínimo de 108 toneladas de granito e que o número de camións de tipo *A* utilizados non será superior ao número de camións de tipo *B*.

(a) Formula o sistema de inecuacións asociado ao problema. Representa a rexión factible e calcula os seus vértices.
(b) Calcula tódalas posibilidades que ten a empresa de distribuír os camións para minimizar o gasto

**2)** O número $N$ de exemplares vendidos (en miles) dunha revista destinada ao público adolescente é estimado pola función $N(t)=\begin{cases}3\,t(10-t), & 0\leq t\leq 8\\ \dfrac{624\,t}{t^2+144}+24, & t>8\end{cases}$, onde $t$ é o tempo transcorrido en semanas.

Determina: os períodos nos que aumentan e nos que diminúen as vendas da revista, cando se acada o maior número de vendas e a canto ascenden. ¿A que valor tende o número de vendas co paso do tempo?

**3)** Sexan $A$ e $B$ sucesos tales que $P(A\cap B)=0{,}1$; $P(\bar{A}\cap\bar{B})=0{,}6$; $P(A/B)=0{,}5$, onde $\bar{A}$ e $\bar{B}$ denotan os sucesos contrarios de A e B respectivamente.

(a) Calcula as probabilidades seguintes: $P(B)$ e $P(A\cup B)$.
(b) ¿Son os sucesos $A$ e $B$ independentes? Xustifica a resposta.

**4)** (a) As puntuacións dun test de aptitude feito aos alumnos dun centro de ensino seguen unha distribución normal $N(\mu=1000,\ \sigma=600)$. Calcula a probabilidade de que a puntuación media, para unha mostra de 64 alumnos, estea comprendida entre 964 e 1036 puntos.

(b) ¿Cantos alumnos deberiamos seleccionar, como mínimo, para garantir cun 99,5% de confianza unha estimación da puntuación media de tódolos alumnos do centro, cun erro non superior a 150 puntos?

PAU

SETEMBRO 2010

Código: 36

# MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS

*O/A alumno/a debe responder só os exercicios dunha das dúas opcións (**A** ou **B**). A puntuación máxima dos exercicios en cada opción é: 3 puntos o exercicio 1, 3 puntos o exercicio 2, 2 puntos o exercicio 3 e 2 puntos o exercicio 4.*

## OPCIÓN A

**1)** Dada a ecuación matricial $A \cdot X + A^t = X + B$, sendo $A^t$ a matriz trasposta de *A*, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Despexar a matriz *X*. Calcular a matriz inversa de $(A - I_2)$, sendo $I_2$ a matriz identidade de orde 2.

(b) Resolver a ecuación matricial.

**2)** A función $C(t) = -t^3 + 9t^2 - 15t + 50,\ \ 0 \le t \le 6$, axústase á cotización en euros de certa moeda nos últimos seis anos ($C(t)$ indica a cotización no tempo *t* medido en anos).

(a) Encontra os intervalos de tempo nos que a cotización creceu e nos que decreceu.
(b) ¿En que momentos houbo unha cotización máis baixa e máis alta? ¿cales foron esas cotizacións?
(c) ¿Ten $C(t)$ algún punto de inflexión? En caso afirmativo, calcúlao e traza a gráfica da función no intervalo dado de tempo.

**3)** Realízase un estudo para determinar se os fogares dunha pequena cidade se subscribirían a un servizo de televisión por cable. Os fogares clasifícanse de acordo ao seu nivel de renda: alta, media ou baixa. A seguinte táboa móstranos as probabilidades das distintas interseccións:

| | *Renda baixa* | *Renda media* | *Renda alta* |
|---|---|---|---|
| *Subscribiríanse* | 0,05 | 0,15 | 0,10 |
| *Non se subscribirían* | 0,15 | 0,47 | 0,08 |

(a) Se o fogar subscribe o servizo, ¿cal é a probabilidade de que sexa de renda alta?
(b) ¿Son renda e posible subscrición á televisión por cable independentes? Xustificar a resposta.
(c) Calcula a probabilidade de que un fogar seleccionado ao chou pertenza polo menos a unha destas categorías: "renda media" ou "desexan subscribirse".

**4)** Un equipo da garda civil de tráfico fai controis de velocidade nunha travesía dunha determinada poboación. Sábese que a variable velocidade en travesía (en km/h) segue unha distribución normal con media $\mu$ e desviación típica $\sigma$.

(a) Tras controlar o paso pola travesía de 100 vehículos, dinnos que: "a velocidade media en travesía, $\mu$, toma valores entre 56,08 km/h e 63,92 km/h, co 95% de confianza". Con esta información calcula $\sigma$ e o valor da media da mostra $\bar{X}$.

(b) Se tomamos como $\mu = 60$ km/h e co valor de $\sigma = 20$ km/h, calcula a porcentaxe de mostras de 64 vehículos cuxa velocidade media supere os 65 km/h.

## OPCIÓN B

**1)** Unha pequena empresa desexa contratar traballadores de dúas categorías laborais: *I* e *II*. Pretende que o número total de traballadores contratados non sexa inferior a 9 nin superior a 12 e, ademais, o número de traballadores da categoría *I* non poderá ser inferior ao dobre de traballadores da categoría *II*. O custo laboral dun traballador da categoría *I* está estimado en 1400 euros ao mes e o dun da categoría *II* en 1100 euros ao mes.

(*a*) Formula o sistema de inecuacións asociado ao enunciado. Representa graficamente a rexión factible e calcula os seus vértices.

(b) Calcula o número de traballadores de cada categoría laboral que a empresa debe contratar para minimizar os custos laborais mensuais.

**2)** Unha fábrica produce diariamente un total de 20 artigos de dous modelos diferentes *A* e *B*.
O custo de produción diario (en euros) vén dado por $C = 6x^3 + 450y - 2500$, sendo *x* o número de modelos do tipo *A* e *y* o número de modelos do tipo *B*. ¿Cantos modelos de cada tipo debe producir diariamente para minimizar o custo de produción diario? Calcula ese custo de produción mínimo.

**3)** Un estudo estima que, en xeral, a probabilidade de que unha empresa tecnolóxica non obteña os beneficios anuais esperados é 0,5; a probabilidade de que unha entidade bancaria non alcance ao final do ano os beneficios esperados é 0,2 e a probabilidade de que ámbalas dúas empresas non obteñan os beneficios anuais esperados é 0,1.

(a) ¿Cal é a probabilidade de que polo menos unha das dúas non obteña os beneficios anuais esperados?
(b) ¿Cal é a probabilidade de que soamente unha das dúas non obteña os beneficios anuais esperados?

**4)** (a) Se os salarios anuais dos traballadores de certa empresa se distribúen segundo unha $N(\mu, \sigma = 1200)$, calcula un intervalo do 95% de confianza para o salario medio anual dos traballadores da empresa, se para iso se seleccionan ao chou 64 traballadores e se obtén que o seu salario medio anual é 26000 euros.

(b) ¿Que tamaño de mostra se necesita para garantir, cun 97% de confianza, unha estimación do salario medio anual dos traballadores da empresa, cun erro non superior a 200 euros?

# CONVOCATORIA DE XUÑO

## OPCIÓN A

*EXERCICIO 1* **(3 puntos)**
- Calcular a inversa da matriz $D$: **1´5 puntos**.– Calcular $2A - 4B + 3C$: **0´5 puntos**.
- Formulación do sistema de ecuacións: **0´25 puntos**.
- Resolución do sistema: **0´75 puntos** (**0´25 puntos** por cada unha das tres incógnitas).

*EXERCICIO 2* **(3 puntos)**
(a)**1 punto:**
- Determinar a función ingresos: **0´25 puntos**.
- Determinar a función gastos: **0´25 puntos**.
- Determinar a función beneficio: **0´5 puntos**.

(b)**1´25 puntos:**
- Derivada da función beneficio: **0´75 puntos**.
- Punto crítico: **0´25 puntos**.
- Xustificación do máximo absoluto: **0´25 puntos**.

(c)**0´75 puntos:**
- Cálculo do ingreso, gasto e beneficio máximo: **0´75 puntos** (**0´25 puntos** por cada un deles).

*EXERCICIO 3* **(2 puntos)**
(a)**1 punto:**
- Formulación do enunciado: **0´25 puntos**.
- Expresar o teorema das probabilidades totais e identificar cada unha das probabilidades da fórmula anterior: **0´50 puntos**.
- Resultado final: **0´25 puntos**.

(b)**1 punto:**
- Formulación da probabilidade pedida: **0´25 puntos**.
- Expresión e cálculos na probabilidade anterior: **0´75 puntos**.

*EXERCICIO 4* **(2 puntos)**
(a)**1 punto:**
- Cálculo de $\bar{X}$ : **0´5 puntos**.
- Cálculo de $1-\alpha$ : **0´5 puntos**.

(b)**1 punto:**
- Formulación: **0´25 puntos**.
- Obter $z_{\alpha/2}$ : **0´25 puntos**.
- Cálculo de $n$: **0´25 puntos**.
- Expresión do valor (e valores) enteiro de $n$: **0´25 puntos**

## OPCIÓN B

*EXERCICIO 1* **(3 puntos)**
(a)**2´25 puntos:**
- Formular o sistema de inecuacións: **1 punto**.
- Vértices da rexión factible: **0´75 puntos**.
- Representación gráfica da rexión factible: **0´5 puntos** (por debuxar as rectas e a rexión do plano limitada por elas e os seis vértices**)**.

(b)**0´75 puntos:**
- Por cada unha das tres solucións factibles: **0´25 puntos**.

*EXERCICIO 2* **(3 puntos)**
**1´75 puntos:**
- Derivada da función no primeiro anaco: **0´25 puntos**.
- Derivada no segundo anaco: **0´5 puntos**.
- Intervalos de crecemento e resposta aos períodos nos que aumentan as vendas: **0´5 puntos**.
- Intervalos de decrecemento e resposta aos períodos nos que diminúen as vendas: **0´5 puntos**.

**0´5 puntos:**

- Por determinar o máximo: **0´25 puntos**.
- Comprobar se é absoluto: **0´25 puntos**.

**0´25 puntos**: calcular as vendas máximas.
**0´5 puntos**: pola asíntota horizontal: valor ao que tenden as vendas co paso do tempo.

*EXERCICIO 3* **(2 puntos)**
(a)**1 punto:**

- Polo cálculo de $P(B)$ : **0´5 puntos**.
- Polo cálculo de $P(A \cup B)$ : **0´5 puntos**.

(b)**1 punto:**

- Determinar a probabilidade ou probabilidades precisas para probar a dependencia ou independencia dos sucesos: **0´5 puntos**.
- Xustificar coa definición apropiada se son ou non independentes: **0´5 puntos**.

*EXERCICIO 4* **(2 puntos)**
(a)**1 punto:**

- Determinar a distribución de $\overline{X}$ : **0´25 puntos**.
- Formular a probabilidade pedida: **0´25 puntos**.
- Tipificación: **0´25 puntos**.
- Uso das táboas e resultado final: **0´25 puntos**.

(b)**1 punto:**

- Formulación: **0´25 puntos**.
- Calcular $z_{\alpha/2}$ : **0´25 puntos**.
- Cálculo de *n*: **0´25 puntos**.
- Expresión do valor (e valores) enteiro de *n*: **0´25 puntos**.

## CONVOCATORIA DE SETEMBRO

### OPCIÓN A

*EXERCICIO 1* **(3 puntos)**
(a) **2 puntos:**

- Despexar a matriz *X*: **0´75 puntos**.
- Calcular $A - I$ : **0´25 puntos**.
- Calcular a matriz inversa de $A - I$ : **1 punto**.

(b) **1 punto:**

- Calcular $B - A^t$: **0´50 puntos**.
- Calcular *X* : **0´50 puntos**.

*EXERCICIO 2* **(3 puntos)**
(a) **1´25 puntos:**

- Determinar a primeira derivada: **0´25 puntos**.
- Calcular os puntos críticos: **0´25 puntos**.
- Determinar os intervalos de tempo pedidos: **0´75 puntos**.

(b) **0´75 puntos:**

- Máximo absoluto: **0´25 puntos**.
- Mínimo absoluto: **0´25 puntos**.
- Cotizacións máxima e mínima: **0´25 puntos**.

(c) **1 punto:**

- Determinar a segunda derivada: **0´25 puntos**.
- Calcular o punto de inflexión: **0´25 puntos**.
- Representación gráfica: **0´50 puntos**.

*EXERCICIO 3* **(2 puntos)**
(a) **0´75 puntos:**

- Formular a probabilidade pedida: **0´25 puntos**.

– Calcular a probabilidade condicionada anterior: **0´25 puntos**.
– Resultado final: **0´25 puntos**.
(b) **0´75 puntos:**
– Definición de sucesos independentes (ou dependentes): **0´25 puntos**.
– Cálculo das probabilidades que interveñan na definición anterior: **0´25 puntos**.
– Dedución final: **0´25 puntos**.
(c) **0´50 puntos:**
– Formular a probabilidade da unión: **0´25 puntos.**
– Resultado final: **0´25 puntos.**

<u>*EXERCICIO 4*</u> **(2 puntos)**
(a) **1 punto:**
– Cálculo da media da mostra: **0´50 puntos**.
– Formular a ecuación que corresponde ao raio do intervalo: **0´25 puntos**.
– Resultado para a desviación típica: **0´25 puntos**.
(b) **1 punto:**
– Determinar a distribución de $\bar{X}$: **0´25 puntos**.
– Formular a probabilidade pedida: **0´25 puntos**.
– Tipificación e paso a táboas: **0´25 puntos**.
– Resultado final: **0´25 puntos**.

## OPCIÓN B

<u>*EXERCICIO 1*</u> **(3 puntos)**
(a) **2´50 puntos:**
– Formular o sistema de inecuacións: **1 punto**(**0´25 puntos** por cada unha das catro inecuacións).
– Vértices da rexión factible: **0´75 puntos** (**0´25 puntos** polos dous puntos de corte co eixe $x$ + **0´50 puntos** polos dous que resultan da intersección das rectas correspondentes).
– Representación gráfica da rexión factible: **0´75 puntos** (por debuxar as rectas e a rexión do plano limitada por estas e os catro vértices**)**.
(b) **0´50 puntos:**
– Pola función obxectivo: **0´25 puntos**.
– Pola solución óptima: **0´25 puntos**.

<u>*EXERCICIO 2*</u> **(3 puntos)**
– Expresar unha das variables en función da outra: **0´25 puntos**.
– Determinar a función custo para minimizar: **0´75 puntos**.
– Cálculo da súa derivada primeira: **0´75 puntos**.
– Obter o punto crítico válido: **0´25 puntos**.
– Comprobar que é mínimo: **0´25 puntos**.
– Especificar o número de modelos de cada tipo que minimizan o custo: **0´50 puntos** (**0´25 puntos** por cada un deles)
– Calcular o custo de produción mínimo: **0´25 puntos**.

<u>*EXERCICIO 3*</u> **(2 puntos)**
(a) **1 punto:**
– Formulación da probabilidade pedida: **0´25 puntos**.
– Expresión e cálculos na probabilidade anterior:**0´75 puntos**.
(b) **1 punto:**
– Formulación da probabilidade pedida: **0´50 puntos**.
– Expresión e cálculos na probabilidade anterior:**0´50 puntos**.

<u>*EXERCICIO 4*</u> **(2 puntos)**
(a) **1 punto:**
– Expresión do intervalo de confianza: **0´50 puntos**.
– Calcular numericamente os extremos do intervalo: **0´50 puntos**.
(b) **1 punto:**
– Formulación: **0´25 puntos**.
– Calcular $z_{\alpha/2}$: **0´25 puntos**.
– Cálculo de *n*: **0´25 puntos**.
– Expresión do valor (e valores) enteiro de *n*: **0´25 puntos**.

## CONVOCATORIA DE XUÑO

O/A alumno/a debe responder só aos exercicios dunha das dúas opcións (**A** ou **B**)

**OPCIÓN A**

***Exercicio 1.*** (A puntuación máxima deste exercicio é 3 puntos)

– *Calcular a inversa da matriz D,* $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **1´50 puntos**.

– *Calcular* $2A - 4B + 3C = \begin{pmatrix} 1 & 4y+3z & 4x+3z \\ 0 & 1 & 2x-4y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **0´50 puntos**.

– *Formulación do sistema de ecuacións* $\begin{cases} 4y + 3z = 1 \\ 4x + 3z = 5 \\ 2x - 4y = 6 \end{cases}$ **0´25 puntos**.– *Resolución do sistema*, por calquera método, obtendo a solución $x = -1$, $y = -2$, $z = 3$ **0´75 puntos** (**0´25 puntos** por cada incógnita).

***Exercicio 2.*** (A puntuación máxima deste exercicio é 3 puntos)

A empresa vende "cada bicicleta" a un prezo (en euros) $P(x) = 384 - \dfrac{2x^2}{75}$, sendo $0 < x \leq 60$ e "$x$" o número de bicicletas que teña fabricado. Na fabricación das "$x$" bicicletas prodúcese un: gasto fixo + gasto variable.
(a) **1 punto**: A función a determinar é a función beneficio obtido pola empresa na fabricación de "$x$" bicicletas = $B(x)$ = Función ingreso nas "$x$" bicicletas – Función gasto nas "$x$" bicicletas, sendo

– Función ingreso nas "$x$" bicicletas = $I(x) = x \cdot P(x) = 384x - \dfrac{2}{75}x^3$ **0´25 puntos**.

– Función gasto nas "$x$" bicicletas = $G(x) = 100 + 256x$ **0´25 puntos**. Restando ámbalas funcións resulta que a función que nos piden é $B(x) = -\dfrac{2}{75}x^3 + 128x - 100$ **0´50 puntos**.

(b) **1´25 puntos**: Determinar a *derivada da función beneficio* $B'(x) = -\dfrac{2}{25}x^2 + 128$ **0´75 puntos**.

– Calcular os *puntos críticos* $B'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1600 \Rightarrow x = 40$ (solución válida) **0´25 puntos**.

– *Xustificar* que en $x = 40$ hai un *máximo absoluto*, calculando $B''(x) = -\dfrac{4}{25}x$, $B''(40) < 0$ (Comprobar o valor de B nos extremos da función ou ben observar que entre 40 e 60 non hai un mínimo) **0´25 puntos**.
(c) **0´75 puntos**: Para $x = 40$, calcula o gasto, o ingreso e o beneficio máximo:
$G(40)$ = 10.340 euros **0´25 puntos**.– $I(40)$ = 13.653´33 euros **0´25 puntos**.– $B(40)$ = 3.313´33 euros **0´25 puntos**.

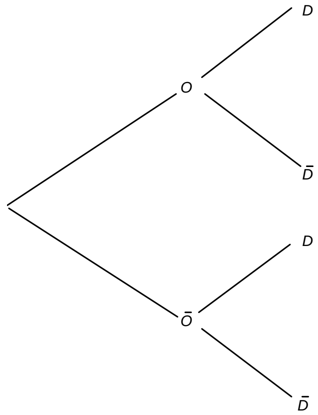
***Exercicio 3.*** (A puntuación máxima deste exercicio é 2 puntos)
Denominamos aos sucesos *O: unha persoa desa poboación é obesa, D: unha persoa desa poboación segue unha dieta.* Os datos que recollemos do enunciado son: $P(O) = 0´3$, $P(D/O) = 0´6$, $P(\bar{O} \cap \bar{D}) = 0´63$.
(a) **1 punto**: *¿Que porcentaxe da poboación segue unha dieta?*
– Formular o enunciado $P(D)$ **0´25 puntos**.– Expresión de $P(D) = P(O)P(D/O) + P(\bar{O})P(D/\bar{O})$ **0´25 puntos**.

– Calcular $P(D/\bar{O}) = 1 - P(\bar{D}/\bar{O}) = 1 - \dfrac{P(\bar{D} \cap \bar{O})}{P(\bar{O})} = 1 - \dfrac{0´63}{0´7} = 0´1$ **0´25 puntos**.

– Resultado final $P(D) = 0´25$, é dicir, *o 25% desa poboación segue unha dieta* **0´25 puntos**.
(b) **1 punto**: *Se unha persoa elexida ao chou segue unha dieta, ¿cal é a probabilidade de que sexa obesa?*
– Formulación da probabilidade pedida $P(O/D)$ **0´25 puntos**.– Expresión da probabilidade condicionada anterior $\dfrac{P(O \cap D)}{P(D)}$ **0´25 puntos**.– Cálculo de $P(O \cap D) = P(O) \cdot P(D/O) = 0´18$ **0´25 puntos**.

– Resultado final $P(O/D) = 0´72$ **0´25 puntos**.

Tamén podemos facer o exercicio construíndo unha táboa de continxencia ou ben un diagrama de árbore, avaliándose con **1 punto** (ou a táboa ou o diagrama). Os apartados (a) e (b) puntúanse agora con **0´50 puntos** cada un deles, repartindo **0´25 puntos** pola formulación do enunciado máis **0´25 puntos** polo resultado final.




| | $O$ | $\bar{O}$ | |
|---|---|---|---|
| $D$ | 18 | 7 | 25 |
| $\bar{D}$ | 12 | 63 | 75 |
| | 30 | 70 | 100 |

***Exercicio 4.*** (A puntuación máxima deste exercicio é 2 puntos)
Sexa *"X = peso, en gramos, dun polo que chega a un matadoiro"* $X: N(\mu,\ \sigma = 320)$.

(a) **1 punto**. *A partir dunha mostra de n = 64 polos estableceuse o intervalo* (2990, 3130) *como intervalo de confianza para a media* $\mu$, *¿cal é o valor de* $\bar{X}$ *?, ¿con que nivel de confianza se construíu o intervalo?*

– Igualando os extremos do intervalo de confianza para a media cos do enunciado: $\begin{cases} \bar{x} - z_{\alpha/2}\dfrac{320}{\sqrt{64}} = 2990 \\ \bar{x} + z_{\alpha/2}\dfrac{320}{\sqrt{64}} = 3130 \end{cases}$

e resolvendo, obtense que a media mostral toma o valor particular, para a mostra dada, $\bar{x}$ = 3060 gramos **0´50 puntos**. Deducimos tamén que $z_{\alpha/2}$ = 1´75 **0´25 puntos**, usando as táboas resulta $1-\alpha/2 = 0´9599$ e operando obtemos que o *nivel de confianza* é $1-\alpha = 0´9198$ **0´25 puntos**.

(b) **1 punto**. *¿Cantos polos deberiamos pesar para que o nivel de confianza do intervalo anterior sexa do* 97%?

– Formulación: $z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 70$ **0´25 puntos**.– Obter $z_{\alpha/2} = 2´17$ a partir de que $1-\alpha = 0´97$ **0´25 puntos**.

– Cálculo de "*n*" despexando na ecuación anterior $2´17 \cdot \dfrac{320}{\sqrt{n}} = 70 \Rightarrow n = 98´4064$ **0´25 puntos**.– Expresión do valor enteiro de *n*, *"deberiamos pesar, a lo menos, 99 polos"* **0´25 puntos**.

## OPCIÓN B

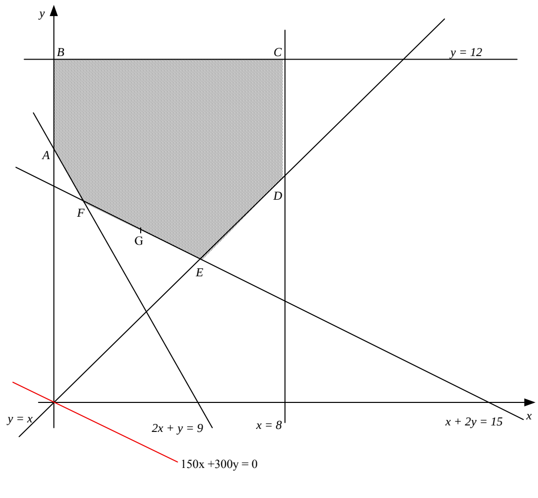
***Exercicio 1.*** (A puntuación máxima deste exercicio é 3 puntos)
Sexan "*x*" o número de camións de tipo *A* e "*y*" o número camións de tipo *B*, que a empresa utilizará no transporte.

(a) **2´25 puntos**:

– Formular o sistema *de inecuacións:* $0 \le x \le 8;\ \ 0 \le y \le 12;$ **0,25 puntos**. $x + 2y \ge 15;\ \ 24x + 12y \ge 108;\ \ x \le y;$ **0,75** puntos (**0,25 puntos** por cada unha delas).

– *Vértices da rexión factible* **0´75 puntos**, obter os catro vértices: *A* (0, 9); *B* (0, 12); *C* (8, 12); *D* (8, 8) **0´25 puntos**, polo punto *E* (5, 5) **0´25 puntos** e polo *F* (1, 7) **0´25 puntos**.

– *Representación gráfica da rexión factible* **0,50 puntos**:



(b) **0´75 puntos**.– *Optimización*: A función obxectivo $f(x,y) = 150x + 300y$ minimízase nos vértices $E$ (5, 5), tamén no $F$ (1, 7) e no punto $G$ (3, 6), xa que os vértices $E$ e $F$ están sobre a recta $x + 2y = 15$ que é paralela á función obxectivo, entón calquera punto do segmento $EF$ é unha solución válida sempre que as súas coordenadas sexan enteiras e o dito punto $G$ satisface esta condición. As tres posibilidades que ten a empresa de distribuir os camións para minimizar o gasto son: "con 5 camións de tipo *A* e 5 camións de tipo *B*" **0´25 puntos**, "con 1 camión de tipo *A* e 7 camións de tipo *B*" **0´25 puntos**, e "con 3 camións de tipo A e 6 camións de tipo B" **0´25 puntos**.

***Exercicio 2.*** (A puntuación máxima deste exercicio é 3 puntos)
**1´75 puntos**: *Determinar os períodos nos que aumentan e nos que diminúen as vendas da revista.*
– Derivada da función no primeiro trozo: No intervalo (0, 8) $N'(t) = 30 - 6t$ **0´25 puntos**.

– Derivada da función no segundo trozo: No intervalo $(8,+\infty)$ $N'(t) = \dfrac{624\left(144 - t^2\right)}{\left(t^2 + 144\right)^2}$ **0´50 puntos**.

– Intervalos de crecemento: os puntos críticos válidos son $t = 5$ e $t = 12$. Estudando o signo da derivada primeira obtense que nos intervalos (0, 5) e (8, 12) a función $N(t)$ é crecente **0´25 puntos**.
– Resposta aos períodos nos que aumentan as vendas, "*As vendas aumentan dende o inicio á 5ª semana e dende a 8ª á 12ª semana*" **0´25 puntos**.
– Intervalos de decrecemento: a función $N(t)$ é decrecente nos intervalos (5, 8) e $(12, +\infty)$ **0´25 puntos**.
– Resposta aos períodos nos que diminúen as vendas, "*As vendas diminúen dende a 5ª semana á 8ª semana e a partir da 12ª semana*" **0´25 puntos**.
**0´75 puntos**: *¿Cando se acada o maior número de vendas e a canto ascenden?*
– Por determinar que o máximo se presenta no punto (5, 75) **0´25 puntos**.
– Comprobar que é un máximo absoluto, esbozando a gráfica da función ou ben estudando o comportamento da función no punto $t = 12$ $N(12) = 50$ **0´25 puntos**.
– Especificar que *as vendas máximas ascenden a 75.000 exemplares* **0´25 puntos**.
**0´50 puntos**: *¿A que valor tende o número de vendas co paso do tempo?*

– Calcular $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\dfrac{624t}{t^2 + 144} + 24\right) = 24$ **0´25 puntos**.

– "*As vendas no futuro aproxímanse a 24.000 exemplares*" **0´25 puntos**.

***Exercicio 3.*** (A puntuación máxima deste exercicio é 2 puntos)
Sexan *A* e *B* sucesos que verifican $P(A \cap B) = 0'1;\ P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0'6;\ P(A/B) = 0'5$
(a) **1 punto**:

– Para calcular $P(B)$ utilizamos a definición de probabilidade condicionada $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ **0´25 puntos**.

– Utilizando os datos dos que dispoñemos $0'5 = \dfrac{0'1}{P(B)} \Rightarrow P(B) = 0'2$ **0´25 puntos**.

– Para calcular $P(A \cup B)$ utilizamos as leis de Morgan e a definición de probabilidade do suceso contrario $P\left(\bar{A} \cap \bar{B}\right) = P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P\left(A \cup B\right) \Rightarrow P\left(A \cup B\right) = 1 - 0'6 = 0'4$ **0´50 puntos**.

(b) **1 punto**:
– Para probar a dependencia ou independencia dos sucesos *A* e *B*, calculamos $P(A)$ utilizando a probabilidade da unión coñecida no apartado anterior $P\left(A \cup B\right) = 0'4 = P(A) + 0'2 - 0'1 \Rightarrow P(A) = 0'3$ **0´50 puntos**.

– Xustificar coa definición apropiada se son ou non independentes: $P\left(A/B\right) = 0'5 \neq P(A)$ polo tanto *A* e *B* son dependentes **0´50 puntos**.

***Exercicio 4.*** (A puntuación máxima deste exercicio é 2 puntos)
Sexa *"X = puntuación dun test de aptitude feito por un alumno dun centro de ensino"*
$X:\ N(\mu = 1000,\ \sigma = 600)$
(a) **1 punto**. *Calcula a probabilidade de que a puntuación media, para unha mostra de 64 alumnos, estea comprendida entre 964 e 1036 puntos.*

– Determinar a distribución de $\bar{X}$, $\bar{X}:\ N\left(\mu = 1000, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{600}{8} = 75\right)$ **0´25 puntos**.

– Formular a probabilidade pedida: $P(964 < \bar{X} < 1036)$ **0´25 puntos**.

– Tipificación: $P(964 < \bar{X} < 1036) = P\left(\frac{964-1000}{75} < Z < \frac{1036-1000}{75}\right) = P(-0´48 < Z < 0´48)$ **0´25 puntos**.

– Uso das táboas e resultado final: $2P(Z < 0´48) - 1 = 0´3688$ **0´25 puntos**.

(b) **1 punto**. *Calcula cantos alumnos deberiamos seleccionar, como mínimo, para garantir cun 99´5% de confianza, unha estimación da puntuación media de todos os alumnos do centro, cun erro non superior a 150 puntos.*

– Formular a inecuación correspondente ao erro pedido: $z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le 150$ **0´25 puntos**.

– Calcular $z_{\alpha/2} = 2´81$ **0´25 puntos**.

– Cálculo de “*n*” na desigualdade: $2´81 \cdot \frac{600}{\sqrt{n}} \le 150$, obtendo $n \ge 126´337$ **0´25 puntos**.

– Expresión do valor (e valores) enteiro de *n*, “*deberiamos seleccionar mostras de 127 alumnos ou máis, para garantir a dita estimación* ” **0´25 puntos**.

## CONVOCATORIA DE SETEMBRO

O/A alumno/a debe responder só aos exercicios dunha das dúas opcións (**A** ou **B**)

**OPCIÓN A**

***Exercicio 1.*** (A puntuación máxima deste exercicio é 3 puntos)
(a) **2 puntos**.

– Despexar a matriz *X*, $X = (A - I_2)^{-1}(B - A^t)$ **0´75 puntos**.

– Calcular $A - I_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **0´25 puntos**.

– Calcular a matriz inversa de $A - I_2$, $(A - I_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **1 punto**.

(b) **1 punto**: Resolver a ecuación matricial.

– Calcular $B - A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ **0´50 puntos**.

– Calcular $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ **0´50 puntos**.

***Exercicio 2.*** (A puntuación máxima deste exercicio é 3 puntos)

A función $C(t) = -t^3 + 9t^2 - 15t + 50,\ 0 \le t \le 6$ axústase á cotización en euros de certa moeda nos últimos seis anos.
(a) **1´25 puntos**: *Encontra os intervalos de tempo nos que a cotización creceu e nos que decreceu.*

– Determinar a primeira derivada: $C'(t) = -3t^2 + 18t - 15$ **0´25 puntos**.

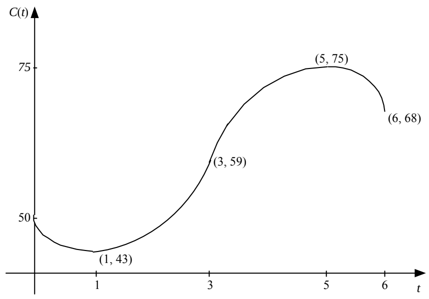
– Calcular os puntos críticos: $C'(t) = 0 \Rightarrow t^2 - 6t + 5 = 0 \Rightarrow t = 1$ e $t = 5$ **0´25 puntos**.

– Determinar os intervalos de tempo pedidos:

| | (0, 1) | (1, 5) | (5, 6) |
|---|---|---|---|
| *Valor t* | $t = 1/2$ | $t = 2$ | $t = 11/2$ |
| *Signo* $C'(t)$ | $C'(1/2) < 0$ | $C'(2) > 0$ | $C'(11/2) < 0$ |

Deducimos que no (0, 1) a función $C(t)$ é decrecente **0´25 puntos**, no (1, 5) é crecente **0´25 puntos** e no (5, 6) é decrecente **0´25 puntos**, logo “*a cotización desa moeda aumentou do primeiro ao quinto ano e diminuíu no primeiro ano e do quinto ao sexto ano*”.
(b) **0´75 puntos**: ¿*En que momentos houbo unha cotización máis baixa e máis alta*? ¿*cales foron esas cotizacións*?
– No punto (5, 75) hai un máximo absoluto **0´25 puntos**.
– No punto (1, 43) hai un mínimo absoluto **0´25 puntos**.
– *A cotización mínima foi de 43 euros e a máxima de 75 euros* **0´25 puntos**.
(c) *Calcula o punto de inflexión e debuxa a gráfica no intervalo dado de tempo.*

– Determinar a segunda derivada: $C''(t) = -6t + 18$ **0´25 puntos**.
– Calcular o punto de inflexión (3, 59) **0´25 puntos**.
– Representación gráfica: **0´50 puntos**.



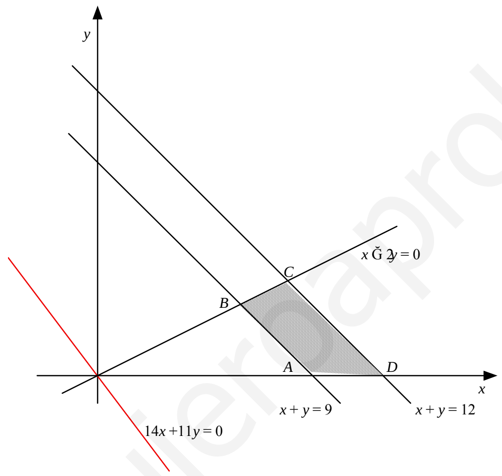

***Exercicio 3.*** (A puntuación máxima deste exercicio é 2 puntos)
Denominamos aos sucesos *"$R_B$: un fogar é de renda baixa, $R_M$ é de renda media e $R_A$ é de renda alta"*. *"S: un fogar se subscribe a un servizo de televisión por cable"*. Facendo uso da táboa enunciada no exercicio, teremos:
(a) **0´75 puntos**: *Se o fogar subscribe o servizo, ¿cal é a probabilidade de que sexa de renda alta?*
– Formular a probabilidade pedida **0´25 puntos**.
– Calcular a probabilidade condicionada anterior e resultado final $P\left(R_A/S\right) = \dfrac{P(R_A \cap S)}{P(S)} = \dfrac{0'10}{0'05 + 0'15 + 0'10} = \dfrac{1}{3}$ **0´50 puntos**.
(b) **0´75 puntos**: *¿Son renda e posible subscrición á televisión por cable independientes? Xustificar a resposta.*
– Definición de sucesos independentes (ou dependentes), por exemplo: $P\left(R_A/S\right) = P(R_A) \Rightarrow R_A$ e $S$ son sucesos independentes **0´25 puntos**.
– Calculo das probabilidades que interveñen na definición anterior, neste caso, só é preciso calcular $P(R_A) = 0'18$ **0´25 puntos**.
– Deducción final $P\left(R_A/S\right) = \dfrac{1}{3} \neq P(R_A)$ logo os sucesos son dependentes, é dicir *"a posible subscrición á televisión por cable depende da renda"* **0´25 puntos**.
(c) **0´50 puntos**: *Calcula a probabilidade de que un fogar seleccionado ao chou pertenza polo menos a unha destas categorías: "renda media" ou "desexan subscribirse"*
– Formular a probabilidade da unión $P(R_M \cup S)$ **0´25 puntos**.
– Resultado final $P(R_M) + P(S) - P(R_M \cap S) = 0'77$ **0´25 puntos**.

***Exercicio 4.*** (A puntuación máxima deste exercicio é 2 puntos)
Sexa *"X = velocidade en travesía (en km/h)"* $X : N(\mu, \sigma)$.
(a) **1 punto**. *Tras controlar o paso pola travesía de 100 vehículos, dinnos que "a velocidade media en travesía $\mu$ toma valores entre 56´08 km/h e 63´92 km/h, co 95% de confianza". Con esta información calcula $\sigma$ e o valor da media da mostra.*
– Igualando os extremos do intervalo de confianza para a media cos do enunciado: $\begin{cases} \bar{X} - 1'96\dfrac{\sigma}{\sqrt{100}} = 56'08 \\ \bar{X} + 1'96\dfrac{\sigma}{\sqrt{100}} = 63'92 \end{cases}$ **0´50 puntos**, e resolvendo, obtense que a media mostral toma o valor particular, para a mostra dada, $\bar{x} = \dfrac{56'08 + 63'92}{2} = 60$ km/h **0´25 puntos**, e $1'96\dfrac{\sigma}{10} = 3'92 \Rightarrow \sigma = 20$ **0´25 puntos**.
(b) **1 punto**. *Se tomamos como $\mu$=60 km/h e co valor de $\sigma$=20 km/h, calcula a porcentaxe de mostras de 64 vehículos cuxa velocidade media supere os 65 km/h.*
– Determinar a distribución de $\bar{X}$, $\bar{X} : N\left(\mu = 60, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{20}{\sqrt{64}} = 2'5\right)$ **0´25 puntos**.
– Formular a probabilidade pedida: $P\left(\bar{X} > 65\right)$ **0´25 puntos**.

– Tipificación e paso a táboas: $P\left(\overline{X} > 65\right) = P\left(Z > \dfrac{65-60}{2'5}\right) = P\left(Z > 2\right) = 1 - P\left(Z \le 2\right) = 1 - 0'9772 = 0'0228$

**0´25 puntos**.
– Resposta á pregunta do exercicio: *“aproximadamente, no 2´28% das mostras de 64 vehículos, supéranse os 65 km/h de media”* **0´25 puntos**.

**OPCIÓN B**
***Exercicio 1.*** (A puntuación máxima deste exercicio é 3 puntos)
Sexan "*x*" o número de traballadores da categoría laboral *I* e "*y*" o número de traballadores da categoría laboral *II*.
(a) **2´50 puntos**:
– Formular o sistema *de inecuacións* **1 punto**: $9 \le x + y \le 12$; $x \ge 2y$; $y \ge 0$ (**0,25 puntos** por cada unha das catro inecuacións).
– *Vértices da rexión factible* **0´75 puntos** repartidos en, vértices *A* (9, 0) e *D* (12, 0) **0´25 puntos**, vértice *B* (6, 3) **0´25 puntos** e *C* (8, 4) **0´25 puntos**.
– *Representación gráfica da rexión factible* **0,75 puntos**:




(b) **0´50 puntos**.– A función obxectivo $f(x, y) = 1400x + 1100y$ **0´25 puntos**, minimízase no vértice *B* (6, 3) polo que *“a empresa deberá contratar a 6 traballadores da categoría laboral I e a 3 traballadores da categoría laboral II para minimizar os custos laborais mensuais”* **0´25 puntos**.

***Exercicio 2.*** (A puntuación máxima deste exercicio é 3 puntos)
Unha fábrica produce diariamente un total de 20 artigos de dous modelos diferentes *A* e *B*. Sexan “*x* = número de modelos do tipo *A*” e “*y* = número de modelos do tipo *B*”.
– Expresar unha das variables en función da outra: $y = 20 - x$ **0´25 puntos**.
– Determinar a función custo a minimizar: $C(x) = 6x^3 + 450(20 - x) - 2500 = 6x^3 - 450x + 6500$ **0´75 puntos**.
– Cálculo da súa derivada primeira: $C'(x) = 18x^2 - 450$ **0´75 puntos**.
– Obter o punto crítico válido: $C'(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 25$, sendo o punto crítico válido $x = 5$ **0´25 puntos**.
– Comprobar que é mínimo: $C''(x) = 36x$ e $C''(5) > 0$ **0´25 puntos**.
– Especificar o número de modelos de cada tipo que minimizan o custo: “*A fábrica debe producir diariamente 5 modelos do tipo A* (**0´25 puntos**) *e 15 modelos do tipo B* (**0´25 puntos**) *para minimizar o custo de produción diario*”.
– Calcular o custo de produción mínimo: $C_{mín} = 5000$ euros **0´25 puntos**.

***Exercicio 3.*** (A puntuación máxima deste exercicio é 2 puntos)
Denominamos aos sucesos “*T*: unha empresa tecnolóxica non obtén os beneficios anuais esperados” e “*B*: unha entidade bancaria non obtén os beneficios anuais esperados”.
Os datos que nos proporcionan no exercicio son $P(T) = 0'5,\ P(B) = 0'2,\ P(T \cap B) = 0'1$
(a) **1 punto**: *¿Cal é a probabilidade de que polo menos unha das dúas non obteña os beneficios anuais esperados?*
– Formulación da probabilidade pedida: $P(T \cup B)$ **0´25 puntos**.
– Expresión e cálculos na probabilidade anterior: $P(T \cup B) = P(T) + P(B) - P(T \cap B) = 0'5 + 0'2 - 0'1 = 0'6$ **0´75 puntos**.

(b) **1 punto**: *¿Cal é a probabilidade de que soamente unha das dúas non obteña os beneficios anuais esperados?*

– Formulación da probabilidade pedida: $P\left((T\cap\overline{B})\cup(\overline{T}\cap B)\right)$ **0´50 puntos**.

– Expresión e cálculos na probabilidade anterior, tendo en conta que $T\cap\overline{B}$ e $\overline{T}\cap B$ son sucesos incompatibles e que $T$ e $B$ son sucesos independentes, polo tanto tamén son independentes os contrarios $T$ e $\overline{B}$, $\overline{T}$ e $B$

$P\left((T\cap\overline{B})\cup(\overline{T}\cap B)\right)= P(T\cap\overline{B})+P(\overline{T}\cap B)=P(T)P(\overline{B})+P(\overline{T})P(B)=0,5\cdot 0,8+0,5\cdot 0,2=0´5$ **0´50 puntos**.

Tamén podemos facer o exercicio construíndo unha táboa de continxencia, avaliándose con 1 punto. Os apartados (a) e (b) puntúanse agora con **0´50 puntos** cada un deles, repartindo **0´25 puntos** pola formulación do enunciado máis **0´25 puntos** polo resultado final.

| | $B$ | $\overline{B}$ | |
|---|---|---|---|
| $T$ | 10 | 40 | 50 |
| $\overline{T}$ | 10 | 40 | 50 |
| | 20 | 80 | 100 |

***Exercicio 4.*** (A puntuación máxima deste exercicio é 2 puntos)

(a) **1 punto**. Sexa *"X = salario anual dun traballador de certa empresa"* $X:\ N(\mu,\sigma=1200)$. *Calcula un intervalo do 95% de confianza para o salario medio anual dos traballadores da empresa, se para iso se seleccionan ao chou 64 traballadores e se obtén que o seu salario medio anual é 26000 euros.*

– Expresión do intervalo de confianza $P\left(\overline{X}-z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\overline{X}+z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha$ **0,50 puntos**.

– Calcular numéricamente os extremos do intervalo $\begin{cases}26000-1,96\dfrac{1200}{\sqrt{64}}=26000-294=25706\\[2mm] 26000+1,96\dfrac{1200}{\sqrt{64}}=26000+294=26294\end{cases}$ **0,50 puntos**.

– "Estímase que o salario medio anual dos traballadores desa empresa está entre 25706 euros e 26294 euros, cun 95% de confianza".

(b) **1 punto**. *¿Qué tamaño de mostra se necesita para garantir, cun 97% de confianza, unha estimación de salario medio anual dos traballadores da empresa, cun erro non superior a 200 euros?*

– Formular a inecuación correspondente ao erro pedido: $z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\le 200$ **0´25 puntos**.

– Calcular $z_{\alpha/2}=z_{0,015}=2,17$ **0´25 puntos**.

– Cálculo de "*n*" na desigualdade: $2,17\cdot\dfrac{1200}{\sqrt{n}}\le 200 \Rightarrow n\ge 169,52$ **0´25 puntos**.

– Expresión do valor (e valores) enteiro de *n*, "*deberiamos seleccionar mostras de 170 traballadores ou máis, para garantir a dita estimación*" **0´25 puntos**.