UNIDAD 8: DERIVADAS

Primero, la derivada fue usada, después descubierta,
explorada y desarrollada y, finalmente, definida.
Judith V. Grabiner

1. DEFINICIÓN DE DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

En toda la unidad y salvo que expresamente se diga otra cosa, $D \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo de números reales.

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real de variable real y $a \in D$. Se llama derivada de la función f en el punto a al límite siguiente, si existe y es finito:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad [1]$$

Dicho límite, caso de existir, se representa[1] por:

$$f'(a) = \frac{df(a)}{dx} = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a}$$

$f'(a)$ se lee f prima en a (derivada de f en a)

$\dfrac{df(a)}{dx}$ se lee derivada de f respecto de x en a

Si en la definición anterior hacemos el cambio de variable $a+h=x$, el límite [1] se escribe como sigue:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad [2]$$

Los límites [1] y [2] son simplemente dos formulaciones «distintas» del concepto de derivada de una función en un punto. ¿Cuál usar entonces? La respuesta es que podemos usar una u otra indistintamente porque con ambas vamos a llegar al mismo resultado.

Ejemplos:

Calculamos la derivada de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x) = x^5$ en $a = 0$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^5-0}{x-0} = \lim_{x\to 0} x^4 = 0$$

[1] La notación $\frac{d}{dx} f(a)$ fue introducida por Leibniz (1646-1716), y en ella se entiende que $\frac{d}{dx}$ es un operador, mientras que la notación $f'(a)$ fue introducida por Lagrange (1736-1813) y la notación $\dot{f}(a)$ se suele usar en física, ingeniería…

b) $f(x) = x^2 + x + 1$ en $a = 0$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + x + 1 - 1}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x+1)}{x} = \lim_{x\to 0}(x+1) = 1$$

c) $f(x) = x^2 + 1$ en $a = 2$

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2 + 1 - 5}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 4h}{h} = \lim_{h\to 0}(h+4) = 4$$

d) $f(x) = x^3$ en $a = 1$

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^3 - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3 + 3h^2 + 3h}{h} = \lim_{h\to 0}(h^2 + 3h + 3) = 3$$

Si $B \subseteq D$, diremos que f es derivable en B cuando f sea derivable en todos los puntos de B. Sea $C = \{a \in D : f \text{ es derivable en } a\}$. Definimos la función derivada de f por:

$$f' : C \to \mathbb{R}$$
$$a \in C \mapsto f'(a)$$

2. CARACTERIZACIÓN

Derivadas laterales:

f derivable por la izquierda en $x = a \Leftrightarrow \exists f'(a-) = \lim_{x\to a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

f derivable por la derecha en $x = a \Leftrightarrow \exists f'(a+) = \lim_{x\to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Caracterización:

f derivable en $x = a \Leftrightarrow \exists f'(a-), f'(a+)$ y $f'(a-) = f'(a+)$

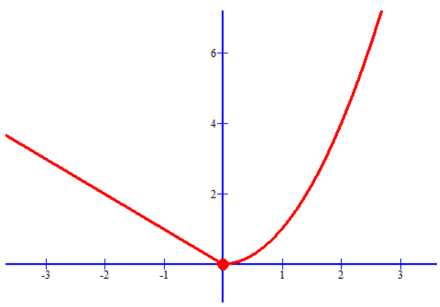
Ejemplos:

Vamos a estudiar la derivabilidad de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$ en $a = 0$

$$f_+'(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{x\to 0+} \frac{h^2}{h} = \lim_{x\to 0+} h = 0$$

$$f_-'(0) = \lim_{x\to 0-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{x\to 0-} \frac{-h}{h} = \lim_{x\to 0+}(-1) = -1$$

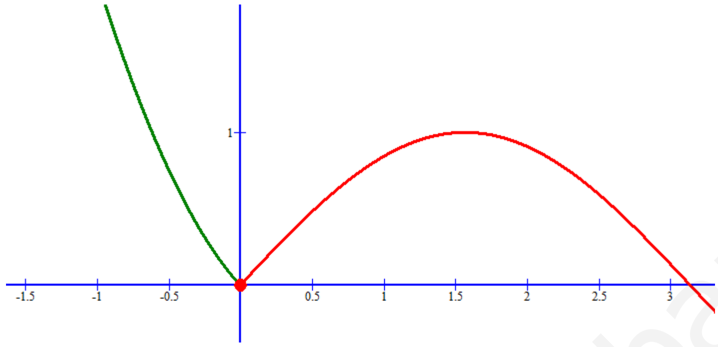


Las derivadas laterales en 0 existen, pero no son iguales, luego la función no es derivable en 0.

b) $f(x)=\begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ x^2 - x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$ en $a=0$

$$f'_{+}(0)=\lim_{x\to 0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{x\to 0+}\frac{\operatorname{sen} h}{h}=1$$

$$f'_{-}(0)=\lim_{x\to 0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{x\to 0-}\frac{h^2-h}{h}=\lim_{x\to 0-}\frac{\cancel{h}(h-1)}{\cancel{h}}=-1$$



Las derivadas laterales en 0 existen, pero no son iguales, luego la función no es derivable en 0.

3. RELACIÓN CON LA CONTINUIDAD

Propiedad 1: Si una función $f: D\subseteq \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es derivable en un punto a, entonces es continua en a.

Demostración:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)+f(a)\right]=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\lim_{x\to a}(x-a)+\lim_{x\to a} f(a)=$$

$$=f'(a)\cdot 0+f(a)=f(a)$$ C.Q.D.

El recíproco es falso:

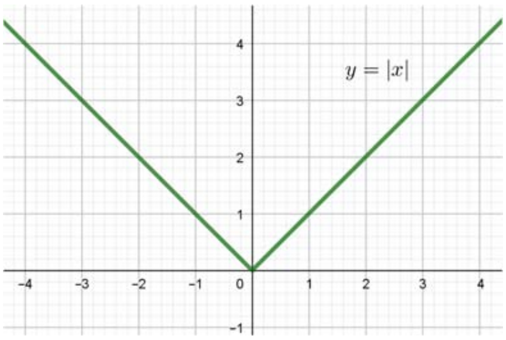
Contraejemplo: La función $f(x)=|x|$ es continua en $x_0=0$ pero no es derivable en dicho punto.

Continuidad en $x_0=0$:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-}|x|=\lim_{x\to 0-}(-x)=0 \\ \lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}|x|=\lim_{x\to 0+} x=0 \end{aligned}\right\}\Rightarrow \exists \lim_{x\to 0}|x|=0$$ y $f(0)=|0|=0$, luego $f(x)$ es continua en $x_0=0$.

Derivabilidad en $x_0=0$:

$$\left.\begin{aligned} f'(0-)=\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{-x}{x}=-1 \\ f'(0+)=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{x}{x}=1 \end{aligned}\right\}\Rightarrow$$ no existe $f'(0)$ y, por tanto, $y=|x|$ no es derivable en $x_0=0$.



Resumiendo:
- *f* es continua en 0
- *f* no es derivable en 0
- La gráfica de *f* no tiene recta tangente en 0

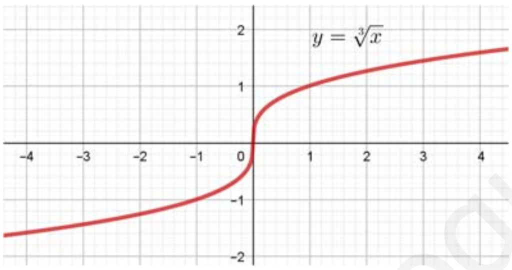
<u>Otro contraejemplo más</u>: La función $y = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ es continua en $x_0 = 0$ pero no es derivable en dicho punto.

Continuidad en $x_0 = 0$:

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x^{1/3} = 0 = f(0)$, luego $f(x)$ es continua en $x_0 = 0$.

Derivabilidad en $x_0 = 0$:

$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^{1/3} - 0}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{2/3}} = \left[\frac{1}{0}\right] = +\infty \Rightarrow \nexists f'(0)$, y, por tanto, $y = x^{1/3}$ no es derivable en $x_0 = 0$.



Resumiendo:
- f es continua en 0
- f no es derivable en 0
- La gráfica de f tiene una recta tangente vertical en 0

Este resultado también se puede utilizar en *sentido negativo*:

<u>Propiedad 1':</u> Si f no es continua en a, entonces no puede ser derivable en dicho punto.

Como consecuencia, *siempre que nos pidan estudiar la derivabilidad de una función, comenzaremos por estudiar su continuidad.*

<u>Resumen:</u>

$$\boxed{f \text{ derivable en } a \Rightarrow f \text{ continua en } a}$$

$$\boxed{f \text{ NO continua en } a \Rightarrow f \text{ NO derivable en } a}$$

<u>4. OPERACIONES CON FUNCIONES DERIVABLES</u>

4.1. Suma

La función derivada de una suma de funciones derivables es la suma de las funciones derivadas:

$$\boxed{(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)}$$

Demostración:

Si f y g son derivables en a, entonces:

$$(f+g)'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(a+h)-(f+g)(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)+g(a+h)-f(a)-g(a)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h)-g(a)}{h} = f'(a)+g'(a)$$

4.2. Producto de un número real por una función

La función derivada del producto de una constante por una función derivable es la constante por la función derivada de la función:

$$\boxed{(\alpha f)'(x) = \alpha \cdot f'(x)}$$

Demostración:

Si f es derivable en a y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces:

$$(\alpha f)'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{(\alpha f)(a+h)-(\alpha f)(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\alpha f(a+h)-\alpha f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\alpha \cdot \left[f(a+h)-f(a)\right]}{h} =$$
$$= \alpha \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \alpha \cdot f'(a)$$

4.3. Producto de funciones

La función derivada de un producto de funciones derivables es igual a la derivada del primer factor por el segundo sin derivar más el primer factor si derivar por la derivada del segundo factor:

$$\boxed{(f\cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}$$

Demostración:

Si f y g son derivables en a, entonces:

$$(fg)'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{(fg)(a+h)-(fg)(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a)}{h} =$$
$$\underset{[1]}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a+h)+f(a)g(a+h)-f(a)g(a)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left[f(a+h)-f(a)\right]g(a+h)+f(a)\left[g(a+h)-g(a)\right]}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} g(a+h) + \lim_{h\to 0} f(a) \frac{g(a+h)-g(a)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} g(a+h) + f(a) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h)-g(a)}{h} =$$
$$= f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

donde en [1] hemos sumado y restado $f(a)g(a+h)$.

4.4. Función recíproca de una función

La derivada de la función recíproca de una función derivable viene dada por:

$$\boxed{\left(\frac{1}{f}\right)'(x)=\frac{-f'(x)}{f(x)^2}}$$

Demostración:

Si f es derivable en a, entonces:

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{1}{f}\right)(a+h)-\left(\frac{1}{f}\right)(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{f(a+h)}-\frac{1}{f(a)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a+h)}{h\cdot f(a+h)f(a)}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(-\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1}{f(a+h)f(a)}=-f'(a)\cdot\frac{1}{f^2(a)}=-\frac{f'(a)}{f^2(a)}$$

4.5. Cociente de funciones

La función derivada de un cociente de funciones derivables es igual al cociente de la derivada del numerador por el denominador sin derivar menos el numerador sin derivar por la derivada del denominador, entre el denominador al cuadrado:

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}}$$

Demostración:

Si f y g son derivables en a, entonces:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'(a)=f'(a)\frac{1}{g(a)}+f(a)\left(\frac{-g'(a)}{g^2(a)}\right)=\frac{f'(a)f(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

4.6. Composición de funciones: regla de la cadena

Sean $f:A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:B\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funciones reales de variable real con $f(A)\subseteq B$. Supongamos que *f* es derivable en *a* y que *g* es derivable en $b=f(a)$. Entonces:

$$\boxed{(g\circ f)'(a)=g'(f(a))f'(a)}$$

Demostración:

$$(g\circ f)'(a)=\lim_{x\to a}\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{g(f(a))-g(f(a))}{x-a}\underset{[1]}{=}$$

$$=\lim_{x\to a}\left(\frac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)}\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=g'(f(a))\cdot f'(a)$$

donde en [1] hemos multiplicado y dividido por $f(x)-f(a)$, que sabemos que es distinto de cero.

6. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA

Si f es continua en x_0, la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(x_0, f(x_0))$ es:

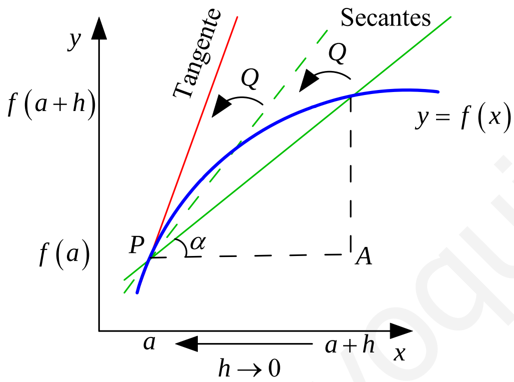
i) la recta que pasa por P y tiene pendiente

$$m(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

si este límite existe.

ii) la recta $x=x_0$ si $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\infty$

Aclaración: esta definición proviene del hecho de que la recta tangente a una función en un punto x_0 es el límite de la recta secante a la función, cuando el otro punto de corte de la recta secante y la función tiende a x_0.

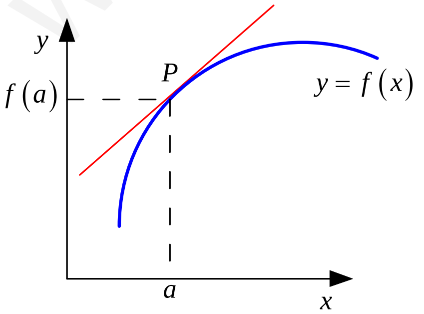


La derivada de una función en un punto es igual a la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto, es decir,

$$\operatorname{tg}\alpha=f'(a)=m_{\text{recta tangente}}$$

5. ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE

Ecuación de la recta tangente:



La ecuación de la recta tangente a la función $y=f(x)$ en el punto de abscisa $x=a$ es:

$$\boxed{y-f(a)=f'(a)(x-a)}$$

7. DERIVADA DE ALGUNAS FUNCIONES

A modo de ejemplo calcularemos las funciones derivadas de algunas funciones elementales. A la vez que practicamos el cálculo de derivadas aplicando la definición, también nos sirve para construir la conocida tabla de derivadas y que esta no aparezca como por arte de magia.

1) La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=c$ es derivable en cualquier punto $a\in\mathbb{R}$. Su derivada viene dada por:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{c-c}{x-a}=0$$

2) La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x$ es derivable en cualquier punto $a\in\mathbb{R}$ y su derivada es:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{x-a}=1$$

3) La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^n$ es derivable en cualquier punto $a\in\mathbb{R}$. Para calcular su función derivada utilizaremos la fórmula del binomio de Newton:

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^n-a^n}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{\binom{n}{0}a^n h^0}+\binom{n}{1}a^{n-1}h+\ldots+\binom{n}{n-1}ah^{n-1}+\binom{n}{n}a^0h^n-\cancel{a^n}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{na^{n-1}h+\binom{n}{2}a^{n-2}h^2+\ldots+\binom{n}{n-1}ah^{n-1}+\binom{n}{n}ah^n}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}\left[na^{n-1}+\binom{n}{2}a^{n-2}h+\ldots+\binom{n}{n-1}ah^{n-2}+\binom{n}{n}ah^{n-1}\right]}{\cancel{h}}=na^{n-1}$$

4) La función $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x}$, es derivable en cualquier $a\in(0,+\infty)$. Su derivada es:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}{(x-a)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{a}\right)^2}{(x-a)\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)}=\lim_{x\to a}\frac{\cancel{(x-a)}}{\cancel{(x-a)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}=\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

5) La función exponencial $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x$, es derivable en cualquier $a\in\mathbb{R}$.

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{a+h}-e^a}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^a\left(e^h-1\right)}{h}=e^a$$

teniendo en cuenta que

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$$

6) La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\operatorname{sen} x,$ es derivable en cualquier $a\in\mathbb{R}$.

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(a+h)-\operatorname{sen} a}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{h}{2}}{h}=\cos a$$

donde hemos tenido en cuenta que

$$\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} y=2\cos\frac{x+y}{2}\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}$$

y que

$$\lim_{h\to 0}\frac{sen\, {}^{h}\!/_{2}}{{}^{h}\!/_{2}}=1$$

7) La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos x,$ es derivable en cualquier $a\in\mathbb{R}$. Su función derivada se puede obtener teniendo en cuenta que $\cos x=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\quad\forall x\in\mathbb{R}$ y aplicando la regla de la cadena:

$$f'(a)=-\operatorname{sen} a$$

8) La función $\begin{array}{l}\operatorname{tg}:\mathbb{R}-\left\{k\pi+\frac{\pi}{2}:k\in\mathbb{Z}\right\}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto \operatorname{tg} x\end{array}$ es derivable en cualquier punto de su dominio y su derivada viene dada por:

$$\operatorname{tg}' x=\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)'(x)=\frac{\cos x\cos x-\operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=$$

$$=1+\operatorname{tg}^2 x=\sec^2 x$$

9) La función $\begin{array}{l}\log_a:(0,+\infty)\to\mathbb{R}\\ x\mapsto \log_a x\end{array}$ es derivable en cualquier $x_0\in(0,+\infty)$. Su función derivada viene dada por:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x_0+h)-\log_a x_0}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a\frac{x_0+h}{x_0}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{h}{x_0}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{x_0}{x_0}\log_a\left(1+\frac{h}{x_0}\right)=$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{x_0} \log_a \left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{h}} = \frac{1}{x_0} \log_a \left(\lim_{h\to 0} \left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{h}} \right) =$$

$$= \frac{1}{x_0} \log_a \left(\lim_{h\to 0} \left(1+\frac{1}{\frac{x_0}{h}}\right)^{\frac{x_0}{h}} \right) = \frac{1}{x_0} \log_a e$$

En particular la función $\begin{array}{c} \log : (0,+\infty) \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \log x \equiv \ln x \end{array}$ es derivable en cualquier $x_0 \in (0,+\infty)$, y su derivada viene dada por: $\ln' x = \frac{1}{x}$

8. TABLAS DE DERIVADAS

Tabla de derivadas (de funciones simples)

Función	**Derivada**
$y = c \in \mathbb{R}$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = \sqrt[n]{x}$	$y' = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$y = a^x$ con $a > 0$	$y' = a^x \ln a$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x} \log_a e$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \text{sen}\, x$	$y' = \cos x$

$y = \cos x$	$y = -\ \text{sen}\ x$
$y = \text{tg}\, x$	$y' = 1 + \text{tg}^2 x$

Aplicando la regla de la cadena, obtenemos la siguiente tabla de derivadas para funciones compuestas:

Tabla de derivadas, para funciones compuestas:

Función	**Derivada**
$y = f(x)^n$	$y' = n \cdot f(x)^{n-1} \cdot f'(x)$
$y = \sqrt{f(x)}$	$y' = \dfrac{f'(x)}{2 \cdot \sqrt{f(x)}}$
$y = \sqrt[n]{f(x)}$	$y' = \dfrac{f'(x)}{n \cdot \sqrt[n]{f(x)^{n-1}}}$
$y = a^{f(x)}$ con $a > 0$	$y' = f'(x) \cdot a^{f(x)} \cdot \ln a$
$y = e^{f(x)}$	$y' = f'(x) \cdot e^{f(x)}$
$y = \log_a f(x)$	$y' = \dfrac{f'(x)}{f(x)} \cdot \log_a e$
$y = \ln f(x)$	$y' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$
$y = \text{sen}\, f(x)$	$y' = f'(x) \cdot \cos f(x)$
$y = \cos f(x)$	$y = -f'(x)\ \cdot \text{sen}\, f(x)$
$y = \text{tg}\, f(x)$	$y' = f'(x) \cdot \left[1 + \text{tg}^2 f(x)\right]$

9. EJERCICIOS

1. Calcula la derivada de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x) = x^2$ en $a = 1$

b) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ en $a = 2$

c) $f(x) = \dfrac{3}{x}$ en $a = 2$

2. Calcula la función derivada de $f(x) = x^2$

3. Calcula la función derivada de $f(x) = x^3 - 2x + 1$ y como aplicación calcula $f'(3), f'(-2)$ y $f'(0)$.

4. Indica en qué puntos es derivable la siguiente función y halla $f'(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & \text{si } x \le 0 \\ x^3 + 3x & \text{si } 0 < x < 2 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

5. Halla el valor de a para que $f(x)$ sea derivable en $x = 1$, siendo $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x \le 1 \\ ax + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

6. Dada la función

$$f(x) = \left|1 - x^2\right| = \begin{cases} x^2 - 1 & x < -1 \\ 1 - x^2 & -1 \le x \le 1 \\ x^2 - 1 & x > 1 \end{cases}$$

Estudiar la continuidad, la derivabilidad y representarla gráficamente.

7. Consideremos la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & 0 < x < b \\ 1 - \dfrac{1}{4}x & b \le x \end{cases}$

Se pide:

a) Determinar el valor de b para que sea continua.

b) ¿Es derivable f en el valor de b calculado en el apartado anterior?

8. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

1) $f(x) = 7x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 4$

2) $f(x) = 5x^4 + 3x^2 + 2x - 7$

3) $f(x) = (3x-1)(5x^2 + 3x - 2)$

17) $f(x) = \operatorname{tg} x \operatorname{sen} x$

18) $f(x) = \cos x \operatorname{tg} x$

19) $f(x) = e^x \operatorname{tg} x$

4) $f(x)=\dfrac{4x^2+1}{7x+1}$

5) $f(x)=x-\dfrac{1}{x}+\sqrt[3]{x}$

6) $f(x)=\left(x-\sqrt{x}\right)\left(x+\sqrt{x}\right)$

7) $f(x)=\dfrac{(3x-1)(2x+3)}{x^2+7}$

8) $f(x)=\left(5x^2-3x+1\right)\dfrac{2x}{5x+3}$

9) $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt[5]{x^3}+\sqrt{x^5}$

10) $f(x)=\dfrac{(3x-1)^2-(3x+1)^2}{2-x^2}$

11) $f(x)=\dfrac{1}{3x^2-5x+2}$

12) $f(x)=\dfrac{1}{5x-3}\left(3x^2-x+2\right)$

13) $f(x)=\left(x^2+3x\right)\operatorname{sen}x$

14) $f(x)=3^x$

15) $f(x)=\dfrac{x\operatorname{tg}x}{x+1}$

16) $f(x)=5^x$

20) $f(x)=2^x\ln x$

21) $f(x)=e^x\log_{10}x$

22) $f(x)=\log_5 x\cos x$

23) $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}x}{\operatorname{tg}x}$

24) $f(x)=\dfrac{2^x}{\ln x}$

25) $f(x)=\dfrac{x^2}{\ln x}$

26) $f(x)=\operatorname{sen}x\cos x$

27) $f(x)=\operatorname{sen}x+e^x\operatorname{sen}x$

28) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}x+\cos x}$

29) $f(x)=\dfrac{3^x\operatorname{sen}x}{2x+e^x}$

30) $f(x)=\log_5 x\log_7 x$

31) $f(x)=e^x\operatorname{sen}x$

32) $f(x)=\dfrac{\left(x^2-3x+2\right)\operatorname{sen}x}{1+\operatorname{tg}x}$

9. Calcula la derivada de las siguientes funciones compuestas:

1) $f(x)=\operatorname{sen}\left(2x^2-3x\right)$

2) $f(x)=\ln(3x+1)$

3) $f(x)=e^{5x}$

4) $f(x)=\operatorname{tg}(2-3x)$

5) $f(x)=\left(x^2-5x+2\right)^7$

6) $f(x)=e^{\operatorname{sen}x}$

7) $f(x)=3^{1+\operatorname{sen}x+\cos x}$

8) $f(x)=\log_7(4+\operatorname{sen}x)$

9) $f(x)=\operatorname{sen}^2x$

10) $f(x)=\operatorname{tg}^3x$

11) $f(x)=3^{x^2+2}\operatorname{sen}x$

12) $f(x)=\left(3x^2-2\right)\operatorname{sen}(5x)$

13) $f(x)=\left(x^2+1\right)^5$

14) $f(x)=\operatorname{sen}^3x$

15) $f(x)=\operatorname{sen}\left(x^3\right)$

16) $f(x)=\operatorname{sen}^2x\cos^2x$

17) $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}(5x+2)}{\cos(3x-1)}$

18) $f(x)=e^{\operatorname{sen}x}\cos x$

19) $f(x)=\log_5(3x+1)$

20) $f(x)=\ln(\operatorname{tg}x)$

21) $f(x)=\operatorname{sen}(\cos(3x))$

22) $f(x)=\sqrt{5x^2-3x+2}$

23) $f(x)=\sqrt[3]{\left(3-2x^2\right)^2}$

24) $f(x)=\sqrt[4]{x^2-3x+1}$

10. Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)=x^3$ en el punto de abscisa $x=-1$.

11. Calcula la ecuación de la recta tangente a $f(x)=\dfrac{4}{x^2}$ en el punto de abscisa $x=2$.

12. Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)=2x^3-x^2$ en el punto de abscisa $x=3$.

13. Dada $f(x)=x^2-10x+9$, halla el punto en el que la recta tangente a la gráfica de f es paralela al eje de abscisas.

14. Calcula la ecuación de la recta tangente de las siguientes funciones, en $x=0$:

1) $y=x^3-4x^2+4x$
2) $y=x^3-x$
3) $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$
4) $y=\dfrac{x}{x^2+1}$
5) $y=\ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)$
6) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$
7) $y=x^3-x^2$
8) $y=x^5$
9) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$
10) $y=\dfrac{4x}{2x+5}$
11) $y=e^x+x$
12) $f(x)=\dfrac{x^2+3x}{x-2}$