MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS

***O alumno debe resolver só un exercicio de cada un dos tres bloques temáticos*.**

BLOQUE DE ÁLXEBRA *(Puntuación máxima 3 puntos)*

Exercicio 1. Sexan as matrices $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}-1\\1\\-5\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}2\\7\\4\end{pmatrix}$

Calcula os valores dos números reais x, y, z, para que se verifique a seguinte igualdade entre matrices

$$x \cdot A^{-1} \cdot B = E + y \cdot C + z \cdot D$$

Exercicio 2. Unha compañía química deseña dous posibles tipos de cámaras de reacción que incluirán nunha planta para producir dous tipos de polímeros P_1 e P_2. A planta debe ter unha capacidade de produción de, polo menos 100 unidades de P_1 e polo menos 420 unidades de P_2 cada día. Cada cámara de tipo A custa 600.000 euros e é capaz de producir 10 unidades de P_1 e 20 unidades de P_2 por día; a cámara de tipo B é un deseño máis económico, custa 300.000 euros e é capaz de producir 4 unidades de P_1 e 30 unidades de P_2 por día. Debido ao proceso de deseño, é necesario ter polo menos 4 cámaras de cada tipo na planta. ¿Cantas cámaras de cada tipo deben incluirse para minimizar o custo e aínda así satisfacer o programa de produción requerido? Formula o sistema de inecuacións asociado ao problema. Representa a rexión factible e calcula os seus vértices.

BLOQUE DE ANÁLISE (*Puntuación máxima 3,5 puntos*)

Exercicio 1. Para un programa de axuda estímase que o número de beneficiarios n (en miles) durante os próximos t anos, axustarase á función $n(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{9}{2}t^2 + 18t, \quad 0 \le t \le 9$.

(*a*) Representa a gráfica da función, estudando intervalos de crecemento e de decrecemento, máximos e mínimos (absolutos e relativos) e punto de inflexión. ¿En que ano será máximo o número de beneficiarios?, ¿cal é dito número?

(*b*) Un segundo programa para o mesmo tipo de axuda, estima que para os próximos t anos, o número de beneficiarios (en miles) será $m(t) = \frac{9}{2}t, \quad 0 \le t \le 9$. ¿Nalgún ano o número de beneficiarios será o mesmo con ámbolos programas? ¿En que intervalo de tempo o primeiro programa beneficiará a máis persoas que o segundo?

Exercicio 2. Un modelo para os custos de almacenamento e envío de materiais para un proceso de manufactura, ven dado pola función $C(x) = 100\left(100 + 9x + \frac{144}{x}\right), \quad 1 \le x \le 100$, sendo $C(x)$ o custo total (en euros) de almacenamento e transporte e x a carga (en toneladas) de material.

(*a*) Calcula o custo total para unha carga dunha tonelada e para unha carga de 100 toneladas de material. (*b*) ¿Qué cantidade x de toneladas de material producen un custo total mínimo? Xustifica a resposta e calcula dito custo mínimo. (*c*) Se deciden non admitir custos de almacenamento e envío superiores ou iguales a 75000 euros, ¿ata que carga de material poderían mover?

BLOQUE DE ESTATÍSTICA (*Puntuación máxima 3,5 puntos*)

Exercicio 1. A táboa seguinte mostra o número de defuncións por grupo de idade e sexo nunha mostra de 500 falecementos de certa rexión

	GRUPO DE IDADE (anos)			
	0 – 10 (*D*)	11 – 30 (*T*)	30 – 50 (*C*)	*Maior de* 50 (*V*)
Homes (*H*)	200	20	25	60
Mulleres (*M*)	120	15	20	40

(*a*) Describe cada un dos seguintes sucesos e calcula as súas probabilidades: *i*) $H \cup T$, *ii*) $M \cap (T \cup V)$, *iii*) $\overline{T} \cap \overline{H}$

(*b*) Calcula a porcentaxe de falecementos con respecto ao sexo. (*c*) No rango de idade de máis de 50 anos, ¿cal é a porcentaxe de homes falecidos?, ¿é maior ou menor que a de mulleres nese mesmo rango de idade?

Exercicio 2. (*a*) A renda anual por familia para os residentes dun gran barrio, segue unha distribución $N(\mu, \sigma)$, sendo a renda media anual por familia, μ, 20000 euros. Coñecemos que, de 100 familias seleccionadas ao chou dese barrio, 67 teñen renda anual inferior a 20660 euros. ¿Cal é entón o valor da desviación típica σ?

(*b*) Se a renda anual por familia segue unha distribución $N(20000, 1500)$, calcula a porcentaxe de mostras de 36 familias cuxa renda media anual supere os 19500 euros.

(*c*) ¿Que número de familias teríamos que seleccionar, como mínimo, para garantir, có 99% de confianza, unha estimación da renda media anual por familia para todo o barrio, cun erro non superior a 300 euros?

CiUG

COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA

PAAU (LOXSE) **Código: 61**

SETEMBRO 2009

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS

O alumno debe resolver só un exercicio de cada un dos tres bloques temáticos.

BLOQUE DE ÁLXEBRA (*Puntuación máxima 3 puntos*)

Exercicio 1. Considera as matrices A, B, C e D seguintes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2x \\ 4 \\ y \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

(*a*) Calcula a inversa da matriz A. (*b*) Calcula a matriz $C \cdot D - B$. ¿Cal é a súa orde?

(*c*) Determina os valores de x, y, z que satisfan a identidade $A^{-1} \cdot B = C \cdot D - B$

Exercicio 2. Un oleiro elabora dous tipos de pezas: porróns e olas, en cantidades reducidas. Sabe que non pode producir máis de 8 pezas diarias nin tampouco máis de 4 olas diarias. Tamén, por motivos de produción, desexa que o número de porróns non supere ao número de olas en máis de dúas pezas. Se obtén un beneficio de 6 euros por cada porrón e de 4 euros por cada ola, ¿cantas pezas de cada tipo deberá elaborar cada día para obter un beneficio máximo?, ¿cal será este beneficio? Representar graficamente a rexión factible e calcular os seus vértices.

BLOQUE DE ANÁLISE (*Puntuación máxima 3,5 puntos*)

Exercicio 1. Un individuo investiu en accións de certa compañía durante os últimos 12 meses. O valor V do seu investimento, en euros, no transcurso de t meses estímase pola función $V(t) = -2t^3 + 9t^2 + 240t + 1200$, sendo $0 \le t \le 12$.

(*a*) ¿Canto investiu inicialmente? (*b*) ¿Entre que meses o valor do seu investimento creceu? ¿e entre cales decreceu?

(*c*) O individuo vende as súas accións transcorridos os 12 meses, ¿cal tería sido realmente o mellor momento para facelo? ¿Canto perde por non telas vendido no momento óptimo? (*d*) Utilizando os resultados dos apartados anteriores representa graficamente a función, calculando ademais o punto de inflexión.

Exercicio 2. Unha organización humanitaria planea unha campaña para recadar fondos nunha cidade. Sábese, por experiencias anteriores, que a porcentaxe P de habitantes da cidade que fará un donativo é unha función do número de días t que dure a campaña, estimada por $P(t) = 40\left(1 - e^{-0{,}05t}\right)$, $t \ge 0$.

(*a*) ¿Que porcentaxe de habitantes da cidade fará un donativo despois de 10 días de iniciada a campaña? ¿E despois de 20 días? (*b*) Calcula o ritmo de cambio, $P'(t)$, da porcentaxe de doantes con respecto aos días de campaña transcorridos. ¿É a función $P(t)$ crecente ou decrecente? (*c*) Calcula o $\lim_{t \to +\infty} P(t)$. ¿Supérase nalgún día o 40% de doantes?

(*d*) Se a cidade ten 100000 habitantes e se cada doante contribúe con 2 euros, calcula o total que se terá recadado ao cabo de 20 días.

BLOQUE DE ESTATÍSTICA (*Puntuación máxima 3,5 puntos*)

Exercicio 1. Unha empresa quere comercializar unha ferramenta eléctrica para a construción e polo tanto é probada por 3 de cada 5 traballadores do sector. Dos que a probaron, o 70% dá unha opinión favorable, o 5% dá unha opinión desfavorable e o resto opina que lle é indiferente. Dos que non probaron a ferramenta, o 60% dá unha opinión favorable, o 30% opina que lle é indiferente e o resto dá unha opinión desfavorable.

Sábese que a empresa comercializará a ferramenta se ao menos o 65% dos traballadores do sector dá unha opinión favorable.

(*a*) Se un traballador elexido ao chou dá unha opinión desfavorable, ¿cal é a probabilidade de que probara a ferramenta? (*b*) ¿Que porcentaxe de traballadores dá unha opinión favorable? ¿Comercializará a empresa a ferramenta? Razoa a resposta. (*c*) Calcula a porcentaxe de traballadores que proba a ferramenta e opina que lle é indiferente.

Exercicio 2. Un deseñador industrial desexa estimar o tempo medio que tarda un adulto en ensamblar un certo tipo de xoguete. Por experiencias previas coñece que a variable tempo de ensamblaxe segue unha distribución normal, con media μ e desviación típica $\sigma = 5$ minutos.

(*a*) Seleccionada ao chou unha mostra de 64 adultos a súa media resultou ser de 20 minutos. ¿Entre que valores se atopa o tempo medio real de ensamblaxe, cunha confianza do 95%? (*b*) Supoñamos que $\mu = 20$ minutos. Por razóns comerciais decide que cambiará o modelo de xoguete se o tempo medio de ensamblaxe, en mostras de 64 adultos, é superior a 21 minutos, ¿con que probabilidade tomará esa decisión? (*c*) Calcula cantos adultos deberá seleccionar, como mínimo, para garantir, cun 95% de confianza, unha estimación de dito tempo medio cun error máximo non superior a un minuto.

CONVOCATORIA DE XUÑO

O alumnado debe resolver só un exercicio de cada bloque temático. No caso de responder os dous, será cualificado coa nota do exercicio que figura co número 1 do bloque.

ÁLXEBRA (A puntuación máxima de cada exercicio é 3 puntos).

Exercicio 1.

– *Calcular a inversa da matriz A*, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **1,25 puntos**. – *Calcular* $A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ **0,25 puntos**.

– *Formulación do sistema de ecuacións* $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-y-z=7 \\ x+2y+5z=4 \end{cases}$ **0,75 puntos** (**0,25 puntos** por cada unha das ecuacións ben formulada).– *Resolución do sistema,* obtendo a solución $x = 3$, $y = -2$, $z = 1$ **0,75 puntos** (**0,25 puntos** por cada incógnita).

Exercicio 2.

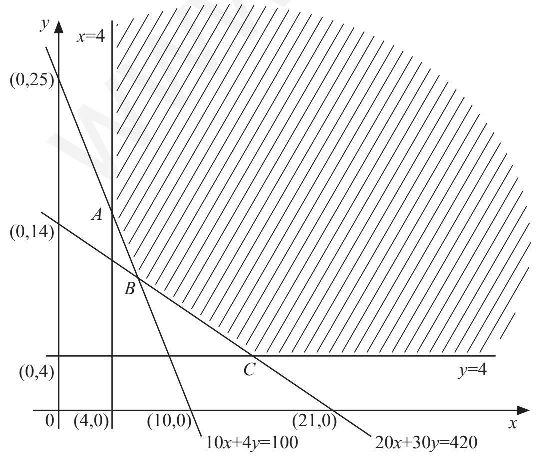
Sexan "x" e "y" o número de cámaras de tipo A e de tipo B, respectivamente.

– *Formular o sistema de inecuacións:* $10x + 4y \geq 100$; $20x + 30y \geq 420$; $x \geq 4$; $y \geq 4$ **1 punto** (**0,25 puntos** por cada unha delas).

– *Función obxectivo* $f(x, y) = 600000x + 300000y$ **0,25 puntos**

– *Vértices da rexión factible* **0,75 puntos**, obter os tres vértices: A (4, 15); B (6, 10); C (15, 4) (**0,25 puntos** por cada un deles).

– *Representación gráfica da rexión factible* **0,75 puntos**:



– *Optimización*: a función obxectivo minimízase no vértice B (6, 10), entón deberían incluírse seis cámaras do tipo A e dez cámaras do tipo B para minimizar o custo **0,25 puntos**

ANÁLISE (A puntuación máxima de cada exercicio é 3,5 puntos).

Exercicio 1.

Sexa $n(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{9}{2}t^2 + 18t$, $0 \leq t \leq 9$, o número de beneficiarios (en miles) durante os próximos t anos.

(a) **2,50 puntos:** *Intervalos de crecemento e de decrecemento*: **0,75 puntos**, detallados en:

– Calcular a derivada primeira da función $n'(t) = t^2 - 9t + 18$ **0,25 puntos**.

– Calculamos os puntos críticos $t^2 - 9t + 18 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = 6 \end{cases}$, e determinamos o signo da derivada primeira en cada un dos tres intervalos de proba

	(0, 3)	(3, 6)	(6, 9)
valor t	$t = 1$	$t = 4$	$t = 8$
signo $n'(t)$	$n'(1) > 0$	$n'(4) < 0$	$n'(8) > 0$

deducindo que nos intervalos (0, 3) e (6, 9) $n(t)$ é crecente **0,25 puntos**, e no intervalo (3, 6) $n(t)$ é decrecente **0,25 puntos**.

– *Máximos e mínimos* (absolutos e relativos): máximo relativo (3, 22,5) e máximo absoluto (9, 40,5) **0,25 puntos**. Mínimo relativo (6, 18) e mínimo absoluto (0, 0) **0,25 puntos**.

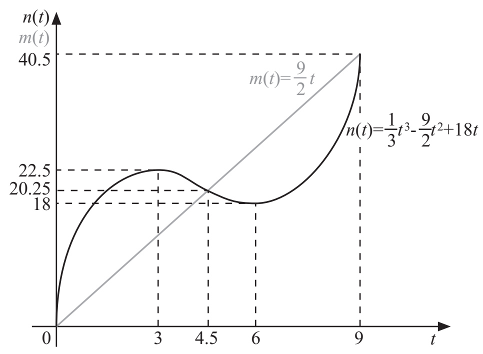
– *Punto de inflexión*: $n''(t) = 2t - 9$; $n''(t) = 0 \Rightarrow t = 9/2$

	(0, 9/2)	(9/2, 9)
valor t	$t = 1$	$t = 4$
signo $n''(t)$	$n''(1) < 0$	$n''(5) > 0$

No intervalo (0, 9/2) é cóncava para abaixo e no (9/2, 9) cóncava para arriba. Punto de inflexión (4,5, 20,25) **0,25 puntos**.

– *Número de beneficiarios máximo* = 40500 **0,25 puntos**.

– *Representación da función* $n(t)$ **0,75 puntos**:



(b) **1 punto**: Un segundo programa para o mesmo tipo de axuda vén dado por $m(t) = \frac{9}{2}t$, $0 \leq t \leq 9$, para saber se *nalgún ano o número de beneficiarios será o mesmo con ambos os programas* buscamos os valores de t para os que $n(t) = m(t)$, é dicir,

$$\frac{1}{3}t^3 - \frac{9}{2}t^2 + 18t = \frac{9}{2}t \Rightarrow t(2t^2 - 27t + 81) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 4,5 \\ t = 9 \end{cases}.$$

Polo tanto, o número de beneficiarios coincide con ambos os programas, no instante inicial $t = 0$ **0,25**

puntos, no punto de inflexión $t = 4{,}5$ **0,25 puntos** e ao finalizar os programas $t = 9$ **0,25 puntos**.

– *O intervalo de tempo no que o primeiro programa beneficiará a máis persoas que o segundo*, é dicir $n(t) > m(t)$, será segundo a representación gráfica das dúas funcións o intervalo (0, 4.5), ou sexa, dende o instante inicial ata os catro anos e medio **0,25 puntos**.

Exercicio 2.

A función $C(x) = 100\left(100 + 9x + \dfrac{144}{x}\right)$, $1 \le x \le 100$, expresa o custo total (en euros) de almacenamento e transporte e x a carga (en toneladas) de material.

(*a*) **0,50 puntos**: – Polo *custo total para unha carga dunha tonelada* $C(1) = 25300$ euros **0,25 puntos**. – Polo *custo total para unha carga de 100 toneladas* $C(100) = 100144$ euros **0,25 puntos**.

(*b*) **1,75 puntos**: Determinar a *derivada da función custo total* $C'(x) = 100\left(9 - \dfrac{144}{x^2}\right)$ **0,75 puntos**.

– Calcular os puntos críticos $C'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{144}{x^2} = 9 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$ (solución válida) **0,25 puntos**.

– *Xustificar* que en $t = 4$ hai un mínimo absoluto, calculando $C''(x) = \dfrac{28800}{x^3}$, $C''(4) > 0$ e tendo en conta os resultados de $C(1)$ e $C(100)$ obtidos no apartado primeiro, resultando que *para 4 toneladas de material o custo total é mínimo* **0,50 puntos**.

– *Calcular o custo mínimo* $C_{min} = C(4) = 17200$ euros **0,25 puntos**.

(*c*) **1,25 puntos**: Se deciden non admitir custos de almacenamento e envío superiores ou iguais a 75000 euros, ¿ata que carga de material poderían mover?, é dicir, para que valores de x é $C(x) < 75000$

– *Formular a inecuación* $100\left(100 + 9x + \dfrac{144}{x}\right) < 75000$

0,25 puntos. *Resolvemos* a correspondente ecuación de maneira que operando e simplificando resulta $9x^2 - 650x + 144 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2/9 \\ x = 72 \end{cases}$.

A solución $x = 2/9$ non é válida porque $x \ge 1$. Logo a solución é $x = 72$ **0,75 puntos**. "Poderían mover menos de 72 toneladas de material para que o custo non supere os 75000 euros". Solución: $1 \le x < 72$ **0,25 puntos**.

ESTATÍSTICA (A puntuación máxima de cada exercicio é 3,5 puntos).

Exercicio 1. Completamos os totais por filas e columnas na táboa dada para unha mostra de 500 falecementos, por grupo de idade e sexo

	GRUPO DE IDADE (anos)				
	0 – 10 (*D*)	11 – 30 (*T*)	31 – 50 (*C*)	*Maior de 50* (*V*)	
Homes (*H*)	200	20	25	60	305
Mulleres (*M*)	120	15	20	40	195
	320	35	45	100	500

(*a*) **1,50 puntos**: Describimos os sucesos pedidos e calculamos as súas probabilidades,

i) $H \cup T$: son *os homes falecidos ou ben os falecementos no grupo de idade de 11 a 30 anos.* **0,25 puntos**.

$$-P(H \cup T) = P(H) + P(T) - P(H \cap T) = \frac{305}{500} + \frac{35}{500} - \frac{20}{500} = 0{,}64$$

0,25 puntos.

ii) $M \cap (T \cup V)$: *mulleres falecidas e ou ben son do grupo de idade de 11-30 anos ou ben son maiores de 50 anos*. **0,25 puntos**.

– $P(M \cap (T \cup V)) = \dfrac{15+40}{500} = 0{,}11$ **0,25 puntos**.

iii) $\overline{T} \cap \overline{H}$: *mulleres falecidas e que non están no grupo de idade de 11 a 30 anos.* **0,25 puntos**.

– $P(\overline{T} \cap \overline{H}) = \dfrac{120+20+40}{500} = 0{,}36$ **0,25 puntos**.

(*b*) **1 punto**: Pide a *porcentaxe de falecementos con respecto ao sexo*, calculamos ou ben $P(H) = \dfrac{305}{500} = 0{,}61$ ou ben $P(M) = \dfrac{195}{500} = 0{,}39$ **0,75 puntos**.

O 61% dos falecidos (nesa mostra) son homes e o 39% son mulleres **0,25 puntos**.

(*c*) **1 punto**: No rango de idade de máis de 50 anos, ¿cal é a porcentaxe de homes falecidos?

Formulación $P(H/V)$ **0,25 puntos**. *Calculamos cos valores da táboa* $P(H/V) = \dfrac{60}{100} = 0{,}60$ **0,25 puntos**.

"No rango de idade de máis de 50 anos falece o 60% de homes" (polo tanto o 40% de mulleres) **0,25 puntos**.

¿É maior ou menor que a de mulleres nese mesmo rango de idade? De acordo cos resultados anteriores, concluímos que "no rango de maiores de 50 anos é maior a porcentaxe de homes falecidos" **0,25 puntos**.

Exercicio 2.

(*a*) **1 punto**: Sexa *"X* = renda anual (en euros) para unha familia do barrio ". $X : N(\mu = 20000, \sigma)$

Coñecemos que, de 100 familias seleccionadas ao chou dese barrio, 67 teñen renda anual inferior a 20660 euros e pregunta cal é o valor da desviación típica σ. Para iso *formulamos a condición dada no enunciado* mediante a correspondente probabilidade:

– $P(X < 20660) = 0{,}67$ **0,25 puntos**. – *Tipificación* $P\left(Z < \dfrac{20660-20000}{\sigma}\right) = 0{,}67$ **0,25 puntos**.

– *Uso das táboas* $\dfrac{660}{\sigma} = 0{,}44$ **0,25 puntos**.– *Cálculo de* $\sigma = 1500$ euros **0,25 puntos**.

(*b*) **1,25 puntos**: Se $X : N(20000,1500)$ pregunta a porcentaxe de mostras de 36 familias cuxa renda media anual supere os 19500 euros. Entón faremos o seguinte:

– *Determinar a distribución* de $\overline{X}$, $\overline{X} : N\left(\mu = 20000, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 250\right)$ **0,25 puntos**.– *Formular a probabilidade* pedida:

$P(\bar{X} > 19500)$ **0,25 puntos**. – *Tipificación*: $P(\bar{X} > 19500) = P\left(Z > \frac{19500-20000}{250}\right) = P(Z > -2)$ **0,25 puntos**.

– *Cálculo da probabilidade*: $P(Z > -2) = P(Z < 2) = 0{,}9772$ **0,25 puntos**.

– *Porcentaxe pedida*: "O 97,72% das mostras de 36 familias teñen renda media anual superior aos 19500 euros" **0,25 puntos**.

(*c*) **1,25 puntos**: Pregunta o número de familias que teriamos que seleccionar, como mínimo, para garantir, co 99% de confianza, unha estimación da renda media anual por familia cun erro non superior a 300 euros, entón

– *Obter* $z_{\alpha/2} = z_{0,005} = 2{,}575$ **0,25 puntos**.– *Formulación:* $z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq E \Rightarrow 2{,}575 \cdot \frac{1500}{\sqrt{n}} \leq 300$ **0,50 puntos**.

– *Cálculo de n*, $n \geq 165{,}76$ **0,25 puntos**.– *Expresión do valor (e valores) enteiro de n*: "Teriamos que seleccionar mostras de 166 familias ou máis" **0,25 puntos**.

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

O alumnado debe resolver só un exercicio de cada bloque temático. No caso de responder os dous, será cualificado coa nota do exercicio que figura co número 1 do bloque.

ÁLXEBRA (A puntuación máxima de cada exercicio é 3 puntos).

Exercicio 1.

(*a*) *Calcular a inversa da matriz A*, $A^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **1 punto**.

(*b*) **0,75 puntos**: Calculamos $C \cdot D = \begin{pmatrix} y+z \\ 3y \\ y+2z \end{pmatrix}$ **0,25 puntos**.

– *Obtemos* $C \cdot D - B = \begin{pmatrix} y+z+2x \\ 3y-4 \\ 2z \end{pmatrix}$ **0,25 puntos**. – Por último, a *orde da matriz* $C \cdot D - B$ é 3×1 **0,25 puntos**.

(*c*) **1,25 puntos**: Determinamos os valores de *x*, *y*, *z* que satisfán a identidade $A^{-1} \cdot B = C \cdot D - B$, primeiro calculamos $A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 4 \\ -y \\ -2x+2y \end{pmatrix}$ **0,25 puntos**.

– Igualdade de matrices $\begin{pmatrix} 4 \\ -y \\ -2x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+z+2x \\ 3y-4 \\ 2z \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$y + z + 2x = 4$
$3y - 4 = -y$ **0,25 puntos**.– *Resolución do sistema*,
$2z = -2x + 2y$

obtendo a solución $x = 2$, $y = 1$, $z = -1$ **0,75 puntos** (**0,25 puntos** por cada incógnita).

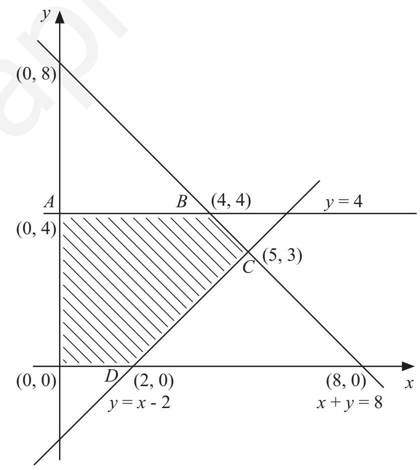
Exercicio 2.

Sexan "*x*" o número de porróns e "*y*" o número de olas que un oleiro elabora diariamente.

– *Formular o sistema de inecuacións:* $x + y \leq 8$; $y \leq 4$; $x \leq y + 2$; $x \geq 0$ *e* $y \geq 0$ **1 punto** (**0,25 puntos** por cada unha das tres primeiras desigualdades + **0,25 puntos** polas dúas últimas).

– *Vértices da rexión factible* **1 punto**, obter os cinco vértices: *O* (0, 0); *A* (0, 4); *B* (4, 4); *C* (5, 3); *D* (2, 0) (**0,50 puntos** polos tres puntos de corte cos eixes *O*, *A* e *D* + **0,25 puntos** polo vértice *B* + **0,25 puntos** polo *C*).

– *Representación gráfica da rexión factible* **0,50 puntos**:



– *Optimización*: A función obxectivo $f(x,y) = 6x + 4y$ maximízase no vértice *C* (5, 3), entón "*deberá elaborar cada día 5 porróns e 3 olas para obter un beneficio máximo*" **0,25 puntos**, *sendo este beneficio de 42 euros* **0,25 puntos**.

ANÁLISE (A puntuación máxima de cada exercicio é 3,5 puntos).

Exercicio 1.

Estímase que a función $V(t) = -2t^3 + 9t^2 + 240t + 1200$, $0 \leq t \leq 12$, representa o valor (en euros) do investimento que fai un individuo, en accións de certa compañía, no transcurso de *t* meses.

(*a*) *Investimento inicial*: $V(0) = 1200$ euros **0,25 puntos**.

(*b*) **1,50 puntos**. *¿Entre que meses o valor do seu investimento creceu? ¿e entre cales decreceu?*

– Calcular a derivada primeira da función $V'(t) = -6t^2 + 18t + 240$ **0,25 puntos**.– Calculamos os puntos críticos $V'(t) = 0 \Rightarrow t^2 - 3t - 40 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -5 \text{ (solución non válida)} \\ t = 8 \text{ (punto crítico)} \end{cases}$

0,25 puntos, e determinamos os intervalos de crecemento e de decrecemento por medio do signo da derivada primeira en cada un dos intervalos de proba

	(0, 8)	(8, 12)
valor t	$t = 1$	$t = 10$
signo $V'(t)$	$V'(1) > 0$	$V'(10) < 0$

deducindo que no intervalo (0, 8) $V(t)$ é crecente **0,25 puntos**, e no (8, 12) $V(t)$ é decrecente **0,25 puntos**.

Concluímos respondendo á pregunta do exercicio: "*Dende o momento inicial ao oitavo mes o valor do seu investimento creceu*" **0,25 puntos**. "*Dende o oitavo ao duodécimo mes decreceu o seu investimento*" **0,25 puntos**.

(*c*) **0,75 puntos**.

– Vende as súas accións transcorridos os 12 meses, logo o valor do seu investimento aos doce meses é: $V(12) = 1920$ euros **0,25 puntos**.

– O momento óptimo para vender, xa que en $t = 8$ hai un máximo absoluto, é o valor máximo da función, valor do seu investimento no 8º mes : $V(8) = 2672$ euros **0,25 puntos**.– Perde por non telas vendido no momento óptimo 2672 – 1920 = 752 euros **0,25 puntos**.

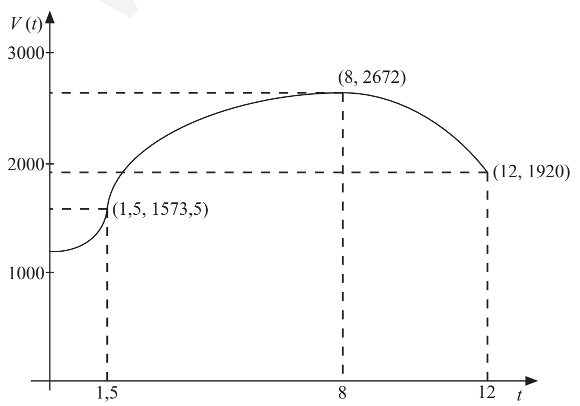
(*d*) **1 punto** – *Punto de inflexión e representación gráfica*

– Calcular a derivada segunda $V''(t) = -12t + 18$; $V''(t) = 0 \Rightarrow t = 3/2$ **0,25 puntos**.

	(0, 3/2)	(3/2, 12)
valor t	$t = 1$	$t = 2$
signo $V''(t)$	$V''(1) > 0$	$V''(2) < 0$

No intervalo (0, 3/2) é cóncava para arriba e no (3/2, 12) cóncava para abaixo. Punto de inflexión (1,5, 1573,5) **0,25 puntos**.

– *Representación da función* $V(t)$ **0,50 puntos**:



Exercicio 2.

A función $P(t) = 40\left(1 - e^{-0,05t}\right)$, $t \geq 0$, expresa a porcentaxe de habitantes da cidade que fará un donativo en función do tempo t que é o número de días que dura a campaña para recadar fondos.

(*a*) **0,50 puntos**: – Porcentaxe de habitantes da cidade que fará un donativo despois de 10 días de iniciada a campaña: $P(10) = 40\left(1 - e^{-0,05 \cdot 10}\right) \cong 15,74$ "*Despois de 10 días de iniciada a campaña, estímase que fará un donativo aproximadamente o 15,74% dos habitantes desa cidade*" **0,25 puntos**.

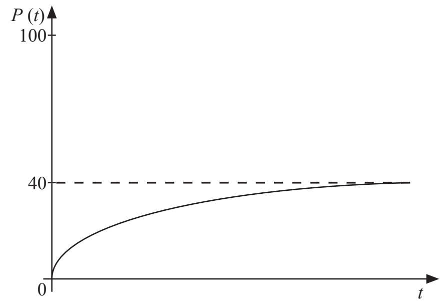
– Despois de 20 días: $P(20) = 40\left(1 - e^{-0,05 \cdot 20}\right) \cong 25,28$ "*Despois de 20 días estímase que fará un donativo aproximadamente o 25,28% dos habitantes desa cidade*" **0,25 puntos**.

(*b*) **1,25 puntos**: Determinar a *derivada da función* $P(t)$: $P'(t) = 2e^{-0,05t}$(%/día) é a razón de cambio da porcentaxe de doadores con respecto aos días de campaña transcorridos **0,75 puntos**.

– A función $P(t)$ é unha función crecente no $(0, +\infty)$, xa que por ser a función exponencial sempre positiva temos que $P'(t) > 0$, para todo $t \in (0, +\infty)$ **0,50 puntos**.

(*c*) **1,25 puntos**: Calcular: $\lim_{t \to +\infty} P(t) = \lim_{t \to +\infty} 40\left(1 - e^{-0,05t}\right) = 40$ **1 punto**.

– Xustificar se se supera nalgún día o 40% de doadores: "*Non se supera o 40% de doadores*", e podemos xustificalo de diversas formas: co esbozo da gráfica da función, ou ben dicindo que $P(t) = 40$ é unha asíntota horizontal e $P(t)$ é crecente no $(0, +\infty)$, ou tamén que para $t \to +\infty$, $P(t) \to 40^-$ (con valores inferiores a 40).



(*d*) **0,50 puntos**: Se a cidade ten 100000 habitantes e se cada doador contribúe con 2 euros, calcula o total que se terá recadado ao cabo de 20 días.– Determinar o número de doadores aos 20 días: 25,28% (100000) = 25280 doadores **0,25 puntos**.– Cálculo do total recadado: $25280 \times 2 = 50560$ euros **0,25 puntos**.

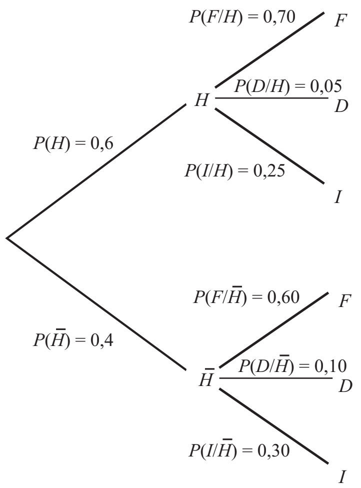
ESTATÍSTICA (A puntuación máxima de cada exercicio é 3,5 puntos).

Exercicio 1.

(*a*) **1.50 puntos**: Denominamos os sucesos:

H: *un traballador proba a ferramenta*, $\overline{H}$: *un traballador non proba a ferramenta*, *F*: *un traballador dá unha opinión favorable*, *D*: *dá unha opinión desfavorable*, *I*: *opina que lle é indiferente*.

Os datos que recollemos do enunciado son:



$$\begin{cases} P(H)=0,60 & P(\bar{H})=0,40 \\ P(F/H)=0,70 & P(F/\bar{H})=0,60 \\ P(D/H)=0,05 & P(D/\bar{H})=0,10 \\ P(I/H)=0,25 & P(I/\bar{H})=0,30 \end{cases} \quad (*)$$

– S*e un traballador dá unha opinión desfavorable, ¿cal é a probabilidade de que probara a ferramenta?*

– Formulación do enunciado $P(H/D)$ **0,25 puntos**.– Expresión da probabilidade condicionada $\frac{P(H \cap D)}{P(D)}$ **0,25 puntos**.– Formulación do cociente anterior $\frac{P(H \cap D)}{P(D)} = \frac{P(H) \cdot P(D/H)}{P(H) \cdot P(D/H) + P(\bar{H}) \cdot P(D/\bar{H})}$ **0,50 puntos**.

– Identificar cada unha das probabilidades da fórmula anterior e chegar ao resultado final: $P(H/D) = \frac{0,6 \cdot 0,05}{0,6 \cdot 0,05 + 0,4 \cdot 0,10} = \frac{3}{7}$ **0,50 puntos**.

(*b*) **1,25 puntos**: *¿Que porcentaxe de traballadores dá unha opinión favorable? ¿Comercializará a empresa a ferramenta? Razoa a resposta.*

– Formular a probabilidade $P(F)$ **0,25 puntos**.– Expresión de $P(F) = P(H) \cdot P(F/H) + P(\bar{H}) \cdot P(F/\bar{H})$ **0,25 puntos**.– Identificar as probabilidades anteriores e operar $P(F) = 0,6 \cdot 0,7 + 0,4 \cdot 0,6 = 0,66$ **0,25 puntos**.– Responder á pregunta: "*O 66% dos traballadores dá unha opinión favorable*" **0,25 puntos**.

O exercicio dinos que a empresa comercializará a ferramenta se polo menos o 65% dos traballadores do sector dá unha opinión favorable, polo tanto "*a empresa comercializará a ferramenta*" xa que $P(F) = 0,66 > 0,65$ **0,25 puntos**.

(*c*) **0,75 puntos**: *Calcula a porcentaxe de traballadores que proba a ferramenta e opina que lle é indiferente.*

– Formulación da probabilidade $P(H \cap I)$ **0,25 puntos**.– Expresión e cálculos na probabilidade anterior $P(H \cap I) = P(H) \cdot P(I/H) = 0,6 \cdot 0,25 = 0,15$ **0,25 puntos**.– O 15% dos traballadores proba a ferramenta e opina que lle é indiferente **0,25 puntos**.

Podemos facer unha táboa de continxencia,

	F	D	I	
H	42	3	15	60
$\bar{H}$	24	4	12	40
	66	7	27	100

pola táboa ben feita serían **2 puntos**, ou un diagrama de árbore, ou especificar as probabilidades do enunciado do exercicio (*) (**0,75 puntos** por calquera das dúas opcións). Os puntos que restan ata chegar aos 3,5 totais repártense en cada apartado entre formulación da pregunta, cálculos necesarios para chegar ao resultado e contestar á pregunta específica do apartado.

Exercicio 2.

Sexa *"X = tempo, en minutos, que tarda un adulto en ensamblar un xoguete"* $X : N(\mu, \sigma = 5)$.

(*a*) **1,25 puntos**. *Seleccionada ao chou unha mostra de n = 64 adultos a súa media resultou ser de 20 minutos. ¿Entre que valores se atopa o tempo medio real de ensamblaxe, cunha confianza do 95%?*

– Expresión do intervalo de confianza , $P\left(\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$ **0,50 puntos**.

– Calcular numericamente os extremos do intervalo

$$\begin{cases} 20 - 1,96\frac{5}{\sqrt{64}} = 20 - 1,225 = 18,775 \\ 20 + 1,96\frac{5}{\sqrt{64}} = 20 + 1,225 = 21,225 \end{cases}$$ **0,50 puntos**.

– Especificar entre que valores se atopa o tempo medio real de ensamblaxe: "*Estímase que o tempo medio real de ensamblaxe estará entre 18,775 e 21,225 minutos, cun 95% de confianza*". **0,25 puntos**.

(*b*) **1,50 puntos**. *Supoñamos que* $\mu = 20$ *minutos. Por razóns comerciais decide cambiar o modelo si o tempo medio de ensamblaxe, en mostras de 64 adultos, é superior a 21 minutos, ¿con que probabilidade tomará esa decisión?*

– Determinar a distribución de $\bar{X}$, $\bar{X} : N\left(\mu = 20 , \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{5}{8} = 0,625\right)$ **0,50 puntos**.– Formular a probabilidade pedida: $P(\bar{X} > 21)$ **0.25 puntos**.– Tipificación: $P(\bar{X} > 21) = P\left(Z > \frac{21 - 20}{0,625}\right) = P(Z > 1,6)$ **0.25 puntos**.

– Paso a táboas $P(Z > 1,6) = 1 - P(Z \le 1,6)$ **0.25 puntos**.– Resultado $P(\bar{X} > 21) = 1 - 0,9452 = 0,0548$ **0.25 puntos**.

(*c*) **0,75 puntos**. *Calcula cantos adultos deberá seleccionar, como mínimo, para garantir cun 95% de confianza unha estimación do devandito tempo medio cun erro máximo non superior a un minuto.*

– Formular a inecuación correspondente ao error pedido: $z_{\alpha/2}\,\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 1$ **0.25 puntos**.

– Cálculo de "n" na desigualdade: $1{,}96 \cdot \dfrac{5}{\sqrt{n}} \leq 1$, obtendo $n \geq 96{,}04$ **0.25 puntos**.

– Expresión do valor (e valores) enteiros de n, "*deberá seleccionar mostras de 97 adultos ou máis, para garantir unha estimación do tempo medio de ensamblaxe cun erro máximo non superior a un minuto*" **0.25 puntos**.