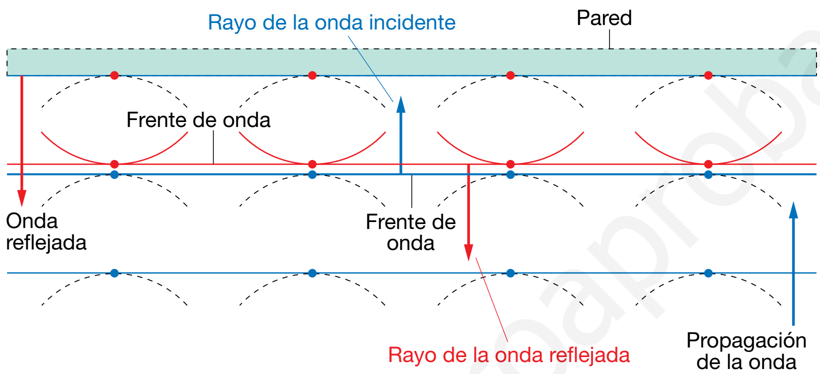
1 Propagación de las ondas

Página 183

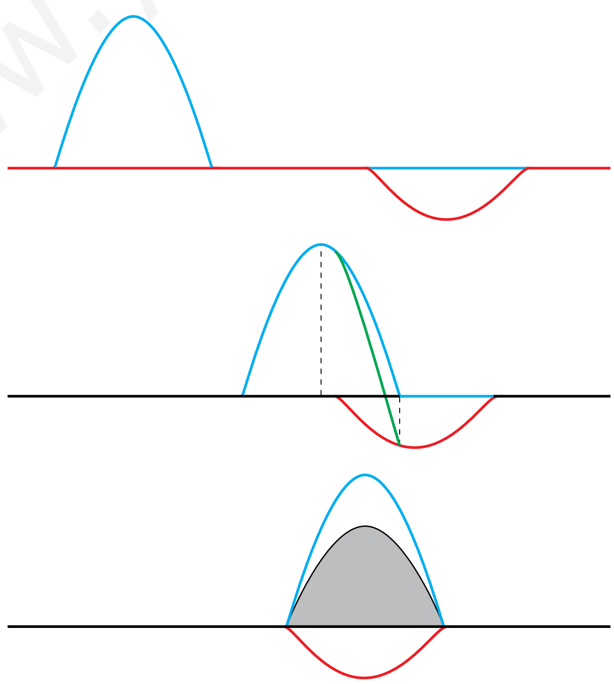
1 **En la imagen del ejercicio resuelto de esta página, ¿cuáles son los rayos de la onda incidente y los de la reflejada? Haz en tu cuaderno la construcción geométrica de los frentes de onda y dibuja estos rayos.**

Recordemos que el rayo, en cada punto, es la línea perpendicular a la envolvente que pasa por dicho punto. Podemos orientarlo representándolo como un vector cuyo sentido apunta en el mismo que el de propagación de la onda. Por lo tanto, los rayos de las ondas incidente y reflejada de la figura serían los que se muestran en la siguiente imagen:

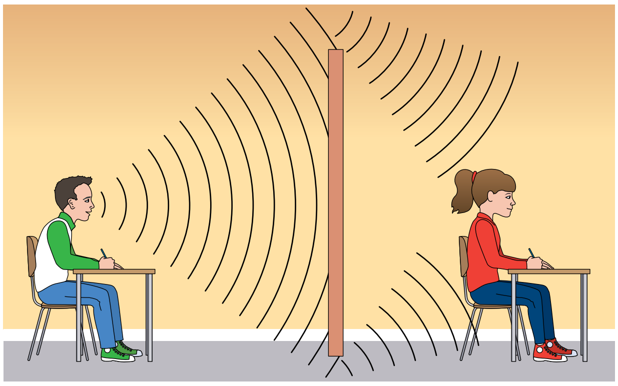


2 **Representa la superposición de dos pulsos unidimensionales en el caso de que en uno de ellos la elongación sea positiva y en el otro negativa.**

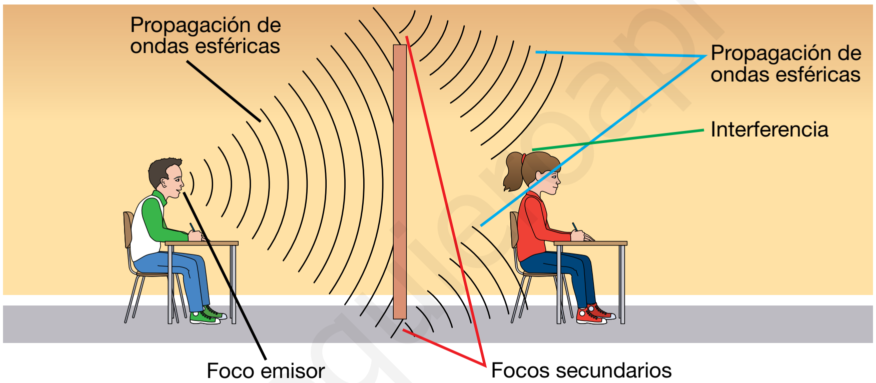
Supongamos que el primer pulso viaja hacia la derecha, y el segundo hacia la izquierda, y que ambos tienen elongaciones de signo opuesto. Sigue verificándose el principio de superposición, y la perturbación resultante es la suma de las perturbaciones individuales, cada una con su signo. Entonces, en este caso vemos que las amplitudes se restan, en vez de sumarse, obteniéndose la onda resultante que se muestra en la figura siguiente:



3 **Relaciona la imagen de la derecha con los contenidos del apartado.**



La imagen representa la propagación de ondas sonoras. El foco correspondería a las cuerdas vocales del chico (también se puede considerar la garganta, o la boca, ya que ahí las ondas se modulan y amplifican). Una vez emitidas, se propagan en forma de ondas esféricas hasta que colisionan con el obstáculo. Los puntos superior e inferior de este constituyen los focos secundarios, desde donde vuelven a emitirse en forma de ondas esféricas. Estos frentes llegan al oído de la chica, donde interfieren.



2 Interferencias

Página 186

4 **Dos ondas con la misma amplitud, de 0,2 cm, frecuencia, de 10 Hz, y longitud de onda, de 1 m, viajan en la misma dirección y sentidos opuestos.**

Obtén la ecuación de la onda obtenida por interferencia.

Suponemos que las dos ondas tienen la misma fase inicial. Sus funciones de onda serán:

$$y_1(x, t) = A \cdot sen\,(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

$$y_2(x, t) = A \cdot sen\,(\omega \cdot t + k \cdot x)$$

Entonces la onda obtenida por interferencia tendrá una función:

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = A \cdot sen\,(\omega \cdot t - k \cdot x) + A \cdot sen\,(\omega \cdot t + k \cdot x)$$

Usando la relación trigonométrica:

$$sen\,a + sen\,b = 2 \cdot sen\,\frac{a+b}{2} \cdot cos\,\frac{a-b}{2}$$

tenemos:

$$y\,(x,t) = 2 \cdot A \cdot sen\left(\frac{\omega \cdot t - k \cdot x + \omega \cdot t + k \cdot x}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{\omega \cdot t - k \cdot x - \omega \cdot t - k \cdot x}{2}\right) =$$

$$= 2 \cdot A \cdot sen\,(\omega \cdot t) \cdot cos\,(k \cdot x)$$

Esta expresión corresponde a una onda estacionaria de frecuencia y longitud de onda iguales a las iniciales, y amplitud doble.

5 Indica en qué condiciones será constructiva y destructiva la interferencia de dos ondas armónicas procedentes de dos focos, de amplitud:

$$A_r = 2 \cdot A \cdot cos\left[\frac{\pi}{\lambda} \cdot (x_2 - x_1)\right]$$

Para que la interferencia sea constructiva, el coseno ha de tomar valor máximo o mínimo, lo que sucede cuando:

$$\frac{\pi}{\lambda} \cdot (x_2 - x_1) = n \cdot \pi \;\rightarrow\; x_2 - x_1 = n \cdot \lambda = 2 \cdot n \cdot \frac{\lambda}{2}$$

Es decir, la diferencia de camino entre las dos ondas debe ser un múltiplo par de la semilongitud de onda. Por otro lado, para que sea destructiva, el coseno ha de anularse, lo que ocurre cuando:

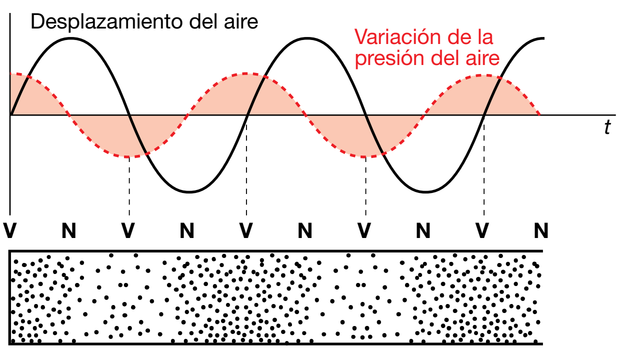
$$\frac{\pi}{\lambda} \cdot (x_2 - x_1) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi \;\rightarrow\; x_2 - x_1 = (2 \cdot n + 1) \cdot \frac{\lambda}{2}$$

Es decir, cuando la diferencia de camino es un múltiplo impar de la semilongitud de onda.

Página 187

6 Explica cómo se producirían ondas estacionarias longitudinales de sonido.

En este caso, lo que oscila es la presión del fluido. Por lo tanto, todas las ecuaciones del epígrafe siguen siendo válidas, sin más que sustituir *y* (elongación) por *p* (presión). La interferencia entre la onda incidente y la reflejada (por ejemplo, si el sonido se produce en un tubo con al menos uno de sus extremos abierto) da lugar a una onda estacionaria. La **diferencia de presión** con respecto a la situación en la que no hay ninguna oscilación en el fluido será máxima en los vientres, y nula en los nodos.



7 Si pulsamos la cuerda de una guitarra, ¿se produce una onda estacionaria?

Sí, ya que los extremos de la cuerda se encuentran fijos, y no oscilan. Por lo tanto, la vibración se refleja en cada uno de los extremos, interfiriendo consigo misma, y provocando una onda estacionaria.

3 Reflexión y refracción

Página 190

8 Si el medio de la onda incidente es más denso (menor índice de refracción) que el de la refractada, el rayo, ¿se acerca o se aleja de la normal?

Si el primer medio tiene menor índice de refracción que el segundo, aplicando la ley de Snell, tendremos:

$$\frac{sen\,\hat{i}}{sen\,\hat{r}} = \frac{n_2}{n_1} > 1$$

Por lo tanto:

$$sen\,\hat{i} > sen\,\hat{r} \quad \rightarrow \quad \hat{i} > \hat{r}$$

Así pues, el rayo se acerca a la normal. En realidad, no existe una relación entre la densidad de un medio y su índice de refracción, por lo que para determinar el comportamiento de la luz al pasar de un medio a otro tendremos en cuenta únicamente esta última magnitud.

9 Si una onda incide en una superficie de separación entre dos medios de tal forma que el rayo sea paralelo a la normal a la superficie, ¿cuánto vale el ángulo de reflexión?

Si el rayo es paralelo a la normal a la superficie (es decir, perpendicular a la superficie), entonces el ángulo de incidencia es nulo. Entonces el de reflexión también será cero:

$$\hat{r} = \hat{i} = 0$$

4 Difracción

Página 193

10 Explica las semejanzas y diferencias entre interferencia y difracción.

Semejanzas: en ambos casos, las ondas secundarias que se forman al colisionar la onda primaria con un obstáculo (o al pasar por alguna rendija), se superponen, generando un patrón de líneas claras y oscuras.

Diferencias: en la interferencia, las ondas que se superponen pueden tener distinta fase, mientras que en la difracción suelen tener la misma fase. Cuando se tiene una única rendija se habla de difracción, ya que las ondas secundarias se emiten desde puntos diferentes de la misma rendija, superponiéndose unas con otras. Cuando se tienen dos rendijas, en ambas, por separado, se produce difracción. Además, tiene lugar una interferencia entre las ondas secundarias emitidas desde cada una de ellas.

11 ¿Por qué el sonido atraviesa paredes y obstáculos pero la luz no?

El sonido es una onda que consiste en una perturbación de la presión. Cuando esta perturbación incide contra una pared (suponemos que esta no tiene ningún orificio ni ranura), las diferencias de presión se transmiten al sólido, que también empieza a vibrar: esto es, la onda pasa al sólido, aunque al propagarse a distinta velocidad, experimentará una refracción. Cuando la onda llega al aire de la habitación contigua, la perturbación de la presión se sigue transmitiendo. Como efecto, se tiene que el sonido se ha transmitido a través de la pared, aunque haya modificado su dirección de propagación y se haya atenuado.

El hecho de que la luz no atraviese ciertos materiales (como, por ejemplo, los que constituyen la pared o cualquier cuerpo opaco) depende no solamente de la longitud de onda de la radiación electromagnética involucrada, sino también de las propiedades de las moléculas que compongan el material. No puede reducirse simplemente a un problema de difracción o interferencia destructiva, ya que, por ejemplo, si este fuera el caso, los rayos X, de menor longitud de onda, se verían más impedidos para atravesar un sólido, cosa que no ocurre (los rayos X pueden atravesar materiales opacos para la luz visible). Por otra parte, las distancias entre los átomos o moléculas son similares en el caso de un sólido opaco y en otro transparente, como un vidrio (que, por cierto, son opacos para la luz ultravioleta, aunque no para otras frecuencias). Así pues, hay que considerar no solamente la longitud de onda de la radiación incidente, sino también qué frecuencias son más absorbidas por las moléculas que componen el material. Pero aquí entra en juego la absorción, que estudiaremos más adelante (considérese una lámina muy fina de un material opaco: veremos algo de luz a su través, siendo la cantidad de luz absorbida mayor cuanto más gruesa sea esa lámina).

Pero ¿por qué el sonido puede bordear un objeto y la luz no? Por ejemplo, si yo hablo de espaldas a una persona, esta puede oírme, pero no me verá la cara. En este caso sí se debe a la difracción.

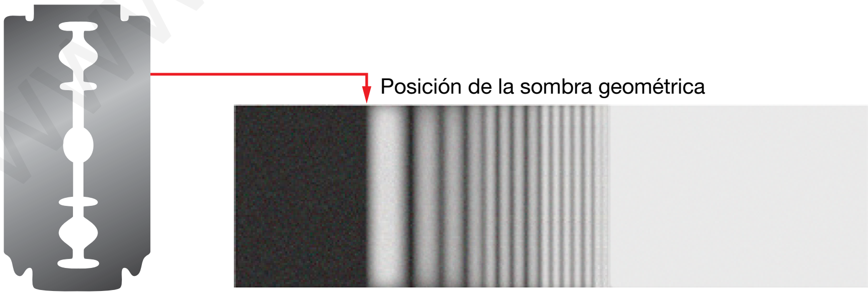
En el caso de una onda sonora, su longitud de onda es del orden, o incluso mayor, que el tamaño del obstáculo, por lo que el primer mínimo (o lo que es casi lo mismo, la anchura del máximo principal), es de 180°, y las ondas sonoras pueden bordear el sólido (por eso, cuando hablo de espaldas a alguien, me puede oír). Sin embargo, en el caso de la luz, la longitud de onda es mucho menor que la dimensión del objeto, el ángulo $\theta \approx 0$, y experimentan muy poca difracción: prácticamente toda la luz se propaga hacia adelante, no pudiendo bordear el objeto.

FE DE ERRATAS DE LA PRIMERA EDICIÓN DEL LIBRO DEL ALUMNADO: La condición para que la diferencia de camino genere una **interferencia destructiva** es:

$$\frac{d}{2} \cdot sen\,\theta = n \cdot \frac{\lambda}{2} \rightarrow d \cdot sen\,\theta = n \cdot \lambda$$

12 **Si la luz experimenta difracción cuando se encuentra un obstáculo, ¿por qué no se desvía si se interpone una pantalla?**

Los fenómenos de difracción se presentan cuando la longitud de onda es del mismo orden de magnitud que las dimensiones del obstáculo. En este caso, el tamaño de la pantalla es mucho mayor que la longitud de onda de la radiación electromagnética, por lo que esta no se desvía. Sí ocurre este fenómeno, sin embargo, en el borde del obstáculo, manifestándose en forma de franjas brillantes y oscuras alternadas:



13 **¿Qué analogías y diferencias hay entre un espectro discontinuo y un patrón de difracción?**

En ambos casos la onda pasa por un dispositivo y se recoge sobre un detector, que puede ser una pantalla o placa fotográfica, obteniéndose rayas, bandas claras y oscuras, etc. En los espectros, las distancias entre ellas es muy variable, y en los patrones de difracción suelen estar regularmente espaciadas, siendo además simétricas respecto a un punto central. Además, en el caso de los espectros se tiene luz compuesta por varias longitudes de onda, y son estas las que se separan, desviándose en direcciones diferentes. En la difracción se suele considerar una sola longitud de onda. Y si, no obstante, hay varias, el comportamiento de dos ondas de longitudes parecidas es similar, cosa que no ocurre en los espectros discontinuos (puede ocurrir que una longitud de onda sea absorbida por el material y otra muy cercana, no).

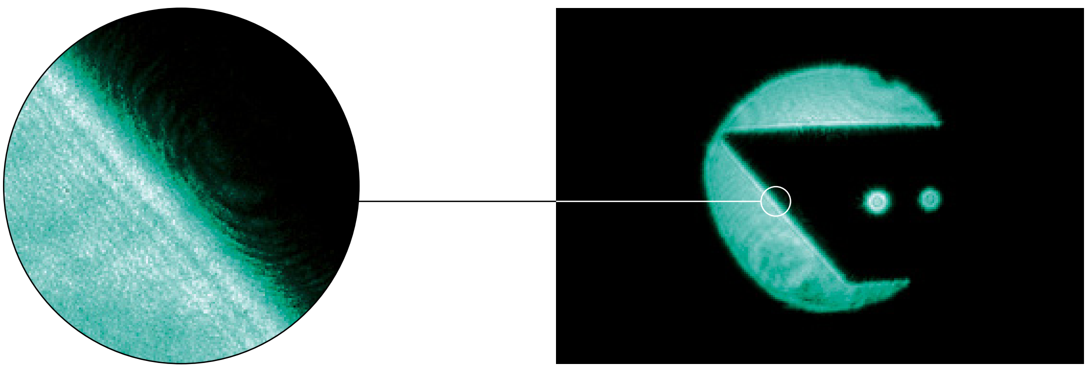
14 Si barremos con un haz de radiación electromagnética, con frecuencias comprendidas entre rayos ultravioleta y rayos X, un cristal de sal (cloruro de sodio) y ponemos detrás una pantalla, obtenemos una zona luminosa central, pero solo para rayos X obtenemos franjas de interferencia. ¿Qué tamaño tienen las celdas elementales del NaCl?

Para que se produzcan los fenómenos de interferencia y difracción, el tamaño del obstáculo debe ser del mismo orden de magnitud que la longitud de onda de la onda empleada. Puesto que los rayos X están comprendidos entre los 10 nm y 0,01 nm, las celdas elementales del cristal de cloruro sódico deben tener un tamaño comprendido en ese intervalo.

15 Observa en un día de niebla un farol encendido e ilumina en una habitación oscura una cuchilla de afeitar o un pelo. Explica lo que observas.

Cuando se observa una fuente de luz en una zona donde hay gotas en suspensión se pueden observar multitud de fenómenos, unos relacionados con la reflexión (por ejemplo, el arcoíris, producido por la reflexión total de la luz en el interior de las gotas de agua), otros con la refracción (por ejemplo, los halos que se observan a veces en torno al Sol y a la Luna a 22° y 46°, provocado por la refracción de la luz al pasar por las gotas) y otros con la difracción. Con respecto a estos últimos, se puede observar una corona en torno a una fuente luminosa, cuando la luz es difractada por gotas muy pequeñas suspendidas en el aire. Pueden confundirse con los halos, pero son más pequeños y tienen colores brillantes (ver figura adjunta).

Cuando se observa una cuchilla de afeitar o un pelo iluminados en una habitación a oscuras se pueden observar franjas de difracción de la luz en los bordes de estos objetos, como puede observarse en la siguiente figura:



5 Fenómenos sonoros

Página 195

16 El oído humano es capaz de percibir sonidos de frecuencias comprendidas entre 20 y 20 000 Hz. Calcula la longitud de onda de estas dos frecuencias extremas si la temperatura del aire es de –3,6 °C.

La velocidad del sonido en el aire depende de la temperatura según la siguiente expresión:

$$v = 20,1 \cdot \sqrt{T}$$

donde la temperatura está expresada en kelvin. En nuestro caso: T = 273 – 3,6 = 269,4 K. Por lo tanto:

$$v = 20,1 \cdot \sqrt{269,4} = 329,9 \text{ m/s}$$

Las longitudes de onda pedidas podrán obtenerse a partir de:

$$\lambda \cdot f = v \quad \to \quad \lambda = \frac{v}{f}$$

Entonces:

$$f = 20 \text{ Hz} \quad \to \quad \lambda = 16,5 \text{ m}$$

$$f = 20\,000 \text{ Hz} \quad \to \quad \lambda = 0,0165 \text{ m}$$

17 Indica cómo podrías calcular la profundidad de un pozo utilizando únicamente una piedra y un cronómetro. ¿Podrías averiguar, en esta experiencia, la temperatura ambiente?

En primer lugar, consideremos que la velocidad del sonido en el aire es conocida. Entonces, se podría determinar la altura del pozo dejando caer la piedra y cronometrando cuánto tiempo tardamos en oír el sonido del golpe de esta con el fondo.

Podemos descomponer este tiempo en dos partes:

$$t = t_1 + t_2$$

donde t_1 es el tiempo que tarda la piedra en llegar al fondo, y t_2 el que tarda el sonido en llegar a nuestro oído. El primero es un movimiento uniformemente acelerado, por lo que, llamando h a la altura del pozo, y teniendo en cuenta que hemos dejado caer la piedra, y, por tanto, la velocidad inicial es cero:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2$$

El segundo es un movimiento rectilíneo uniforme, por lo que:

$$h = v_s \cdot t_2$$

donde v_s es la velocidad del sonido. Igualando:

$$\frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 = v_s \cdot t_2 = v_s \cdot (t - t_1)$$

Y teniendo en cuenta que el tiempo total es conocido, llegamos a una ecuación de segundo grado:

$$t_1^2 + \frac{2 \cdot v_s}{g} \cdot t_1 - \frac{2 \cdot v_s}{g} \cdot t = 0$$

que se puede resolver para obtener t_1. Con este dato ya podemos obtener el valor de h.

La temperatura ambiente se puede obtener a partir de la velocidad del sonido. Pero si esta no es conocida, no sirve el razonamiento anterior. De hecho, no podría resolverse el problema, ya que tendríamos más incógnitas que ecuaciones. Por lo tanto, no se puede obtener la temperatura del aire.

6 Cualidades del sonido

Página 197

18 **La velocidad de propagación de una onda en un instrumento de cuerda, de 0,5 m de longitud, es de 200 m/s. Halla la frecuencia de los tres primeros armónicos.**

La frecuencia fundamental viene dada por:

$$f_1 = \frac{v}{2 \cdot L} = \frac{200}{2 \cdot 0{,}5} = 200 \text{ Hz}$$

Los siguientes armónicos tienen frecuencias que son múltiplos de esta:

$$f_2 = 400 \text{ Hz} \quad ; \quad f_3 = 600 \text{ Hz}$$

19 **Si la longitud de una cuerda de guitarra es de 0,5 m y la frecuencia fundamental de vibración, de 400 Hz, halla la longitud de la onda estacionaria formada al pulsar la cuerda.**

La frecuencia fundamental viene dada por:

$$f_1 = \frac{v}{2 \cdot L}$$

Por otro lado:

$$f_1 \cdot \lambda_1 = v \;\rightarrow\; \frac{v}{2 \cdot L} \cdot \lambda_1 = v \;\rightarrow\; \lambda_1 = 2 \cdot L = 1 \text{ m}$$

Página 198

20 **La longitud de un tubo abierto es de 1,5 m. Halla la frecuencia fundamental.**

Como el tubo es abierto por los dos extremos, su longitud debe ser un múltiplo impar de la cuarta parte de la longitud de onda. Por lo tanto, las frecuencias de resonancia posibles son:

$$f_n = n \cdot \frac{v}{4 \cdot L} \quad ; \quad n = 1, 3, 5...$$

Para n = 1, y tomando v_s = 340 m/s:

$$f_1 = \frac{340}{4 \cdot 1{,}5} = 56{,}67 \text{ Hz}$$

21 **¿Cómo se puede conseguir que un instrumento de tubos, como el órgano, dé frecuencias menores a las que normalmente dan los tubos abiertos en las mismas condiciones de temperatura?**

Cerrándolo por un extremo, pues en ese caso la frecuencia fundamental se reduce a la mitad.

22 **La frecuencia fundamental de un tubo de un órgano es 240 Hz. Halla su longitud.**

Si el tubo está abierto solamente por un extremo, la frecuencia fundamental vendrá dada por:

$$f_1 = \frac{v}{4 \cdot L} \;\rightarrow\; L = \frac{v}{4 \cdot f_1}$$

Tomando v_s = 340 m/s:

$$L = \frac{v}{4 \cdot f_1} = \frac{340}{4 \cdot 240} = 0{,}35 \text{ m}$$

Página 199

23 ¿Cuál es la intensidad de una onda, de 7 000 Hz, que produce la misma sensación sonora que un sonido de 40 dB a 90 Hz?

Fe de erratas de la primera edición del libro del alumnado: El enunciado del problema debe pedir la intensidad de la onda de 7 000 Hz y no su intensidad sonora.

Notemos, en primer lugar, que al ser la sensación sonora la misma para ambas frecuencias, se ha de verificar:

$$S\,(90\text{ Hz}) = S\,(7\,000\text{ Hz}) \;\rightarrow\; 10 \cdot log\,\frac{I\,(90\text{ Hz})}{I_0\,(90\text{ Hz})} = 10 \cdot log\,\frac{I\,(7\,000\text{ Hz})}{I_0\,(7\,000\text{ Hz})}$$

$$I\,(7\,000\text{ Hz}) = I_0\,(7\,000\text{ Hz}) \cdot \frac{I\,(90\text{ Hz})}{I_0\,(90\text{ Hz})}$$

Ahora bien, de la definición de nivel de intensidad sonora tenemos:

$$\frac{I\,(90\text{ Hz})}{I_0\,(90\text{ Hz})} = 10^{\frac{S\,(90\text{ Hz})}{10}} = 10^4$$

Luego:

$$I\,(7\,000\text{ Hz}) = 10^{-12} \cdot 10^4 = 10^{-8}\ \text{W/m}^2$$

donde el valor $I_0 = 10^{-12}$ W/m² se ha tomado de la gráfica de la página 199.

24 Dos sonidos, de 70 dB cada uno, se emiten simultáneamente desde dos fuentes sonoras. Calcula el nivel de intensidad sonora resultante.

Suponemos que ambos sonidos tienen la misma frecuencia, por lo que ambos tienen la misma intensidad umbral, I_0. Entonces, cada uno de ellos tendrá una intensidad dada por:

$$\frac{I}{I_0} = 10^{\frac{S}{10}} = 10^7 \;\rightarrow\; I = I_0 \cdot 10^7\ \text{W/m}^2$$

Sumando las intensidades tenemos la resultante:

$$I_r = I_0 \cdot 2 \cdot 10^7\ \text{W/m}^2$$

A esta le corresponde una intensidad sonora:

$$S_r = 10 \cdot log\,\frac{I_r}{I_0} = 10 \cdot log\,(2 \cdot 10^7) = 73\ \text{dB}$$

Como vemos, la sensación sonora resultante de la suma de dos ondas no coincide con la suma algebraica de las sensaciones sonoras correspondientes a cada una de las ondas consideradas individualmente.

7 Efecto Doppler

Página 201

25 Un foco emisor y un receptor se mueven a la misma velocidad en la misma dirección. ¿Se producirá efecto Doppler?

Si el emisor y el receptor se mueven en la misma dirección y con el mismo sentido, tomaremos signo negativo tanto para el foco (se acerca al observador) como para el observador (se aleja del foco), por lo que:

$$f' = f \cdot \frac{v - v_R}{v - v_F}$$

Si además ambas velocidades son iguales:

$$v_R = v_F \;\rightarrow\; f' = f$$

Lo que significa que, en este caso, no se produce el efecto Doppler.

Si se mueven en sentido contrario, entonces tendremos que tomar signo negativo para el foco y positivo, para el observador. Teniendo en cuenta, además, que las dos velocidades son iguales:

$$f' = f \cdot \frac{v + v_R}{v - v_F} > f$$

Como vemos, en este caso sí habría efecto Doppler, y se detectaría una frecuencia mayor que la percibe el foco.

26 Un cuerpo emite calor en forma de radiación próxima al infrarrojo. ¿Es posible detectar con un detector de rayos infrarrojos si se está moviendo hacia nosotros o se está alejando?

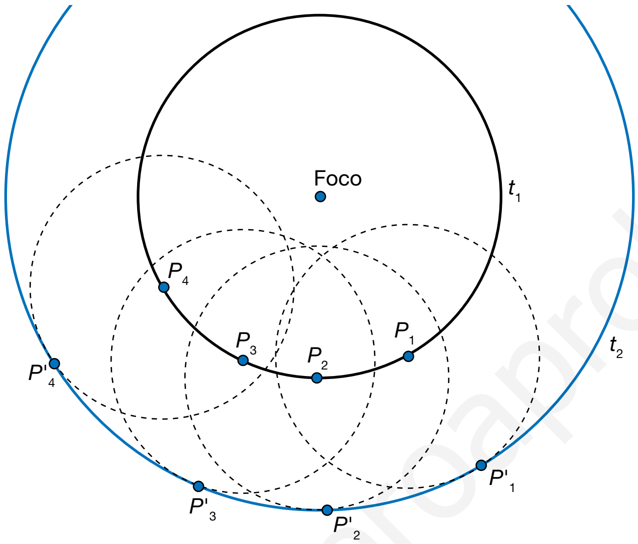
Sí, ya que la frecuencia de la radiación que emite se desplaza hacia el rojo si se acerca hacia nosotros, mientras que se alejará de él si el cuerpo se aleja.

Página 206

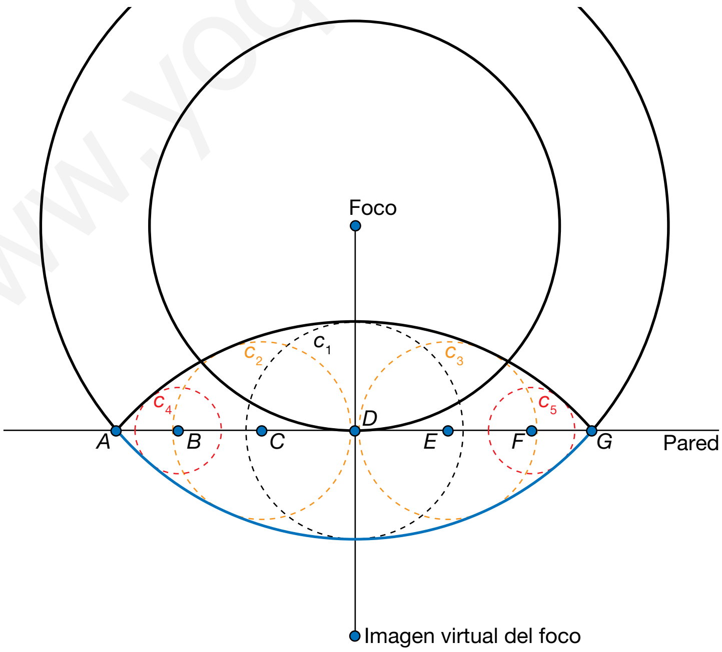
Principio de Huygens

1 **Realiza la construcción de Huygens para una onda esférica producida al caer una piedra en un estanque cuadrado cuando esta se refleja en una de las paredes.**

La onda circular tiene por centro el foco, esto es, el punto en el que la piedra ha golpeado el agua. Cada uno de los puntos del frente de onda es una fuente de ondas secundarias, cuya envolvente es el frente de ondas en un instante posterior, como se muestra en la siguiente figura:



Cuando la perturbación llega a la pared, sus puntos no oscilan, sino que se convierten en nuevos frentes de ondas secundarios. De nuevo, su envolvente determina el frente de onda de la onda reflejada, como se muestra en la siguiente figura:

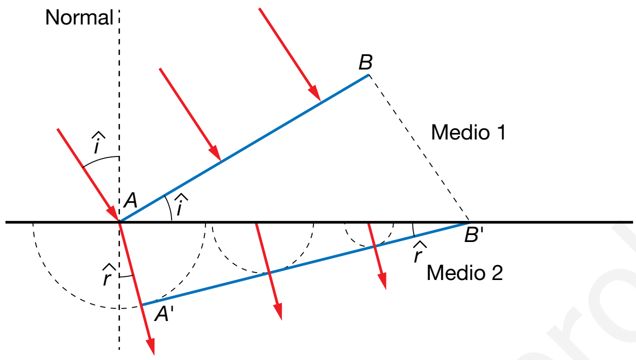


Hay que notar que la onda incidente mostrada en la imagen llegó primero al punto *D*, después a los puntos *C* y *B*, más tarde a *B* y *F*, y por último a *A* y *G*. Por tanto, en el instante de tiempo representado, el frente de ondas secundario emitido por *D* (c_1) es mayor que los emitidos por *C* y *D* (c_2 y c_3), y este a su vez es mayor que los correspondientes a *B* y *F* (c_4 y c_5).

A efectos prácticos, el comportamiento de la onda reflejada es el mismo que tendría una onda emitida por un foco «virtual», consistente en la imagen del foco, con respecto a la pared del recipiente. La onda reflejada, pues, es la imagen de la porción de onda incidente que existiría entre los puntos *A* y *G* (mostrada en azul en la figura) si no existiera pared.

2 Obtén la ley de Snell para la refracción mediante el principio de Huygens.

Consideremos que la onda pasa de un medio a otro en el que se propaga a menor velocidad. Cada punto del frente de onda (que estamos considerando como plano) es un foco de ondas secundarias. Tomemos dos puntos representativos de este frente: *A*, sobre la superficie de separación de los dos medios, y *B*.



Cuando el punto *B* llega a la superficie de separación, *B*′, el punto *A* habrá viajado una distancia *AA*′, menor que *BB*′, ya que $v_2 < v_1$. Por tanto, vemos que el frente de ondas se ha desviado respecto a su dirección de propagación original. Dado que el segmento *BB*′ es perpendicular a *AB*, el triángulo *ABB*′ será rectángulo. Del mismo modo, *AA*′ es perpendicular a *A*′*B*′, y el triángulo *AA*′*B*′ también será rectángulo. Por tanto:

$$sen\,\hat{i} = \frac{BB'}{AB'} = \frac{v_1 \cdot t}{AB'}$$

$$sen\,\hat{r} = \frac{AA'}{AB'} = \frac{v_2 \cdot t}{AB'}$$

Dividiendo ambas expresiones:

$$\frac{sen\,\hat{i}}{sen\,\hat{r}} = \frac{v_1 \cdot t}{v_2 \cdot t} = \frac{v_1}{v_2}$$

Interferencias

3 Explica si la interferencia de dos ondas procedentes de dos focos que emiten en fase con las mismas características es siempre constructiva.

No, no siempre es constructiva. En los puntos en los que la diferencia de camino entre las dos ondas es un múltiplo entero de la longitud de onda:

$$x_2 - x_1 = n \cdot \lambda$$

entonces la interferencia efectivamente es constructiva. Pero si esta diferencia de camino es un múltiplo impar de una semilongitud de onda:

$$x_2 - x_1 = (2 \cdot n + 1) \cdot \frac{\lambda}{2}$$

entonces es destructiva. Estos son los casos límite. Si la diferencia es una fracción arbitraria de la longitud de onda, podemos tener un ligero amortiguamiento o reforzamiento de las ondas.

4 **Un foco emite una onda de 0,02 cm de amplitud y 50 Hz de frecuencia que se hace pasar por dos rendijas e interfieren. Su velocidad es 20 m/s. Indica el valor de la amplitud a 20 m de una rendija y a 25 m de la otra.**

El resultado de interferir dos ondas coherentes es otra onda con la misma frecuencia y la misma longitud de onda que las originales, pero con una amplitud:

$$A_r = 2 \cdot A \cdot cos\left(k \cdot \frac{x_1 - x_2}{2}\right)$$

Como la velocidad de propagación viene dada por:

$$v = \frac{\omega}{k}$$

tendremos:

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2 \cdot \pi \cdot f}{v} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 50}{20} = 5 \cdot \pi \, m^{-1}$$

Sustituyendo estos valores, se obtiene:

$$A_r = 2 \cdot 0{,}02 \cdot cos\left(5 \cdot \pi \cdot \frac{25-20}{2}\right) = 0{,}04 \cdot cos\,(5 \cdot \pi \cdot 2{,}5) = 0$$

En efecto, observemos que la diferencia de camino es un múltiplo impar de una semilongitud de onda:

$$x_1 - x_2 = 5 \text{ m} \;\; ; \;\; \lambda = \frac{2 \cdot \pi}{k} = \frac{2}{5} \text{ m} \;\; \rightarrow \;\; \frac{\lambda}{2} = \frac{1}{5} \text{ m}$$

Por tanto, tomando n = 12:

$$(2 \cdot n + 1) \cdot \frac{\lambda}{2} = 25 \cdot \frac{1}{5} = 5 = x_2 - x_1$$

Y ya sabemos que en estas condiciones se produce una interferencia destructiva.

5 **Delante de un foco que emite microondas de frecuencia 10^{10} Hz se colocan dos rendijas separadas 3 mm. Halla la distancia entre los máximos de interferencia constructiva en una pantalla a 1 m de las rendijas.**

Cuando dos ondas interfieren después de atravesar dos rendijas, la separación entre los máximos viene dada por:

$$\Delta y = \Delta n \cdot \frac{\lambda \cdot D}{d}$$

Como se trata de radiación electromagnética, la velocidad de propagación es $c = 3 \cdot 10^8$ m/s. Utilizando este valor y el de la frecuencia, calculamos la longitud de onda:

$$c = f \cdot \lambda \;\; \rightarrow \;\; \lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{10^{10}} = 0{,}03 \text{ m}$$

Por tanto, tomando Δn = 1, tendremos:

$$\Delta y = \frac{0{,}03 \cdot 1}{0{,}003} = 10 \text{ m}$$

6 **La frecuencia de dos diapasones es 350 y 450 Hz. Halla la frecuencia de la onda resultante.**

Consideremos dos ondas con frecuencias diferentes, dadas por las funciones:

$$y_1 = A \cdot sen\,(\omega_1 \cdot t + k_1 \cdot x_1)$$

$$y_2 = A \cdot sen\,(\omega_2 \cdot t + k_2 \cdot x_2)$$

donde x_1 es la distancia del primer foco al punto considerado, y x_2, la distancia al segundo foco. Por simplicidad, consideremos que ambas son iguales: $x = x_1 = x_2$, y determinemos cómo sería la onda resultante:

$$y = y_1 + y_2 = A \cdot sen\,(\omega_1 \cdot t + k_1 \cdot x) + A \cdot sen\,(\omega_2 \cdot t + k_2 \cdot x)$$

Utilizando la relación trigonométrica:

$$sen\,a + sen\,b = 2 \cdot sen\,\frac{a+b}{2} \cdot cos\,\frac{a-b}{2}$$

tendríamos:

$$y = 2 \cdot A \cdot sen\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t + \frac{k_1 + k_2}{2} \cdot x\right) \cdot cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t + \frac{k_1 - k_2}{2} \cdot x\right)$$

Vemos que el término con el seno, correspondiente a la oscilación resultante, tiene una frecuencia igual a la media aritmética de las dos anteriores:

$$f = \frac{f_1 + f_2}{2}$$

Por otro lado, podemos llamar A_r a la amplitud resultante:

$$A_r = 2 \cdot A \cdot cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t + \frac{k_1 - k_2}{2} \cdot x\right)$$

Como vemos, esta amplitud varía con el tiempo con una frecuencia igual a $(f_1 - f_2)/2$, dando lugar al fenómeno denominado pulso o batido. Así pues, se observa que se obtiene una oscilación cuya frecuencia es la media aritmética de las dos frecuencias iniciales, modulada por una oscilación que varía con una frecuencia menor que cualquiera de las anteriores.

Por tanto, respondiendo a la pregunta formulada, se tendría una oscilación con una frecuencia:

$$f = \frac{350 + 450}{2} = 400 \text{ Hz}$$

7 Halla la interferencia de dos ondas de 0,001 m de amplitud, 1 Hz de frecuencia y 0,5 m de longitud de onda que viajan en sentidos contrarios.

Este caso es similar al de una onda estacionaria. Comprobémoslo:

$$y = y_1 + y_2 = A \cdot sen\,(\omega \cdot t - k \cdot x) + A \cdot sen\,(\omega \cdot t + k \cdot x)$$

Utilizando la relación trigonométrica:

$$sen\,a + sen\,b = 2 \cdot sen\,\frac{a+b}{2} \cdot cos\,\frac{a-b}{2}$$

tenemos:

$$y = 2 \cdot A \cdot sen\left(\frac{2 \cdot \omega \cdot t}{2}\right) \cdot cos\left(-\frac{2 \cdot k \cdot x}{2}\right)$$

$$y = 2 \cdot A \cdot sen\,(\omega \cdot t) \cdot cos\,(k \cdot x)$$

Por tanto, en nuestro caso:

$$y = 2 \cdot 10^{-3} \cdot sen\,(2 \cdot \pi \cdot t) \cdot cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{0,5} \cdot x\right) = 2 \cdot 10^{-3} \cdot sen\,(2 \cdot \pi \cdot t) \cdot cos\,(4 \cdot \pi \cdot x)$$

8 Dos focos, O_1 y O_2, emiten ondas en fase de la misma amplitud, *A*, frecuencia, *f*, y longitud de onda, λ, que se propagan a la misma velocidad. Si interfieren en un punto, *P*, que está a una distancia λ de O_1 y $3 \cdot \lambda$ de O_2, la amplitud resultante en *P* será:

a) Nula. b) *A*. c) $2 \cdot A$.

La respuesta correcta es la c). Comprobémoslo. La amplitud de la onda resultante viene dada por:

$$A_r = 2 \cdot A \cdot cos\left(k \cdot \frac{x_1 - x_2}{2}\right) = 2 \cdot A \cdot cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda - 3 \cdot \lambda}{2}\right)$$

$$A_r = 2 \cdot A \cdot cos\,(2 \cdot \pi) = 2 \cdot A$$

Ondas estacionarias

9 **La ecuación de una onda, en unidades del SI, es:**

$$\mathbf{y = 0{,}1 \cdot sen\,[2 \cdot \pi \cdot (50 \cdot t + 10 \cdot x)]}$$

Halla la ecuación de otra onda que, al interferir con esta, da una onda estacionaria, y la ecuación de esta última.

La onda buscada debe tener las mismas características que esta, pero viajando en sentido contrario, luego:

$$y = 0{,}1 \cdot sen\,[2 \cdot \pi \cdot (50 \cdot t - 10 \cdot x)]$$

Y la onda estacionaria resultante será:

$$y_r = 0{,}1 \cdot sen\,[2 \cdot \pi \cdot (50 \cdot t + 10 \cdot x)] + 0{,}1 \cdot sen\,[2 \cdot \pi \cdot (50 \cdot t - 10 \cdot x)] =$$
$$= 0{,}2 \cdot sen\,(100 \cdot \pi \cdot t) \cdot cos\,(20 \cdot \pi \cdot x)$$

10 **La ecuación de una onda estacionaria, dada en unidades del SI, es:**

$$\mathbf{y = 0{,}03 \cdot sen\,(50 \cdot t) \cdot cos\,(20 \cdot x)}$$

a) Halla su frecuencia, período y longitud de onda.

b) Halla la distancia entre dos nodos consecutivos.

c) Obtén la elongación, a los 20 s, en *x* = 10 m.

a) La ecuación general de la onda estacionaria es:

$$y = 2 \cdot A \cdot sen\,(\omega \cdot t) \cdot cos\,(k \cdot x)$$

Luego la frecuencia angular y el número de ondas serán:

$$\omega = 50 \text{ rad/s} \quad ; \quad k = 20 \text{ rad/m}$$

Luego la frecuencia y la longitud de onda serán:

$$f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{50}{2 \cdot \pi} = 7{,}96 \text{ Hz} \quad ; \quad \lambda = \frac{2 \cdot \pi}{k} = \frac{2 \cdot \pi}{20} = 0{,}314 \text{ m}$$

Y el período:

$$T = \frac{1}{f} \simeq 0{,}13 \text{ s}$$

b) Para calcular la distancia entre dos nodos consecutivos, hallamos los puntos en los que se anula el coseno (los puntos en los que la amplitud resultante es nula):

$$cos\,(k \cdot x) = 0 \;\rightarrow\; k \cdot x = (2 \cdot n + 1) \cdot \frac{\pi}{2} \;\rightarrow\; x = (2 \cdot n + 1) \cdot \frac{\pi}{2 \cdot k}$$

$$\Delta x = 2 \cdot \Delta n \cdot \frac{\pi}{2 \cdot k} = \Delta n \cdot \frac{\pi}{k}$$

Tomando dos nodos consecutivos (Δn = 1):

$$\Delta x = \frac{\pi}{k} = \frac{\lambda}{2} = 0{,}157 \text{ m}$$

c) El punto situado en x = 10 m describe un m.a.s. dado por:

$$y\,(x=10)=0{,}03\cdot cos\,(200)\cdot sen\,(50\cdot t)=0{,}015\cdot sen\,(50\cdot t)$$

Luego la amplitud es de 0,015 m y la elongación a los 20 s vale:

$$y\,(10,20)=0{,}015\cdot sen\,(50\cdot 20)=0{,}012\ \text{m}$$

11 **La ecuación de una onda estacionaria, en unidades del SI, es:**

$$\boldsymbol{y = 0{,}2 \cdot cos\,(2 \cdot \pi \cdot t) \cdot sen\,(2 \cdot x)}$$

a) Escribe las ondas componentes.

b) Halla la distancia entre dos nodos consecutivos.

a) La ecuación general de la onda estacionaria es:

$$y=2\cdot A\cdot sen\,(\omega\cdot t)\cdot cos\,(k\cdot x)$$

Pero la onda que proporciona el enunciado es:

$$y=0{,}2\cdot cos\,(2\cdot\pi\cdot t)\cdot sen\,(2\cdot x)=0{,}2\cdot sen\left(2\cdot\pi\cdot t+\frac{\pi}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{\pi}{2}-2\cdot x\right)$$

Luego vemos que la única diferencia es una cierta fase inicial en el seno y el coseno. Por tanto:

$$A=0{,}1\ \text{m}\quad;\quad\omega=2\cdot\pi\ \text{rad/s}\quad;\quad k=2\ \text{rad/m}^{-1}$$

Y las funciones de las ondas componentes son:

$$y_1=0{,}1\cdot sen\,(2\cdot\pi\cdot t+2\cdot x)$$

$$y_2=0{,}1\cdot sen\,(2\cdot\pi\cdot t-2\cdot x)$$

b) Para calcular la distancia entre dos nodos consecutivos, hallamos los puntos en los que se anula el coseno:

$$cos\,(k\cdot x)=0\ \rightarrow\ k\cdot x=(2\cdot n+1)\cdot\frac{\pi}{2}\ \rightarrow\ x=(2\cdot n+1)\cdot\frac{\pi}{2\cdot k}$$

$$\Delta x=2\cdot\Delta n\cdot\frac{\pi}{2\cdot k}=\Delta n\cdot\frac{\pi}{k}$$

Tomando dos nodos consecutivos (Δn = 1):

$$\Delta x=\frac{\pi}{k}=\frac{\pi}{2}=1{,}57\ \text{m}$$

12 **a) Razona qué características deben tener dos ondas que se propagan por una cuerda tensa con sus dos extremos fijos para que su superposición origine una onda estacionaria.**

b) Explica qué valores de longitud de onda pueden darse si la longitud de la cuerda es *L*.

a) A fin de que la superposición de las dos ondas genere una onda estacionaria, han de tener las mismas características (frecuencia y longitud de onda), y desplazarse en sentidos contrarios. En efecto, si tenemos dos ondas:

$$y_1=A\cdot sen\,(\omega\cdot t-k\cdot x)$$

$$y_2=-A\cdot sen\,(\omega\cdot t+k\cdot x)$$

utilizando la relación trigonométrica:

$$sen\,a-sen\,b=2\cdot cos\,\frac{a+b}{2}\cdot sen\,\frac{a-b}{2}$$

tenemos:

$$y = y_1 + y_2 = 2 \cdot A \cdot cos\left(\frac{2 \cdot \omega \cdot t}{2}\right) \cdot sen\left(-\frac{2 \cdot k \cdot x}{2}\right)$$

$$y = 2 \cdot A \cdot cos\,(\omega \cdot t) \cdot sen\,(k \cdot x)$$

b) Por un lado, hay que tener en cuenta que dos nodos consecutivos de una onda estacionaria están separados por una distancia igual a $\lambda/2$. Por otra parte, puesto que la cuerda está sujeta por ambos extremos, estos no pueden vibrar, y serán nodos. En efecto:

$$sen\,(k \cdot 0) = 0$$

se verifica siempre. La otra condición es:

$$sen\,(k \cdot L) = 0$$

de donde se obtiene:

$$k \cdot L = n \cdot \pi \quad ; \quad n = 1, 2, 3...$$

Así pues, la longitud de onda ha de verificar la siguiente relación:

$$\lambda = \frac{2 \cdot L}{n} \quad ; \quad n = 1, 2, 3...$$

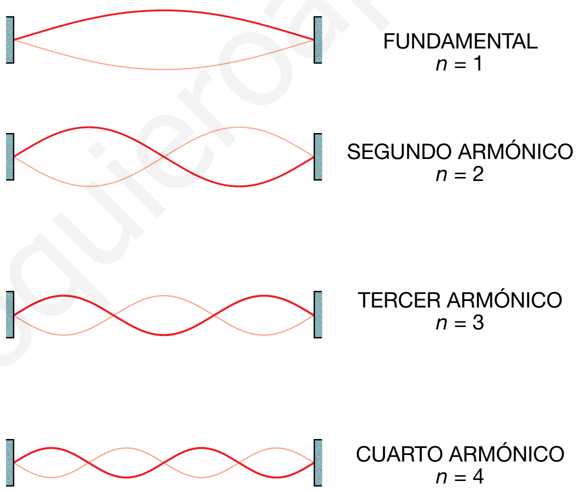
Las primeras longitudes de onda posibles son:

$\lambda = 2 \cdot L$

$\lambda = L$

$\lambda = \frac{2 \cdot L}{3}$

$\lambda = \frac{L}{2}$



13 **a) ¿Cómo se forman las ondas estacionarias? Explica las condiciones que deben cumplirse para que se forme una onda estacionaria en una cuerda tensa y fija por sus dos extremos. Dibuja dos modos de vibración.**

b) Una onda estacionaria sobre una cuerda tiene la ecuación, en unidades del SI:

$$\mathbf{y = 0{,}04 \cdot cos\,(\pi/2 \cdot x) \cdot cos\,(40 \cdot \pi \cdot t)}$$

Calcula la distancia entre dos nodos sucesivos y la velocidad en el punto $x = 3$ m en cualquier instante.

a) Una onda estacionaria se forma cuando interfieren dos ondas con las mismas características (frecuencia y longitud de onda), que se desplazan en sentidos contrarios. Generalmente esto ocurre cuando se encuentran confinadas (por ejemplo, al vibrar una cuerda tensa con sus dos extremos fijos, o cuando se genera una onda de sonido dentro de un tubo con los dos extremos abiertos), puesto que en este caso la onda se refleja en cada uno de los extremos, conservando sus características. De esta manera se tienen, de forma natural, dos ondas, una incidente, y otra reflejada, que al interferir producen la onda estacionaria. A fin de que esta aparezca, las dos ondas han de tener, como se ha dicho, las mismas características, como puede comprobarse cuando se suman las elongaciones de cada una de ellas:

$$y_1 = A \cdot sen\,(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

$$y_2 = A \cdot sen\,(\omega \cdot t + k \cdot x)$$

Utilizando la relación trigonométrica:

$$sen\,a + sen\,b = 2 \cdot sen\,\frac{a+b}{2} \cdot cos\,\frac{a-b}{2}$$

tenemos:

$$y = y_1 + y_2 = 2 \cdot A \cdot sen\left(\frac{2 \cdot \omega \cdot t}{2}\right) \cdot cos\left(-\frac{2 \cdot k \cdot x}{2}\right) \rightarrow \quad y = 2 \cdot A \cdot sen\,(\omega \cdot t) \cdot cos\,(k \cdot x)$$

b) Para calcular la distancia entre dos nodos consecutivos, hallamos los puntos en los que se anula el coseno:

$$cos\,(k \cdot x) = 0 \quad \rightarrow \quad k \cdot x = (2 \cdot n + 1) \cdot \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad x = (2 \cdot n + 1) \cdot \frac{\pi}{2 \cdot k}$$

$$\Delta x = 2 \cdot \Delta n \cdot \frac{\pi}{2 \cdot k} = \Delta n \cdot \frac{\pi}{k}$$

Tomando dos nodos consecutivos (Δn = 1):

$$\Delta x = \frac{\pi}{k}$$

Teniendo en cuenta que, en este caso, $k = \pi/2$ rad/m:

$$\Delta x = \frac{\pi}{\frac{\pi}{2}} = 2 \text{ m}$$

La velocidad se obtiene derivando la función de onda con respecto al tiempo:

$$v = \frac{dy}{dt} = -0{,}04 \cdot 40 \cdot \pi \cdot cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) \cdot sen\,(40 \cdot \pi \cdot t)$$

En x = 3 m:

$$v = \frac{dy}{dt} = -1{,}6 \cdot \pi \cdot cos\left(\frac{3 \cdot \pi}{2}\right) \cdot sen\,(40 \cdot \pi \cdot t) = 0 \text{ m/s}$$

Se podría haber llegado a la misma conclusión observando que la longitud de onda es:

$$\lambda = \frac{2 \cdot \pi}{k} = \frac{2 \cdot \pi}{\frac{\pi}{2}} = 4 \text{ m}$$

Y por tanto el punto verifica:

$$x = \frac{3}{4} \cdot \lambda$$

Como vemos, de acuerdo con la ecuación de la onda dada en el enunciado, este punto corresponde a un nodo.

Página 207

14 **Una onda transversal se propaga por una cuerda tensa fija por sus extremos con una velocidad de 80 m/s, y al reflejarse se forma el cuarto armónico de una onda estacionaria cuya ecuación es (con todas las magnitudes expresadas en el SI):**

$$y = 0{,}12 \cdot sen\,(k \cdot x) \cdot cos\,(\omega \cdot t)$$

a) Si la longitud de la cuerda tensa es 4 m, calcula los valores de los parámetros *k* y ω, y expresa su frecuencia en hercios.

b) ¿Cuál es la máxima elongación de un punto de la cuerda situado a 0,5 m de un extremo? ¿Cuál es la máxima aceleración que experimenta ese punto de la cuerda?

c) ¿Qué frecuencia debería tener la onda transversal que se propaga por la cuerda a 80 m/s para que se formase el segundo armónico en lugar del cuarto? Explícalo brevemente.

a) Como la longitud de la cuerda es 4 m y la velocidad de propagación de la onda es de 80 m/s, la frecuencia fundamental será:

$$f_1 = \frac{v}{2 \cdot L} = \frac{80}{2 \cdot 4} = 10 \text{ Hz}$$

Si se forma el cuarto armónico, su frecuencia será:

$$f_4 = 4 \cdot f_1 = 40 \text{ Hz}$$

y su longitud de onda:

$$\lambda_4 = \frac{2 \cdot L}{n} = \frac{2 \cdot 4}{4} = 2 \text{ m}$$

Por tanto:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f_4 = 80 \cdot \pi \text{ rad/s}$$

$$k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda_4} = \frac{2 \cdot \pi}{2} = \pi \text{ rad/m}^{-1}$$

b) La elongación de un punto de la cuerda, en cualquier instante de tiempo, será:

$$y = 0{,}12 \cdot sen\,(\pi \cdot x) \cdot cos\,(80 \cdot \pi \cdot t)$$

Por tanto, para un punto situado en x = 0,5 m:

$$y = 0{,}12 \cdot sen\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot cos\,(80 \cdot \pi \cdot t) = 0{,}12 \cdot cos\,(80 \cdot \pi \cdot t)$$

Luego la amplitud será de 0,12 m.

c) Para que la frecuencia de 40 Hz correspondiese al segundo armónico, en vez de al cuarto, la frecuencia fundamental habría de ser:

$$f_1 = \frac{40}{2} = 20 \text{ Hz}$$

Reflexión y refracción

15 **¿Son iguales la frecuencia, velocidad de propagación y longitud de onda de la luz incidente que las de la luz reflejada y transmitida? Razona la respuesta.**

En ambos casos la frecuencia es la misma, puesto que esta solamente depende del foco, no del medio por el que se propaga.

En el caso de la reflexión, al volver al mismo medio, la velocidad de propagación es la misma, y por tanto, la longitud de onda, que está dada por:

$$\lambda = \frac{v}{f}$$

tampoco cambia.

En el caso de la refracción, al pasar a otro medio, la velocidad de propagación varía, y por tanto también lo hace la longitud de onda. Llamemos v' a la velocidad y λ' a la longitud de onda en el segundo medio. Entonces, como la frecuencia es la misma:

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v'}{\lambda'} \rightarrow \lambda' = \lambda \cdot \frac{v'}{v}$$

16 **Una onda que viaja a 10 m/s y tiene una longitud de onda de 0,4 m incide con 30° sobre un medio donde su longitud de onda es 10 cm. Halla el índice de refracción del segundo medio respecto al primero, y la frecuencia y la velocidad de la onda en él.**

En el primer medio la velocidad es de 10 m/s, y la longitud de onda es de 0,4 m. Esto corresponde a una frecuencia:

$$f = \frac{v_1}{\lambda_1} = \frac{10 \text{ m/s}}{0{,}4 \text{ m}} = 25 \text{ Hz}$$

Como esta no cambia al pasar de un medio a otro, tendremos:

$$f = \frac{v_1}{\lambda_1} = \frac{v_2}{\lambda_2} \rightarrow v_2 = v_1 \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 10 \text{ m/s} \cdot \frac{10 \text{ m}}{40 \text{ m}} = 2{,}5 \text{ m/s}$$

Y el índice de refracción del segundo medio respecto al primero será:

$$n = \frac{v_2}{v_1} = \frac{10 \text{ m/s}}{2{,}5 \text{ m/s}} = 4$$

17 **Una onda pasa de un medio a otro con menor índice de refracción. Indica qué sucede con la frecuencia, la longitud de onda y la velocidad de la onda. ¿El ángulo de refracción es menor que el de incidencia?**

La frecuencia depende del foco emisor, por lo que no cambia al pasar de un medio a otro. Si tomamos para ambos medios una velocidad de referencia, indicada por la letra *c*, tendremos que los índices de refracción serán:

$$n_1 = \frac{c}{v_1} \quad ; \quad n_2 = \frac{c}{v_2}$$

Por tanto:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{v_2}{v_1}$$

Si el índice de refracción del segundo medio es menor que el del primero ($n_2 < n_1$):

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{n_1}{n_2} > 1 \rightarrow v_2 > v_1$$

Es decir, la velocidad en el segundo medio será mayor. Teniendo en cuenta que la frecuencia no cambia:

$$f = \frac{v_1}{\lambda_1} = \frac{v_2}{\lambda_2} \rightarrow \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{v_2}{v_1} > 1 \rightarrow \lambda_2 > \lambda_1$$

y la longitud de onda también aumentará. Por último, de acuerdo con la ley de Snell:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\text{sen}\, \hat{i}}{\text{sen}\, \hat{r}} < 1$$

Por tanto, el ángulo de refracción es mayor que el de incidencia, esto es, el rayo se acerca a la normal.

18 **Una onda de frecuencia 100 Hz y velocidad de propagación 50 m/s pasa a un medio donde su velocidad es 100 m/s. Calcula el índice de refracción del segundo medio respecto al primero y la longitud de onda en cada medio.**

El índice de refracción del segundo medio respecto del primero es:

$$n = \frac{v_1}{v_2} = \frac{50\ \text{m/s}}{100\ \text{m/s}} = 0{,}5$$

Hay que tener cuidado con el orden de los subíndices. Si se trata del índice de refracción del segundo medio respecto del primero, v_2 tiene que ir en el denominador.

Como la frecuencia no se modifica al cambiar de medio, tendremos:

$$\lambda_1 = \frac{v_1}{f} = \frac{50\ \text{m/s}}{100\ \text{m/s}} = 0{,}5\ \text{m}$$

$$\lambda_2 = \frac{v_2}{f} = \frac{100\ \text{Hz}}{100\ \text{Hz}} = 1\ \text{m}$$

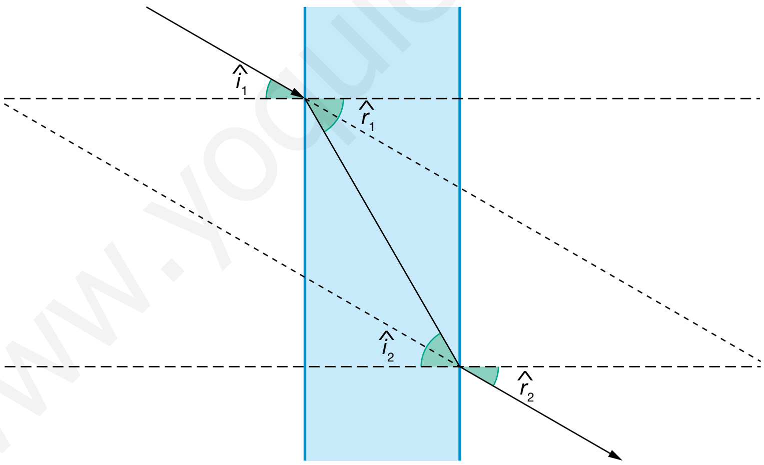
19 **Una onda que viaja por el aire incide en otro medio con un ángulo de 30°; lo atraviesa y sale otra vez al aire. Halla el ángulo con que sale.**

Aplicamos la ley de Snell dos veces:

$$n_1 \cdot sen\,\hat{i}_1 = n_2 \cdot sen\,\hat{r}_1 = n_2 \cdot sen\,\hat{i}_2 = n_1 \cdot sen\,\hat{r}_2$$

Donde hemos tenido en cuenta que: $\hat{r}_1 = \hat{i}_2$. Se obtiene, por tanto, que: $\hat{r}_2 = \hat{i}_1$.

Es decir, el ángulo de salida al segundo medio es igual que el de incidencia, por lo que será de nuevo de 30°.



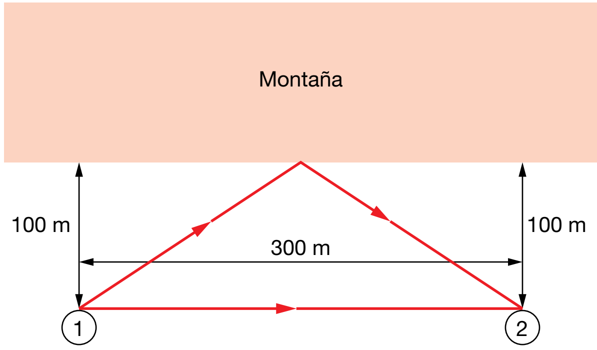
20 **Una onda que viaja en un medio de índice de refracción 1 pasa a otro medio de índice de refracción 1,3 incidiendo con un ángulo de 30°. Halla el ángulo que forma el rayo refractado con la normal.**

Aplicamos la ley de Snell:

$$n_1 \cdot sen\,\hat{i} = n_2 \cdot sen\,\hat{r} \quad \rightarrow \quad sen\,\hat{r} = \frac{n_1}{n_2} \cdot sen\,\hat{i} = \frac{1}{1{,}3} \cdot sen\,30° \quad \rightarrow \quad \hat{i} = 22{,}62°$$

21 **Dos excursionistas se encuentran frente a una montaña, a 100 m de ella y distanciados 300 m uno del otro. Si el primero grita, ¿cuánto tarda el sonido en llegar al segundo? ¿Cuánto tiempo después de oír el primer grito, el segundo vuelve a escuchar el sonido del primero? Toma v_s = 340 m/s.**

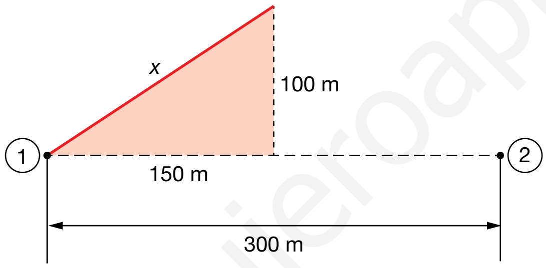
La situación del problema es la que se muestra en la siguiente figura:



Por un lado, el sonido se propaga en línea recta desde un excursionista hasta el otro, a una velocidad de 340 m/s, tardando un tiempo:

$$t_1 = \frac{e}{v} = \frac{300\ \text{m}}{340\ \text{m/s}} = 0,88\ \text{s}$$

Por otro lado, el sonido recorre la distancia x, se refleja en la montaña, y vuelve a recorrer una distancia x, hasta llegar al segundo excursionista. Dicha distancia se puede obtener como la hipotenusa de un triángulo rectángulo:



$$x = \sqrt{100^2 + 150^2} \simeq 180,3\ \text{m}$$

Por lo tanto la distancia que ha de recorrer la onda sonora por este segundo camino es de $2 \cdot x$ = 360,6 m, tardando un tiempo:

$$t_2 = \frac{360,6\ \text{m}}{340\ \text{m/s}} = 1,06\ \text{s}$$

Así pues, el segundo excursionista recibirá el eco 0,18 s después del primer sonido.

22 Halla el ángulo límite para un rayo que pasa del agua (n = 1,33) al aire (n = 1).

El ángulo límite es el que corresponde a un ángulo del rayo refractado de 90°. Por tanto:

$$\hat{i}_{lim} = arcsen\ \frac{1}{1,33} = 48,75°$$

23 Supón que quieres hacer una demostración del fenómeno de la reflexión total. En el laboratorio dispones de un depósito, que contiene un líquido cuyo índice de refracción vale 1,6, y de un puntero láser de muy baja potencia. ¿En qué medio (aire o líquido) se debe colocar el puntero láser para que se produzca la reflexión total? ¿Cuánto valdrá el ángulo límite?

La reflexión total se produce al pasar de un medio con mayor índice de refracción a otro con menor índice de refracción. Por lo tanto, el puntero se tiene que colocar en el líquido. El ángulo límite valdrá:

$$\hat{i}_{lim} = arcsen\ \frac{1}{1,6} = 38,7°$$

Difracción

24 **Si la luz se encuentra con un obstáculo de tamaño comparable a su longitud de onda, λ, experimenta:**

a) Polarización.

b) Difracción.

c) Reflexión. Dibuja la marcha de los rayos.

Experimenta difracción.

25 **Halla la distancia entre los átomos de una red cristalina si sobre una pantalla situada a 20 cm se recoge un patrón de difracción que se obtiene al hacer pasar luz de 10^{14} Hz a través de una red cristalina, obteniéndose franjas de difracción separadas 1 mm.**

Obtengamos primero la longitud de onda de la radiación electromagnética:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}}{10^{14}\ \text{s}^{-1}} = 3 \cdot 10^{-6}\ \text{m}$$

Utilizando la expresión:

$$d = \frac{\lambda \cdot D}{\Delta y}$$

obtenemos un valor: $d = 6 \cdot 10^{-4}$ m.

Página 208

26 **¿Por qué se puede oír la conversación de dos personas detrás de la esquina de un edificio?**

Porque las dimensiones del obstáculo son del mismo orden que la longitud de onda del sonido que emitimos los humanos. Por lo tanto, experimenta difracción y supera el obstáculo propagándose con ángulos grandes respecto a su dirección original. De ahí que las ondas sonoras puedan llegar a nuestro oído.

27 **Se irradia con rayos *X* de longitud de onda 10 Å un cristal. El aparato consta de una fuente de rayos *X* que se recogen en una pantalla situada a 20 cm del cristal, obteniéndose un patrón de difracción donde las líneas están separadas 1 cm. Halla la distancia entre los iones que forman el cristal.**

$$d = \frac{\lambda \cdot D}{\Delta y} = \frac{10 \cdot 10^{-10}\ \text{m} \cdot 0{,}2\ \text{m}}{0{,}01\ \text{m}} = 2 \cdot 10^{-8}\ \text{m}$$

28 **Un cristal de cloruro de sodio se usa como red de difracción para determinar la frecuencia de una radiación procedente del espacio. La pantalla está situada a 10 cm y las líneas que se obtienen están separadas 5 mm. Halla la frecuencia de la radiación.**

Dato: Considera una distancia entre los iones de cloruro de sodio de 0,281 nm.

Utilizando la expresión:

$$d = \frac{\lambda \cdot D}{\Delta y}$$

podemos obtener la longitud de onda:

$$\lambda = \frac{d \cdot \Delta y}{D} = \frac{0{,}281 \cdot 10^{-9}\ \text{m} \cdot 0{,}005\ \text{m}}{0{,}1\ \text{m}} = 1{,}405 \cdot 10^{-11}\ \text{m}$$

Por tanto, la frecuencia será:

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}}{1{,}405 \cdot 10^{-11}\ \text{m}} = 2{,}14 \cdot 10^{19}\ \text{Hz}$$

Sonido

29 **La intensidad del sonido puede medirse en decibelios (dB). Explica en qué consiste la escala decibélica de intensidad acústica (o sonoridad).**

Dado que la sensación que produce en el oído el sonido no es proporcional a la intensidad de la onda, y a que depende de la frecuencia, se utiliza el nivel de intensidad sonora o sensación sonora, que compara un sonido con la intensidad umbral correspondiente a esa frecuencia (intensidad a partir de la cual el sonido es audible), y lo expresa en escala logarítmica:

$$S = log \frac{I}{I_0}$$

La unidad de la sensación sonora es el belio, B, aunque generalmente se utiliza el decibelio, dB:

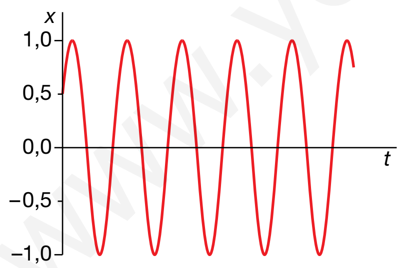
$$S = 10 \cdot log \frac{I}{I_0}$$

30 **a) Enumera y define las cualidades del sonido. ¿Cuál de ellas se modifica conforme el sonido se propaga por el aire? Explica asimismo el fenómeno que causa dicha modificación.**

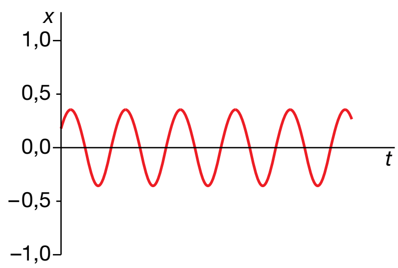
b) Si la velocidad del sonido en el aire, a una temperatura dada, es v = 340 m · s^{-1}, calcula la frecuencia de la voz de una soprano que emite sonidos de longitud de onda λ = 0,17 m.

a) Las cualidades del sonido son las siguientes:

– Intensidad. También denominada volumen. Está relacionada con la amplitud de la onda, y se define como la potencia que se recibe por unidad de superficie. Sus unidades en el SI son: W/m^2.

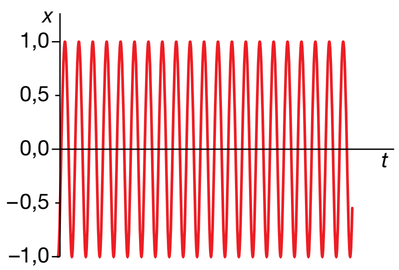


Intensidad alta

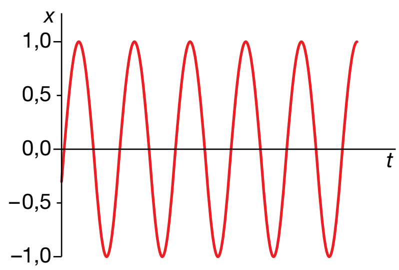


Intensidad baja

– Tono. También denominado «altura» del sonido. Es la frecuencia de la vibración. Si esta es elevada, se dice que el sonido es agudo, y si es baja, que es grave.

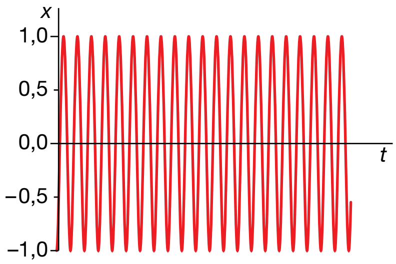


Sonido agudo



Sonido grave

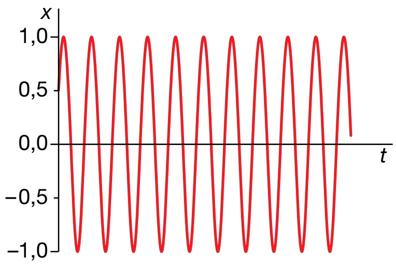
– Timbre. Las ondas monocromáticas (de una sola frecuencia) no existen en la realidad, sino que generalmente todo sonido se compone de distintas ondas monocromáticas. Es este grupo de ondas el que da el timbre de un sonido, y suele caracterizar al cuerpo que lo genera. De ahí que podamos distinguir dos instrumentos o voces diferentes aunque interpreten la misma melodía. El timbre de los distintos instrumentos se compone de un sonido fundamental, que es el que predomina (siendo su frecuencia la que determina la altura del sonido), más toda una serie de sonidos adicionales que se conocen con el nombre de armónicos.



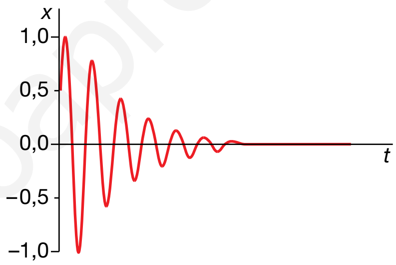
Sonido fundamental

Sonido complejo

– Aunque no se ha estudiado en el texto, podemos distinguir también los sonidos por su duración. Es el tiempo que permanece la vibración.



Sonido largo



Sonido corto

b) La frecuencia se puede calcular a partir de la longitud de onda y de su velocidad de propagación:

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{340\ \text{m/s}}{0,17\ \text{m}} = 2\,000\ \text{Hz}$$

31 **Halla el nivel de intensidad sonora de un sonido de 10^6 W/m² (a una frecuencia de 1 000 Hz).**

Dato: $I_0 = 10^{-12}$ W · m⁻².

El nivel de intensidad sonora, en decibelios, será:

$$S = 10 \cdot log\,\frac{I}{I_0} = 10 \cdot log\,\frac{10^6}{10^{-12}} = 180\ \text{dB}$$

32 **Halla la frecuencia de los tres primeros armónicos en un tubo abierto y en otro tubo cerrado por un extremo, ambos de 1 m de longitud.**

Vamos a tomar como velocidad de propagación del sonido: v_s = 340 m/s.

Para el tubo abierto, las frecuencias de los armónicos vienen dadas por:

$$f_n = n \cdot \frac{v}{2 \cdot L}$$

Así pues, asignando a *n* los valores 1, 2 y 3, tendremos:

$$f_1 = 170\ \text{Hz} \quad ; \quad f_2 = 340\ \text{Hz} \quad ; \quad f_3 = 510\ \text{Hz}$$

Para el tubo cerrado por un extremo, las frecuencias vienen dadas por:

$$f_n = (2 \cdot n + 1) \cdot \frac{v}{4 \cdot L}$$

donde: $2 \cdot n + 1 = 1, 3, 5$. Por tanto:

$$f_1 = 85 \text{ Hz} \quad ; \quad f_2 = 255 \text{ Hz} \quad ; \quad f_3 = 425 \text{ Hz}$$

33 **¿Por qué los instrumentos de viento, con el calor, dan notas más agudas de lo habitual, y los de cuerda, más bajas?**

En un instrumento de viento, la frecuencia es directamente proporcional a la velocidad del sonido, e inversamente proporcional a la longitud del tubo. Al aumentar la temperatura, también lo hace la velocidad del sonido, según la relación:

$$v = 20{,}1 \cdot \sqrt{T}$$

Esto hace que la frecuencia aumente, dando el instrumento notas más agudas. Es cierto que también se producirá una dilatación, aumentando la longitud del tubo; sin embargo, este efecto es despreciable frente al anterior.

En un instrumento de cuerda, la frecuencia también viene dada por:

$$f = n \cdot \frac{v}{2 \cdot L}$$

Pero en este caso, la velocidad no es la del sonido, sino la de propagación de la onda a lo largo de la cuerda. Al aumentar la temperatura, estas se dilatan. Como sus extremos están fijos, la longitud permanece constante, pero la tensión es menor. Ahora bien, en este caso, la velocidad que aparece en la expresión anterior depende de la tensión; cuanto mayor sea esta, mayor es la velocidad. Por lo tanto, por efecto de la temperatura, la tensión disminuye, también la velocidad de propagación de la onda en la cuerda, y como resultado, las frecuencias son más bajas. Podría pensarse que el efecto predominante proviniera de la dilatación del instrumento, que aumentaría el valor de L, haciendo que las frecuencias disminuyeran, pero no es así. Primero, porque la dilatación de las cuerdas es mayor que la del instrumento, por lo que estas se destensan aunque el instrumento se dilate un poco. Segundo, si fuera esa la explicación, entonces al dilatarse el instrumento las cuerdas se tensarían, aumentando la velocidad de propagación de la onda en las mismas, y dando notas más agudas, lo cual no ocurre.

34 **La frecuencia fundamental de una cuerda de guitarra es 450 Hz, y su longitud, 50 cm. Halla la longitud de onda de la onda estacionaria producida al ser pulsada y su velocidad.**

La cuerda de una guitarra está fija por los dos extremos, por lo que para que tenga lugar la interferencia constructiva entre la onda incidente y la reflejada que da lugar a la onda estacionaria, la longitud de la cuerda debe ser múltiplo entero de la semilongitud de onda:

$$L = n \cdot \frac{\lambda}{2} \;\rightarrow\; \lambda = \frac{2 \cdot L}{n} \;\rightarrow\; f = n \cdot \frac{v}{2 \cdot L}$$

Tomando $n = 1$ para la frecuencia fundamental, se obtiene:

$$\lambda = 2 \cdot L = 1 \text{ m}$$

La velocidad de la onda será:

$$v = 2 \cdot L = 1 \text{ m}$$

35 **Una fuente sonora de dimensiones despreciables emite en el espacio con una potencia de 10 W, distribuida de forma uniforme en todas las direcciones (onda esférica):**

a) Calcula la intensidad del sonido en un punto, *P*, a 10 m de dicha fuente, en unidades del SI.

b) ¿Cuál es la intensidad acústica, en dB, que produce la fuente en dicho punto?

Dato: $I_0 = 10^{-12}$ W · m^{-2}.

Como se trata de una onda esférica, la intensidad disminuye con el cuadrado de la distancia, por lo que:

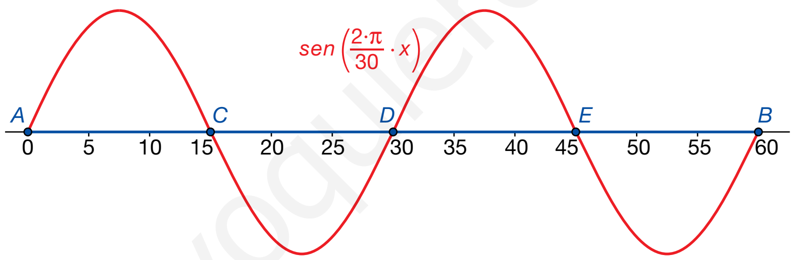
$$I = \frac{P}{S} = \frac{P}{4 \cdot \pi \cdot r^2} = \frac{10\ \text{W}}{4 \cdot \pi \cdot (10\ \text{m})^2} = 7{,}96 \cdot 10^{-3}\ \text{W/m}^2$$

La intensidad sonora será:

$$S = 10 \cdot log\, \frac{I}{I_0} = 10 \cdot log\, \frac{7{,}96 \cdot 10^{-3}}{10^{-12}} = 99\ \text{dB}$$

36 **La longitud de una cuerda de guitarra es de 60 cm y vibra con una longitud de onda de 30 cm. Indica, demostrándolo con un dibujo, el número de nodos que presenta la cuerda.**

Tenemos que representar una onda de 30 cm de longitud de onda. La situación es la que se muestra en la siguiente figura, donde se representan los 5 nodos (los dos extremos más tres interiores):



37 **Un radar emite una onda de radio de frecuencia 6 · 10^7 Hz.**

a) Explica las diferencias entre esa onda y una onda sonora de la misma frecuencia y determina la longitud de onda de cada una.

b) La onda emitida por el radar tarda 3 · 10^{-6} s en volver al detector después de reflejarse en un obstáculo. Calcula la distancia entre el obstáculo y el radar.

Datos: c = 3 · 10^8 m · s^{-1}; v_s = 340 m · s^{-1}.

a) Las ondas de radio son de tipo electromagnético. Se trata de la oscilación de un campo eléctrico y un campo magnético que se propaga a la velocidad de la luz (el índice de refracción del aire es prácticamente igual al del vacío, por lo que se puede tomar la velocidad de la luz en el aire, con muy buena aproximación, como 300 000 km/s). Es una onda transversal que no necesita un medio para propagarse. Por otro lado, las ondas sonoras son longitudinales, y consisten en variaciones de la presión que se propagan en el aire, a una velocidad aproximadamente igual a 340 m/s.

Si se trata de una onda de radio, su longitud de onda sería:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8\ \text{m/s}}{6 \cdot 10^7\ \text{s}^{-1}} = 5\ \text{m}$$

Y si fuera una onda de sonido:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340 \text{ m/s}}{6 \cdot 10^{7} \text{ s}^{-1}} = 5,67 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

b) La distancia que recorre la onda emitida por el radar durante ese tiempo es:

$$D = c \cdot t = 3 \cdot 10^{8} \text{ m/s} \cdot 3 \cdot 10^{-6} \text{ s} = 900 \text{ m}$$

Como esta es el doble de la distancia entre el emisor y el obstáculo, la distancia entre ambos será:

$$d = 450 \text{ m}$$

Efecto Doppler

38 Explica brevemente qué es el efecto Doppler. Indica alguna situación física en la que se ponga de manifiesto este fenómeno.

El efecto Doppler es el cambio que se observa en la frecuencia de una onda cuando el emisor y el receptor se desplazan con movimiento relativo. Se pone de manifiesto, por ejemplo, cuando un tren silba mientras se mueve. Si escuchamos parados cerca de la vía, notaremos una frecuencia más alta cuando el tren se acerca, y una frecuencia más baja cuando se aleja de nosotros.

Página 209

39 a) A 21 °C, el sonido se propaga por el aire a 343,6 m/s. ¿Con qué velocidad lo hará a 30 °C?

b) Un día, con la temperatura del aire a 25 °C, se coloca un altavoz que emite una nota de frecuencia 261,63 Hz en un vehículo. ¿Con qué velocidad se mueve el vehículo si un micrófono colocado en el suelo del trayecto capta una nota de 284,67 Hz? Indica si el coche se aleja o se acerca al micrófono.

a) Como la velocidad aumenta de forma proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura:

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \rightarrow v_2 = v_1 \cdot \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = 343,6 \cdot \sqrt{\frac{30+273}{21+273}} = 343,6 \cdot \sqrt{\frac{303}{294}} = 348,8 \text{ m/s}$$

b) Como la temperatura del aire es de 25 °C, la velocidad del sonido será:

$$v = 343,6 \cdot \sqrt{\frac{25+273}{21+273}} = 343,6 \cdot \sqrt{\frac{298}{294}} = 345,9 \text{ m/s}$$

Puesto que la nota percibida por el micrófono tiene una frecuencia mayor que la emitida por el altavoz, el coche ha de acercarse, por lo que tomaremos signo negativo en la velocidad del foco:

$$f' = f \cdot \frac{v}{v - v_F}$$

Despejando:

$$v - v_F = \frac{f}{f'} \cdot v \rightarrow v_F = \left(1 - \frac{f}{f'}\right) \cdot v = \left(1 - \frac{261,63}{284,67}\right) \cdot 345,9 \simeq 28 \text{ m/s}$$

40 **Dos trenes que viajan a 200 y 250 km/h se cruzan en un punto y hacen sonar sus silbatos a 400 Hz. ¿Qué frecuencia perciben los viajeros?**

Hay que tener cuidado de pasar las velocidades al SI, ya que no sería correcto sumar la velocidad del sonido, en m/s, con la de los trenes, en km/h:

$$250\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1\ \text{h}}{3\,600\ \text{s}} \cdot \frac{1000\ \text{m}}{1\ \text{km}} = 69{,}44\ \text{m/s}$$

$$200\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1\ \text{h}}{3\,600\ \text{s}} \cdot \frac{1000\ \text{m}}{1\ \text{km}} = 55{,}56\ \text{m/s}$$

Hay que tener en cuenta que el papel de observador y de emisor no es simétrico en este problema, ya que ambos trenes tienen velocidades distintas.

Consideremos, en primer lugar, que el emisor es el tren que se mueve a 200 km/h, y el receptor el que se mueve a 250 km/h. Como ambos se acercan, tomaremos signo positivo para el observador y negativo para el emisor, por lo que tendremos:

$$f' = f \cdot \frac{v + v_R}{v - v_F} = 400 \cdot \frac{340 + 69{,}44}{340 - 55{,}56} = 575{,}8\ \text{Hz}$$

Luego los viajeros que van en el tren que se mueve a 250 km/h percibirán una frecuencia de 575,8 Hz.

Consideremos ahora que el emisor es el tren que tiene una velocidad de 250 km/h, y el receptor, el que se mueve a 200 km/h. Como ambos se acercan, tendremos que tomar, igual que antes, signo positivo para el observador, y negativo para el emisor:

$$f' = f \cdot \frac{v + v_R}{v - v_F} = 400 \cdot \frac{340 + 55{,}56}{340 - 69{,}44} = 584{,}8\ \text{Hz}$$

Vemos que en este caso los viajeros del tren más lento perciben una frecuencia mayor que los otros: 584,8 Hz.

41 **Un tren se acerca a una estación a 36 km/h y hace sonar su silbato con una frecuencia de 200 Hz. Halla la frecuencia que escucha una persona en la estación y la que percibirá cuando el tren pase la estación sin parar, alejándose de ella.**

En primer lugar, pasamos la velocidad al SI:

$$v_F = 36\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1\ \text{h}}{3\,600\ \text{s}} \cdot \frac{1000\ \text{m}}{1\ \text{km}} = 10\ \text{m/s}$$

Cuando el tren se acerca:

$$f' = f \cdot \frac{v}{v - v_F} = 200 \cdot \frac{340}{340 - 10} = 206{,}1\ \text{Hz}$$

Y cuando se aleja:

$$f' = f \cdot \frac{v}{v + v_F} = 200 \cdot \frac{340}{340 + 10} = 194{,}3\ \text{Hz}$$

42 **Una ambulancia, que se desplaza por una carretera a 72 km/h, lleva encendida su sirena, que emite un sonido de 420 Hz. Calcula la frecuencia que percibirá el conductor de un automóvil que transita por la misma carretera en sentido contrario con una velocidad de 50 km/h según se acerque o se aleje de ella.**

En primer lugar, pasamos las velocidades al SI:

$$72\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1\ \text{h}}{3\,600\ \text{s}} \cdot \frac{1000\ \text{m}}{1\ \text{km}} = 20\ \text{m/s}$$

$$50\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1\ \text{h}}{3\,600\ \text{s}} \cdot \frac{1000\ \text{m}}{1\ \text{km}} = 13{,}9\ \text{m/s}$$

Cuando ambos se acercan, tomaremos signo negativo para la velocidad del foco y positivo para la velocidad del receptor:

$$f_{acerca} = f \cdot \frac{v + v_R}{v - v_F} = 420 \cdot \frac{340 + 13,9}{340 - 20} \simeq 465 \text{ Hz}$$

Y cuando ambos se alejan, tomaremos signo positivo para la velocidad del foco y negativo para la velocidad del receptor:

$$f_{acerca} = f \cdot \frac{v - v_R}{v + v_F} = 420 \cdot \frac{340 - 20}{340 + 13,9} = 380 \text{ Hz}$$