1 Análisis del movimiento armónico simple

Página 157

1 **Describe algunos movimientos armónicos simples que conozcas.**

Por ejemplo, el movimiento de un diapasón, de un péndulo con oscilaciones muy pequeñas o la oscilación de un muelle.

2 **Un péndulo que efectúa pequeñas oscilaciones describe, aproximadamente, un movimiento armónico simple. La distancia entre los extremos de oscilación es 0,1 cm y tarda 0,01 s en recorrerla. Halla su amplitud, su frecuencia angular, su período y su frecuencia.**

Puesto que la máxima distancia de oscilación es 0,1 cm, la amplitud será la mitad, es decir:

$$A = 5 \cdot 10^{-4}\ \text{m}$$

El período es el tiempo que tarda el péndulo en repetir un estado de oscilación; por ejemplo, el tiempo que emplea en salir de un extremo y volver a él, es decir:

$$T = 0{,}02\ \text{s}$$

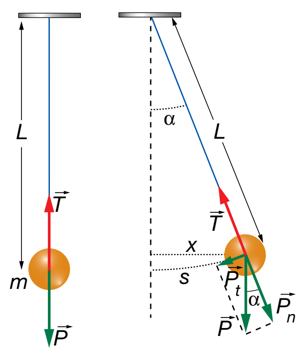
La frecuencia es la inversa del período:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}02\ \text{s}} = 50\ \text{Hz}$$

La frecuencia angular, por último, es:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 100 \cdot \pi\ \text{rad/s}$$

3 **Explica por qué puede considerarse que un péndulo que realiza pequeñas oscilaciones describe un m.a.s.**



Como vimos el curso pasado, la fuerza neta que actúa sobre la masa del péndulo (resultante de la fuerza peso de la masa y la tensión de la cuerda) se puede descomponer en una componente tangencial y otra perpendicular al movimiento. La componente perpendicular (en la dirección de la cuerda) es nula, ya que la tensión de la cuerda contrarresta en todo momento a la componente del peso en esa dirección. Por tanto, la fuerza solo tiene componente en la dirección tangencial, y es igual a la componente tangencial del peso. Aplicando la segunda ley de Newton:

$$P_t = -m \cdot g \cdot sen\ \alpha \ \rightarrow \ a = -g \cdot sen\ \alpha$$

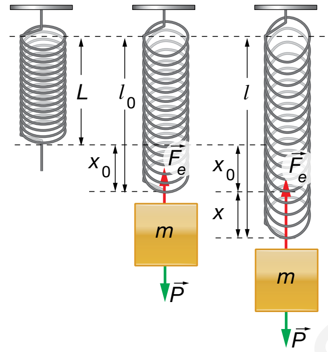
Para ángulos pequeños, la trayectoria curva del péndulo tiende a la cuerda, y se cumple:

$$s \simeq x = L \cdot sen\ \alpha \ \rightarrow \ a = -\frac{g}{L} \cdot x$$

Se deduce, por tanto, que la posición del péndulo (elongación) viene dada por una función armónica del ángulo y que la aceleración es proporcional y de sentido opuesto a esta, siendo estas las dos características de un movimiento armónico simple.

4 Explica si una bola que cuelga del techo por un muelle y oscila realiza un m.a.s.

Sin considerar fuerzas disipativas, sobre la masa que cuelga del muelle actúan la fuerza peso y la fuerza elástica del muelle. Cuando la bola está en equilibrio, la fuerza elástica es igual y de sentido contrario al peso. En ese caso:



$$\vec{P} + \vec{F}_e = 0 \quad \rightarrow \quad m \cdot g - k \cdot x_0 = 0$$

Cuando el cuerpo oscila, la fuerza elástica produce una aceleración sobre la bola. Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\vec{P} + \vec{F}_e = m \cdot \vec{a} \quad \rightarrow \quad m \cdot g - k \cdot (x + x_0) = m \cdot a$$

$$-k \cdot x = m \cdot a \quad \rightarrow \quad a = -\frac{k}{m} \cdot x$$

Como vemos, la aceleración es directamente proporcional y de sentido opuesto a la elongación del movimiento, de donde se deduce que la bola sigue un movimiento armónico simple (teniendo en cuenta que la aceleración es la derivada segunda de la posición, obtenemos una ecuación diferencial cuya solución es una función armónica).

2 Ecuaciones del movimiento armónico simple

Página 159

5 Una partícula, que realiza un movimiento armónico simple, inicia su movimiento en un extremo de su trayectoria, situado a 0,1 cm del punto de equilibrio, y tarda 1 s en llegar al otro extremo. Halla las ecuaciones de la elongación, la velocidad y la aceleración.

De acuerdo con los datos del problema, la amplitud y el período son:

$$A = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad ; \quad T = 2 \text{ s}$$

La frecuencia es la inversa del período:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2 \text{ s}} = 0{,}5 \text{ Hz}$$

Y la frecuencia angular vale:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = \pi \text{ rad/s}$$

La elongación será:

$$x = A \cdot sen\,(\omega \cdot t + \phi_0) \quad \rightarrow \quad x = 1 \cdot 10^{-3} \cdot sen\,(\pi \cdot t + \phi_0)$$

Como en el instante inicial la partícula se encuentra en uno de los extremos del movimiento, la fase inicial vale:

$$1 \cdot 10^{-3} = 1 \cdot 10^{-3} \cdot sen\,\phi_0 \quad \rightarrow \quad \phi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Por tanto, la ecuación de la elongación es:

$$x = 1 \cdot 10^{-3} \cdot sen\left(\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ m}$$

La velocidad se obtiene mediante la derivada de la elongación:

$$v = \frac{dx}{dt} = \pi \cdot 10^{-3} \cdot cos\left(\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ m/s}$$

La aceleración es la variación de la velocidad respecto del tiempo:

$$a = \frac{dv}{dt} = -\pi^2 \cdot 10^{-3} \cdot sen\left(\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)\ \text{m/s}^2$$

6 **El extremo de un muelle oscila con una amplitud de 5 cm con una frecuencia de 0,5 s^{-1}. Cuando ha pasado 1 s se encuentra en el centro de oscilación. Halla la fase inicial y la ecuación *x*-*t*.**

Los datos del problema son:

$$A = 0{,}05\ \text{m} \quad ; \quad f = 0{,}5\ \text{Hz}$$

El período y la frecuencia angular valen:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{0{,}5\ \text{Hz}} = 2\ \text{s}$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = \pi\ \text{rad/s}$$

Para hallar la fase inicial, escribimos la ecuación de la elongación y sustituimos las condiciones dadas para t = 1 s:

$$x = A \cdot sen\,(\omega \cdot t + \phi_0) = 0{,}05 \cdot sen\,(\pi \cdot t + \phi_0)$$

$$x\,(1\ \text{s}) = 0 = 0{,}05 \cdot sen\,(\pi + \phi_0) \ \rightarrow\ sen\,(\pi + \phi_0) = 0 \ \rightarrow\ \phi_0 = 0\ \text{rad}$$

Por tanto, la fase inicial es nula, lo que significa que en el instante inicial el muelle se encuentra en la posición de equilibrio.

La ecuación de la elongación en función del tiempo es:

$$x\,(t) = 0{,}05 \cdot sen\,(\pi \cdot t)\ \text{m}$$

7 **Una masa de 500 g está unida a un resorte que ejerce una fuerza sobre ella dada por la ecuación: *F* = –100 · *x* N. Se estira 20 cm y se suelta. Halla las magnitudes del movimiento de la masa.**

Puesto que en el enunciado no se indica la orientación del resorte, supondremos que se encuentra en posición horizontal, siendo la fuerza elástica la única que actúa en la dirección del movimiento.

Aplicando la segunda ley de Newton:

$$m \cdot a = -k \cdot x \ \rightarrow\ 0{,}5 \cdot a = -100 \cdot x \ \rightarrow\ a = -200 \cdot x$$

Teniendo en cuenta que la aceleración es proporcional y de sentido opuesto a la elongación, la frecuencia angular del movimiento es:

$$a = -\omega^2 \cdot x \ \rightarrow\ \omega^2 = 200 \ \rightarrow\ \omega = 14{,}14\ \text{rad/s}$$

La amplitud es la elongación máxima, que corresponde a la posición desde la que se suelta la masa:

$$A = 0{,}2\ \text{m}$$

La frecuencia y el período son:

$$f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{14{,}14\ \text{rad/s}}{2 \cdot \pi} = 2{,}25\ \text{Hz} \ \rightarrow\ T = \frac{1}{f} = \frac{1}{2{,}25\ \text{Hz}} = 0{,}44\ \text{s}$$

Puesto que el movimiento se inicia en un extremo, la fase inicial es:

$$x = A \cdot sen\,(\omega \cdot t + \phi_0) \ \rightarrow\ x = 0{,}2 \cdot sen\,(14{,}14 \cdot t + \phi_0)$$

$$x\,(0) = 0{,}2 = 0{,}2 \cdot sen\,\phi_0 \ \rightarrow\ sen\,\phi_0 = 1 \ \rightarrow\ \phi_0 = \frac{\pi}{2}\ \text{rad}$$

Las ecuaciones de la elongación, la velocidad y la aceleración de la masa son:

$$x = 0{,}2 \cdot sen\left(14{,}4 \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ m}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = 0{,}2 \cdot 14{,}14 \cdot cos\left(14{,}14 \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) = 2{,}828 \cdot cos\left(14{,}14 \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ m/s}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -0{,}2 \cdot 14{,}14^2 \cdot sen\left(14{,}14 \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) = -39{,}99 \cdot sen\left(14{,}14 \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ m/s}^2$$

8 Una bolita unida a una goma realiza pequeñas oscilaciones y su movimiento se aproxima a un m.a.s. Cuando se estira 0,1 cm y se deja suelta, a los 0,2 s se encuentra a 0,05 cm del punto de equilibrio. Halla la frecuencia de la oscilación.

Como el movimiento se inicia al soltar la bolita desde 0,1 cm, la amplitud del movimiento es:

$$A = 0{,}001 \text{ m}$$

Y la fase inicial es $\pi/2$ rad, ya que el movimiento comienza en la posición de máxima elongación (llegamos a esta conclusión de forma análoga a la planteada en la resolución del problema anterior).

Sabiendo que a un tiempo t = 0,2 s la bola se encuentra en x = 0,0005 m, calculamos la frecuencia del movimiento sustituyendo y despejando en la ecuación de la elongación:

$$x = A \cdot sen\,(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \phi_0) = 0{,}001 \cdot sen\left(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ m}$$

$$x\,(t = 0{,}2 \text{ s}) = 0{,}0005 \text{ m} = 0{,}001 \cdot sen\left(2 \cdot \pi \cdot f \cdot 0{,}2 + \frac{\pi}{2}\right) \text{ m}$$

$$sen\left(2 \cdot \pi \cdot f \cdot 0{,}2 + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}5 \;\rightarrow\; 2 \cdot \pi \cdot f \cdot 0{,}2 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

$$f = \left|\frac{\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}}{2 \cdot \pi \cdot 0{,}2}\right| = 0{,}83 \text{ s}^{-1}$$

Hemos tomado el valor absoluto de la frecuencia porque un signo negativo tan solo indicaría que la vibración tiene lugar en sentido opuesto al supuesto inicialmente, es decir, partiendo de valores negativos de la elongación (con fase inicial negativa).

3 Energía del movimiento armónico simple

Página 161

9 Halla la energía cinética, potencial y total al cabo de 10 s de un cuerpo de 200 g de masa unido a un muelle que realiza un m.a.s. con una frecuencia de 0,5 s^{-1} tras estirarse una distancia de 0,1 m.

De acuerdo con los datos del problema, la frecuencia angular, la amplitud y el período son:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot 0{,}5 \text{ s}^{-1} = \pi \text{ rad/s} \;\;;\;\; A = 0{,}1 \text{ m}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{0{,}5 \text{ Hz}} = 2 \text{ s}$$

Como el cuerpo parte de un extremo del movimiento, las ecuaciones de las energías cinética y potencial en función del tiempo son:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot A^2 \cdot \omega^2 \cdot cos^2\,(\omega \cdot t + \phi_0) = 10^{-3} \cdot \pi^2 \cdot cos^2\left(\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot A^2 \cdot \omega^2 \cdot sen^2\,(\omega \cdot t + \phi_0) = 10^{-3} \cdot \pi^2 \cdot sen^2\left(\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Para un tiempo t = 10 s = 5 · T, el sistema se encuentra en el mismo estado de oscilación que en el instante inicial.

Como la oscilación parte del extremo del movimiento, $\phi_0 = \pi/2$ rad, la energía cinética inicial es nula (velocidad inicial nula) y la energía potencial es máxima (elongación máxima), lo que se comprueba sustituyendo en las ecuaciones anteriores:

$$E_c(10\ \text{s}) = E_c(0) = 10^{-3} \cdot \pi^2 \cdot \cos^2\frac{\pi}{2} = 0\ \text{J}$$

$$E_p(10\ \text{s}) = E_p(0) = 10^{-3} \cdot \pi^2 \cdot \operatorname{sen}^2\frac{\pi}{2} = 9{,}9 \cdot 10^{-3}\ \text{J}$$

La energía total coincide con la energía cinética máxima y la energía potencial máxima. Por tanto:

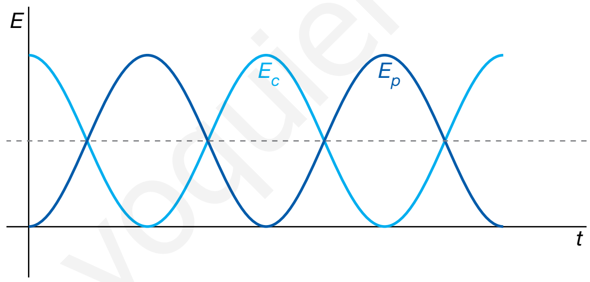
$$E_m = E_{c_{máx}} = E_{p_{máx}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot A^2 \cdot \omega^2 = 9{,}9 \cdot 10^{-3}\ \text{J}$$

10 **¿Dependen del tiempo las energías cinética, potencial y total del movimiento armónico simple?**

Las energías cinética y potencial dependen del tiempo, ya que varían con la elongación y la velocidad, respectivamente.

La energía mecánica es la suma de ambas y, como en todo movimiento en el que no existen fuerzas no conservativas, se mantiene constante a lo largo del tiempo.

11 **En la gráfica, ¿qué representa la línea negra discontinua? ¿A qué valor de energía corresponde?**



La línea de puntos representa el valor medio de la energía total; es decir, el valor de las energías potencial y cinética cuando sus valores se igualan.

4 Pulsos y ondas

Página 163

12 **Pon varios ejemplos de pulsos y de ondas que puedes encontrar en tu vida cotidiana.**

La diferencia entre pulso y tren de ondas consiste en la duración de la perturbación que se transmite por el medio. Si se trata de una perturbación con duración definida hablamos de pulso, mientras que si la perturbación persiste durante un tiempo suficientemente largo hablamos de onda.

Por ello, ejemplos de pulsos son cada una de las señales que componen un electrocardiograma, la vibración que se transmite cuando un martillo golpea una barra de metal o el sonido de un trueno. Ejemplos de ondas son las alteraciones en la superficie del agua cuando tiramos una piedra, el sonido producido por un diapasón o la luz emitida por una bombilla.

13 **La figura muestra un electrocardiograma de un corredor registrado en 6 segundos. ¿Cuántas pulsaciones tiene el corredor?**

Se aprecia que en 6 segundos se producen 6 señales o pulsaciones que se repiten uniformemente en el tiempo. Por tanto, en un minuto serán:

$$N = \frac{6 \text{ pulsos}}{6 \text{ s}} \cdot 60 \text{ s} = 60 \text{ pulsos/s}$$

14 **Clasifica todas las ondas que aparecen en las imágenes de esta página según los tres criterios de clasificación que hemos visto.**

Ondas en la superficie del mar: mecánicas, transversales, bidimensionales.

Radiación solar: electromagnéticas, transversales, tridimensionales.

Ondas en una cuerda: mecánicas, transversales, unidimensionales.

Ondas sonoras en el aire: mecánicas, longitudinales, tridimensionales.

Ondas en la superficie del tambor: mecánicas, transversales, bidimensionales.

Ondas de choque: mecánicas, longitudinales, tridimensionales.

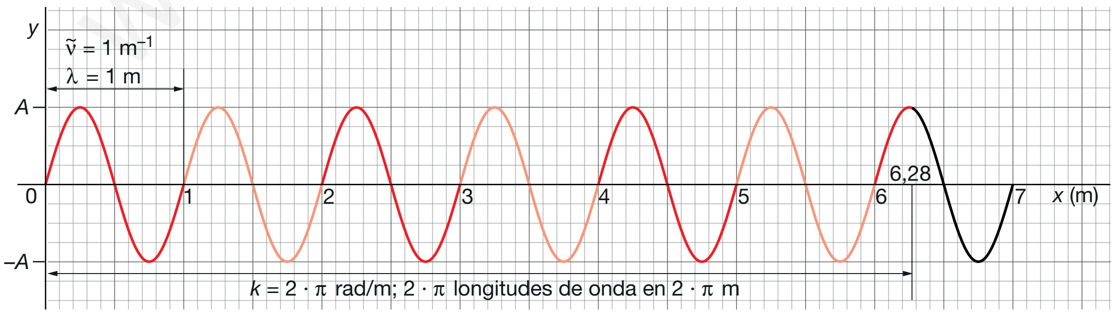
5 Características de las ondas

Página 165

15 **El significado de *k* puede llevar a confusión. En algunos textos se llama número de onda y, en otros, número de onda angular. ¿A qué se refiere cada uno de estos términos?**

El número de onda es la cantidad de longitudes de onda (es decir, de oscilaciones completas) que caben en una distancia de 1 m.

Si la perturbación que se propaga se puede describir como una función senoidal, se suele utilizar el número de onda angular para simplificar la descripción matemática de la onda; esta magnitud expresa el número de longitudes de onda que caben en una distancia de $2 \cdot \pi$ metros. La interpretación de estas magnitudes como número de ciclos por unidad de longitud es idéntica si consideramos que un ciclo de un movimiento armónico simple corresponde a una fase de $2 \cdot \pi$ rad.



16 **Calcula la velocidad de propagación de una onda de 2 m de longitud de onda y una frecuencia de 500 Hz.**

La velocidad de propagación es el producto de la longitud de onda por la frecuencia:

$$v = \lambda \cdot f = 2 \text{ m} \cdot 500 \text{ Hz} = 1000 \text{ m/s}$$

17 **La velocidad del sonido en el aire es 340 m/s y una onda de sonido tiene una longitud de onda de 2 m. ¿Cuál es su frecuencia?**

Teniendo en cuenta que la velocidad de propagación de una onda es el producto de su longitud de onda por su frecuencia, podemos despejar la frecuencia:

$$v = \lambda \cdot f \quad \to \quad f = \frac{v}{\lambda} = \frac{340 \text{ m/s}}{2 \text{ m}} = 170 \text{ Hz}$$

Página 166

18 **Explica la diferencia entre velocidad de fase, velocidad de vibración y velocidad de grupo.**

La velocidad de fase es la velocidad de propagación de la onda; es decir, es la velocidad con que avanza, por ejemplo, un punto con elongación máxima (o cresta) a través del medio.

La velocidad de vibración es la velocidad con que oscila un punto del medio sometido a la perturbación; es decir, es la velocidad del m.a.s. de un punto del medio.

La velocidad de grupo es la velocidad de propagación de la envolvente de un grupo de ondas que viajan juntas, tienen frecuencias próximas y han interaccionado entre sí (en la figura de la página 166 del libro del alumnado se muestra la diferencia entre velocidad de fase y velocidad de grupo).

19 **Se dice que la velocidad de la luz en el vacío es 300 000 km/s y siempre es constante. ¿Cómo se explica que cuando la luz pasa del aire al agua disminuya su velocidad?**

La velocidad que se indica para la propagación de la luz en medios materiales es la velocidad de un grupo de ondas electromagnéticas, que no necesariamente corresponden a ondas electromagnéticas monocromáticas, cuya velocidad de fase es siempre *c*.

6 Ondas armónicas

Página 169

20 **A partir de la expresión general de la ecuación de una onda armónica, deduce la expresión:**

$$\boldsymbol{y(x, t) = A \cdot sen\,[k \cdot (v \cdot t - x)]}$$

Indica las condiciones en que se verifica la validez de esta expresión.

La ecuación general de una onda armónica es:

$$y(x, t) = A \cdot sen\,(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi_0)$$

Sacando factor común *k*:

$$y(x, t) = A \cdot sen\left[k \cdot \left(\frac{\omega}{k} \cdot t - x\right) + \varphi_0\right] = A \cdot sen\,[k \cdot (v \cdot t - x) + \varphi_0]$$

Si la fase inicial en el foco de la onda (es decir, el movimiento armónico simple que se propaga por el medio) es nula llegamos a la expresión buscada:

$$y(x, t) = A \cdot sen\,[k \cdot (v \cdot t - x)]$$

21 Si dos crestas de una onda de 2 Hz que viaja a 1 m/s llegan a un punto con 0,5 segundos de diferencia, ¿cuál es su desfase?

El desfase o diferencia de fase, en un punto dado, entre dos instantes es:

$$\Delta\varphi = \omega \cdot (t_2 - t_1) = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \Delta t$$

Sustituyendo:

$$\Delta\varphi = 2 \cdot \pi \cdot 2\ \text{Hz} \cdot 0{,}5\ \text{s} = 2 \cdot \pi\ \text{rad}$$

Por tanto, podemos decir que en esos instantes el desfase es de una onda, lo que significa que el punto se encuentra en el mismo estado de vibración en dichos instantes ($\Delta\varphi$ = 0). Este resultado es lógico, ya que en el enunciado se indica que el intervalo de tiempo considerado es el que tardan dos crestas consecutivas en pasar por un punto.

22 Para que dos puntos de una onda estén en fase en un determinado instante, la distancia entre ellos debe ser *d* = *n* · λ. Discute esta afirmación.

La diferencia de fase, en un instante dado, entre dos puntos de una onda es:

$$\Delta\varphi = (\omega \cdot t - k \cdot x_1 + \varphi_0) - (\omega \cdot t - k \cdot x_2 + \varphi_0) = k \cdot \Delta x$$

Para que los dos puntos estén en fase, la diferencia de fase entre ellos debe ser nula o un múltiplo entero de 2 · π rad. Por tanto, si llamamos *d* a la distancia entre ambos puntos, y teniendo en cuenta la definición del número de onda angular, resulta:

$$\Delta\varphi = k \cdot \Delta x = 2 \cdot n \cdot \pi\ \text{rad} \ \rightarrow\ \Delta x = d = \frac{2 \cdot n \cdot \pi}{k} = n \cdot \lambda$$

donde *n* = 0, 1, 2,... Este resultado es el esperado, pues dos puntos de una onda están en fase si se encuentran en el mismo estado de vibración, lo que solo sucede si la distancia entre ellos es un número entero de longitudes de onda.

23 Calcula la distancia a la que se encuentran dos puntos de un medio por el que se propaga una onda de 2 m de longitud de onda que están desfasados: a) Una longitud de onda. b) Media onda. c) Un cuarto de onda. ¿Cuál es la diferencia de fase, expresada en radianes, entre esos puntos?

a) Si los dos puntos se encuentran separados una distancia igual a la longitud de onda, tendremos:

$$\Delta x = \lambda = 2\ \text{m}$$

Por tanto, el desfase en un instante dado será:

$$\Delta\varphi = (\omega \cdot t - k \cdot x_1 + \varphi_0) - (\omega \cdot t - k \cdot x_2 + \varphi_0) = k \cdot \Delta x$$

$$\Delta\varphi = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot \Delta x = 2 \cdot \pi\ \text{rad}$$

b) Para una distancia igual a media longitud de onda, tendremos:

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2} = 1\ \text{m}$$

$$\Delta\varphi = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot \Delta x = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{2} = \pi\ \text{rad}$$

c) Para una distancia igual a un cuarto de longitud de onda, será:

$$\Delta x = \frac{\lambda}{4} = 0{,}5\ \text{m}$$

$$\Delta\varphi = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot \Delta x = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}\ \text{rad}$$

24 **Halla el desfase entre dos puntos de una onda monodimensional armónica de 100 Hz de frecuencia y velocidad de propagación de 10 m/s, separados 200 mm.**

La diferencia de fase, en un instante dado, entre dos puntos de la onda separados 200 mm es:

$$\Delta\varphi = k \cdot \Delta x = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot \Delta x$$

$$\Delta\varphi = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \frac{\Delta x}{v} = 2 \cdot \pi \cdot 100 \cdot \frac{0,2}{10} = 4 \cdot \pi \text{ rad}$$

Los puntos se encuentran en fase ($\Delta\varphi = 0$), ya que la diferencia de fase es un múltiplo entero de $4 \cdot \pi$ rad.

7 Energía e intensidad de las ondas armónicas

Página 171

25 **La expresión que hemos visto para la energía de una onda, $E = (1/2) \cdot m \cdot \omega^2 \cdot A^2$, ¿es válida para todas las ondas?**

No; solo es válida para ondas mecánicas armónicas, ya que se ha obtenido a partir de la energía potencial (que existe en campos conservativos) y cinética (que tienen las partículas con masa). No se puede aplicar a ondas electromagnéticas aunque sean armónicas.

26 **¿Ves alguna analogía entre un foco puntual de una onda esférica, una carga puntual y una masa puntual? ¿Con qué compararías el rayo? ¿Y la intensidad de la onda?**

El foco puntual de una onda esférica es la fuente de una propiedad que se propaga en el espacio, de forma análoga al papel que tienen las cargas puntuales y las masas como fuentes de campos eléctricos y gravitatorios, respectivamente.

Las líneas del campo eléctrico producido por una carga puntual, y del gravitatorio producido por una masa puntual, son radiales al igual que el rayo en una onda esférica.

La intensidad de una onda esférica se puede comparar con la intensidad de los campos eléctricos y gravitatorios, pues en los tres casos varía con la distancia según una ley de proporcionalidad inversa del cuadrado de la distancia.

También podríamos mencionar la analogía entre las superficies equipotenciales de los dos campos y los frentes de ondas de la onda esférica, pues se trata en los tres casos de superficies esféricas centradas en sus respectivas fuentes puntuales.

27 **Los focos de ondas esféricas suelen emitir ondas de la misma frecuencia. Si estas ondas se propagan por un medio homogéneo e isótropo de densidad constante, ¿de qué factores depende la intensidad de la onda?**

De acuerdo con lo que hemos estudiado, si el foco emite con potencia constante y el medio es homogéneo e isótropo de densidad constante, la intensidad de la onda depende del cuadrado de la frecuencia y del cuadrado de la amplitud:

$$I = 2 \cdot \pi^2 \cdot \rho \cdot f^2 \cdot A^2$$

28 **Explica brevemente cómo varía la intensidad de una onda con la distancia.**

La energía en una onda plana es constante en todos sus puntos; por tanto, lo es también la potencia por unidad de superficie y, por tanto, su intensidad.

En el caso de ondas esféricas, la energía que se transmite se distribuye por superficies esféricas de radio cada vez mayor, por lo que la intensidad disminuye con el cuadrado de la distancia al foco.

8 Atenuación y absorción de ondas

Página 173

29 Una pared de 25 cm reduce al 25 % la intensidad de una onda. Calcula su coeficiente de absorción.

Aplicamos la ley general de la absorción:

$$I = I_0 \cdot e^{-\beta \cdot x}$$

Sustituimos y despejamos para obtener el valor del coeficiente de absorción:

$$ln\,\frac{I}{I_0} = -\beta \cdot x \;\;\rightarrow\;\; ln\,\frac{0,25 \cdot I_0}{I_0} = -\beta \cdot x \;\;\rightarrow\;\; \beta = -\frac{ln\,0,25}{0,25} = 5,5\ \text{m}^{-1}$$

30 Cuando una onda se aleja del foco, su intensidad disminuye. ¿Significa esto que se pierde la energía mecánica de la onda si esta se atenúa?

Si no existe absorción, no. Disminuye la intensidad porque la energía se reparte en una superficie cada vez mayor, pero la energía se conserva.

Página 176

Cinemática y dinámica del m.a.s.

1 Un cuerpo de 2 kg que se encuentra sobre una mesa plana y horizontal sujeto a un muelle, de constante elástica *k* = 15 N/m, se desplaza 2 cm de la posición de equilibrio y se libera. Calcula la máxima velocidad y la máxima aceleración que alcanza.

En función de los datos del problema (m = 2 kg, k = 15 N/m, A = 0,02 m) determinamos la frecuencia angular del movimiento:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{15\ \text{N/m}}{2\ \text{kg}}} = 2{,}73\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

La velocidad máxima que alcanza el cuerpo es:

$$v_{máx} = A \cdot \omega = 0{,}02 \cdot 2{,}73 = 0{,}0546\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La máxima aceleración será:

$$a_{máx} = A \cdot \omega^2 = 0{,}02 \cdot 7{,}5 = 0{,}15\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Que es el mismo valor que obtenemos al aplicar la ley fundamental de la dinámica:

$$F = -k \cdot x = m \cdot a \ \rightarrow\ 2\ \text{kg} \cdot a = -15\ \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0{,}02\ \text{m} \ \rightarrow\ a = -0{,}15\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Puesto que esta aceleración es la que se alcanza en un extremo del movimiento, su valor absoluto es la aceleración máxima.

2 Un muelle oscila con m.a.s. La velocidad en el centro de oscilación, cuando ha pasado 1 s desde el comienzo del movimiento, es 0,1 · π m/s y la velocidad vuelve a tomar el mismo valor pero en sentido contrario cuando han pasado 2 s. Halla las ecuaciones de la elongación, la velocidad y la aceleración.

Las ecuaciones generales de la elongación, la velocidad y la aceleración en función del tiempo son:

$$x(t) = A \cdot sen\,(\omega \cdot t + \phi_0) \quad ; \quad v(t) = A \cdot \omega \cdot cos\,(\omega \cdot t + \phi_0) \quad ; \quad a(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot sen\,(\omega \cdot t + \phi_0)$$

En t = 1 s y t = 2 s el muelle pasa por el centro de oscilación con velocidades opuestas. Por tanto, este intervalo es la mitad del período de oscilación del movimiento, de valor T = 2 s. La frecuencia angular vale:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \pi\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

La amplitud del movimiento la obtenemos teniendo en cuenta que cuando el muelle pasa por el centro de oscilación lo hace con la velocidad máxima:

$$v_{máx} = A \cdot \omega \ \rightarrow\ A \cdot \pi\ \text{rad/s} = 0{,}1 \cdot \pi\ \text{m/s} \ \rightarrow\ A = 0{,}1\ \text{m}$$

Sustituimos las condiciones conocidas para t = 1 s en la ecuación de la velocidad para obtener la fase inicial:

$$v = A \cdot \omega \cdot cos\,(\omega \cdot t + \phi_0) \ \rightarrow\ 0{,}1 \cdot \pi = 0{,}1 \cdot \pi \cdot cos\,(\pi \cdot 1 + \phi_0)$$

$$cos\,(\pi + \phi_0) = 1 \ \rightarrow\ \phi_0 = -\pi\ \text{rad}$$

Por tanto, las ecuaciones del movimiento son:

$$x = 0,1 \cdot sen\,(\pi \cdot t - \pi)\ \text{m}$$

$$v = 0,1 \cdot \pi \cdot cos\,(\pi \cdot t - \pi)\ \text{m/s}$$

$$a = -0,1 \cdot \pi^2 \cdot sen\,(\pi \cdot t - \pi)\ \text{m/s}^2$$

3 **Un cuerpo de 200 g unido a un muelle experimenta un m.a.s. entre dos puntos separados 20 cm con una frecuencia de 600 r.p.m. Comienza el movimiento cuando está situado a 5 cm del centro de vibración. Halla las ecuaciones de la elongación, la velocidad y la aceleración.**

En unidades del SI, los datos del problema son:

$$\omega = 600\ \text{r.p.m.} \cdot \frac{2 \cdot \pi\ \text{rad}}{1\ \text{rev}} \cdot \frac{1\ \text{min}}{60\ \text{s}} = 20 \cdot \pi\ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad ; \quad A = 0,1\ \text{m} \quad ; \quad x_0 = 0,05\ \text{m}$$

Sustituimos los datos iniciales en la ecuación de la elongación para obtener la fase inicial:

$$x = A \cdot sen\,(\omega \cdot t + \phi_0) \quad \rightarrow \quad x\,(0) = 0,05 = 0,1 \cdot sen\,(20 \cdot \pi \cdot 0 + \phi_0)$$

$$sen\,\phi_0 = 0,5 \quad \rightarrow \quad \phi_0 = \frac{\pi}{6}\ \text{rad}$$

Por tanto, las ecuaciones del movimiento son:

$$x = 0,1 \cdot sen\left(20 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{6}\right)\ \text{m}$$

$$v = 2 \cdot \pi \cdot cos\left(20 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{6}\right)\ \text{m/s}$$

$$a = -40 \cdot \pi^2 \cdot sen\left(20 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{6}\right)\ \text{m/s}^2$$

4 **Un cuerpo, situado sobre una superficie horizontal lisa y unido al extremo de un resorte, efectúa un m.a.s., siendo los valores máximos de su velocidad y aceleración 1,2 m · s^{-1} y 14,4 m · s^{-2}, respectivamente, y la velocidad inicial, 0,6 m/s. Determina el período y la amplitud del movimiento, y las ecuaciones de la elongación, la velocidad y la aceleración.**

Las ecuaciones generales de la elongación, velocidad y aceleración son:

$$x\,(t) = A \cdot sen\,(\omega \cdot t + \phi_0)$$

$$v\,(t) = A \cdot \omega \cdot cos\,(\omega \cdot t + \phi_0)$$

$$a\,(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot sen\,(\omega \cdot t + \phi_0)$$

La velocidad y aceleración máximas en las anteriores expresiones son:

$$v_{máx} = A \cdot \omega$$

$$a_{máx} = A \cdot \omega^2$$

Dividiendo ambas expresiones podemos determinar el valor de la frecuencia angular de la oscilación:

$$\frac{a_{máx}}{v_{máx}} = \frac{A \cdot \omega^2}{A \cdot \omega} = \omega \quad \rightarrow \quad \omega = \frac{14,4\ \text{m/s}^2}{1,2\ \text{m/s}} = 12\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

El período del movimiento vale:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} \rightarrow T = \frac{2 \cdot \pi}{12} = \frac{\pi}{6} = 0{,}52 \text{ s}$$

La amplitud la obtenemos a partir de las ecuaciones de la aceleración o la velocidad máximas:

$$1{,}2 \text{ m/s} = A \cdot 12 \text{ rad/s} \rightarrow A = 0{,}1 \text{ m}$$

Con los datos conocidos para el instante inicial, calculamos la fase inicial:

$$v = A \cdot \omega \cdot cos\,(\omega \cdot t + \phi_0) \rightarrow v\,(0) = 0{,}6 = 0{,}1 \cdot 12 \cdot cos\,(12 \cdot 0 + \phi_0)$$

$$cos\,\phi_0 = \frac{1}{2} \rightarrow \phi_0 = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

Por tanto, las ecuaciones del movimiento resultan:

$$x\,(t) = 0{,}1 \cdot sen\left(12 \cdot t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ m}$$

$$v\,(t) = 1{,}2 \cdot cos\left(12 \cdot t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ m/s}$$

$$a\,(t) = -14{,}4 \cdot sen\left(12 \cdot t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ m/s}^2$$

5 **Una partícula de 3 kg que describe un m.a.s. a lo largo del eje *X* entre *x* = –2 m y *x* = 2 m, tarda 0,5 s en recorrer la distancia que separa a ambos puntos. Escribe la ecuación del movimiento sabiendo que en *t* = 0 la partícula se encuentra en la posición *x* = 0.**

Si el cuerpo tarda 0,5 s en recorrer la distancia entre los extremos del movimiento, lo que corresponde a la mitad de un ciclo completo, ese tiempo es un semiperíodo, por lo que el período será T = 1 s.

Por tanto, la frecuencia angular es:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = 2 \cdot \pi \text{ rad/s}$$

Para hallar la fase inicial, tenemos en cuenta que en t = 0 s el cuerpo está en x = 0 m:

$$x = A \cdot sen\,(\omega \cdot t + \phi_0) \rightarrow 0 = 2 \cdot sen\,(2 \cdot \pi \cdot 0 + \phi_0) \rightarrow 0 = sen\,\phi_0 \rightarrow \phi_0 = 0$$

La ecuación del movimiento es, por tanto:

$$x = 2 \cdot sen\,(2 \cdot \pi \cdot t) \text{ m}$$

6 **Una partícula de 100 g oscila a lo largo del eje *X*, alejándose como máximo 20 cm a un lado y a otro de la posición de equilibrio (*x* = 0). Se comprueba que la relación entre la aceleración y la posición que ocupa en cada instante es $a = -9 \cdot \pi^2 \cdot x$.**

Escribe las expresiones de la posición y de la velocidad de la partícula en función del tiempo, sabiendo que este último se comenzó a medir cuando la partícula pasaba por la posición *x* = 5 cm.

De acuerdo con los datos del enunciado, la amplitud es A = 0,2 m, y la frecuencia angular se obtiene a partir de la ecuación de la aceleración en función de la elongación:

$$a = -\omega^2 \cdot x \rightarrow a = -9 \cdot \pi^2 \cdot x \rightarrow \omega = 3 \cdot \pi \text{ rad}$$

Sustituimos las condiciones iniciales en la ecuación de la elongación para hallar la fase inicial:

$$x = A \cdot sen\,(\omega \cdot t + \phi_0) \;\;\rightarrow\;\; x\,(0) = 0{,}05 = 0{,}2 \cdot sen\,(3 \cdot \pi \cdot 0 + \phi_0)$$

$$0{,}25 = sen\,\phi_0 \;\;\rightarrow\;\; \phi_0 = 0{,}25 \text{ rad}$$

Por tanto, la posición y la velocidad de la partícula en función del tiempo vienen dadas por las ecuaciones:

$$x\,(t) = 0{,}2 \cdot sen\,(3 \cdot \pi \cdot t + 0{,}25) \text{ m}$$

$$v\,(t) = 0{,}6 \cdot \pi \cdot cos\,(3 \cdot \pi \cdot t + 0{,}25) \text{ m/s}$$

7 Una partícula se mueve con un movimiento armónico simple en el que la elongación viene dada por:

$$\boldsymbol{x = 0{,}3 \cdot sen\,(6 \cdot \pi \cdot t + \pi/2)}$$

Si todas las magnitudes están expresadas en el Sistema Internacional, calcula el valor de la elongación, la velocidad y la aceleración en el instante *t* = 1,5 s.

Comparando la ecuación dada en el ejercicio con la ecuación general del m.a.s., se obtienen los valores de las distintas magnitudes:

$$x\,(t) = A \cdot sen\,(\omega \cdot t + \phi_0) \;\; ; \;\; x = 0{,}3 \cdot sen\left(6 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

La amplitud es A = 0,3 m; además $\omega = 6 \cdot \pi$ rad/s, y $\phi_0 = \pi/2$ rad.

El valor de la elongación para t = 1,5 s será:

$$x\,(1{,}5) = 0{,}3 \cdot sen\left(6 \cdot \pi \cdot 1{,}5 + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}3 \cdot sen\,(9{,}5 \cdot \pi) = –0{,}3 \text{ m}$$

Derivando la ecuación de la posición respecto al tiempo, se obtiene la ecuación de la velocidad transversal de la partícula:

$$v\,(t) = \frac{dx\,(t)}{dt} = 0{,}3 \cdot 6 \cdot \pi \cdot cos\left(6 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

En el instante t = 1,5 s, la velocidad será:

$$v\,(1{,}5) = 0{,}3 \cdot 6 \cdot \pi \cdot cos\left(9 \cdot \pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1{,}8 \cdot \pi \cdot 0 = 0$$

Derivando la ecuación de la posición respecto al tiempo, se obtiene la ecuación de la velocidad transversal de la partícula:

$$a\,(t) = \frac{dv\,(t)}{dt} = 0{,}3 \cdot 6 \cdot \pi \cdot cos\left(6 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

En el instante t = 1,5 s, la aceleración será:

$$a\,(1{,}5) = –0{,}3 \cdot (6 \cdot \pi)^2 \cdot sen\left(9 \cdot \pi + \frac{\pi}{2}\right) = –0{,}3 \cdot (6 \cdot \pi)^2 \cdot (–1) = 0{,}3 \cdot (6 \cdot \pi)^2 = 106{,}6 \text{ m/s}^2$$

Energía del m.a.s.

8 **Un cuerpo de 0,1 kg, unido al extremo de un resorte de constante elástica 10 N · m⁻¹, se desliza sobre una superficie horizontal y lisa, de modo que su energía mecánica es de 1,2 J.**

a) Obtén la amplitud y el período de oscilación.

b) Escribe la ecuación del movimiento, sabiendo que en el instante *t* = 0 el cuerpo tiene aceleración máxima, y calcula la velocidad del cuerpo en el instante *t* = 5 s.

a) Para hallar el período, calculamos, en primer lugar, la frecuencia angular del movimiento a partir de los datos del problema:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{10\ \text{N/m}}{0{,}1\ \text{kg}}} = 10\ \text{rad/s} \ \rightarrow \ T = \frac{2\cdot\pi}{\omega} = 0{,}2\cdot\pi\ \text{s}$$

Sustituyendo y despejando en la expresión de la energía mecánica del m.a.s. obtenemos la amplitud:

$$E_m = \frac{1}{2}\cdot m\cdot A^2\cdot\omega^2 \ \rightarrow \ A = \sqrt{\frac{2\cdot E_m}{m\cdot\omega^2}} = \sqrt{\frac{2\cdot 1{,}2\ \text{J}}{0{,}1\ \text{kg}\cdot(10\ \text{rad/s})^2}} = 0{,}49\ \text{m}$$

b) La ecuación general de la elongación en el m.a.s. tiene la forma:

$$x = A\cdot sen\,(\omega\cdot t + \phi_0)$$

La aceleración es la segunda derivada de la elongación respecto al tiempo:

$$a = -\omega^2\cdot A\cdot sen\,(\omega\cdot t + \phi_0)$$

El máximo valor que podrá tomar la aceleración es $a_{máx} = \omega^2\cdot A$. De acuerdo con el enunciado, esto sucede cuando t = 0, por lo que se debe cumplir que:

$$sen\,(\omega\cdot t + \phi_0) = -1 \ \rightarrow \ sen\,\phi_0 = -1 \ \rightarrow \ \phi_0 = 3\cdot\pi/2\ \text{rad}$$

Por tanto, la ecuación de movimiento será:

$$x = 0{,}49\cdot sen\left(10\cdot t + \frac{3\cdot\pi}{2}\right)\ \text{m}$$

La velocidad es la derivada de la elongación respecto del tiempo:

$$v = \frac{dx}{dt} = 4{,}9\cdot cos\left(10\cdot t + \frac{3\cdot\pi}{2}\right)\ \text{m/s}$$

Sustituyendo obtenemos el valor de la velocidad en el instante señalado:

$$v = 4{,}9\cdot cos\left(10\cdot 5 + \frac{3\cdot\pi}{2}\right) = -1{,}29\ \text{m/s}$$

9 **La energía mecánica de una partícula que realiza un movimiento armónico simple a lo largo del eje *X* y en torno al origen vale 3 · 10⁻⁵ J, y la fuerza máxima que actúa sobre ella es de 1,5 · 10⁻³ N.**

Si el período de la oscilación es de 2 s y en el instante inicial la partícula se encuentra en la posición x_0 = 2 cm, escribe la ecuación de movimiento.

La fuerza que actúa sobre la partícula de masa *m* es directamente proporcional al desplazamiento de esta, pero de sentido contrario:

$$\vec{F} = -k\cdot\vec{x}$$

donde *k* es la constante de proporcionalidad, y $\vec{x}$, la elongación.

La fuerza será máxima cuando el valor de la elongación, x, sea máximo, $x = A$. El módulo de la fuerza máxima será:

$$F_{máx} = k \cdot A$$

La expresión de la energía mecánica es igual a la energía potencial máxima.

En los extremos, donde la elongación es $x = A$, la energía potencial de la partícula será máxima, y la energía cinética, cero, ya que en el extremo la partícula se detiene para dar la vuelta. Así, la energía mecánica será:

$$E_c = 0 \text{ J} \quad ; \quad E_{p_{máx}} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \quad \rightarrow \quad E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2$$

La amplitud de la oscilación se puede calcular a partir del dato de la energía mecánica o total del sistema y de la fuerza máxima:

$$F_{máx} = k \cdot A \quad \rightarrow \quad 1{,}5 \cdot 10^{-3} = k \cdot A$$

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \quad \rightarrow \quad 3 \cdot 10^{-5} = 0{,}5 \cdot k \cdot A^2$$

Al dividir una expresión entre la otra, se obtiene:

$$\frac{3 \cdot 10^{-5}}{1{,}5 \cdot 10^{-3}} = \frac{0{,}5 \cdot k \cdot A^2}{k \cdot A} \quad \rightarrow \quad 0{,}02 = 0{,}5 \cdot A \quad \rightarrow \quad A = 0{,}04 \text{ m} = 4 \text{ cm}$$

A partir del valor del período obtenemos la frecuencia angular, ω:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi}{2} = \pi \text{ rad/s}$$

Para hallar el valor de φ_0, se sustituyen en la ecuación de posición del m.a.s. los datos iniciales:

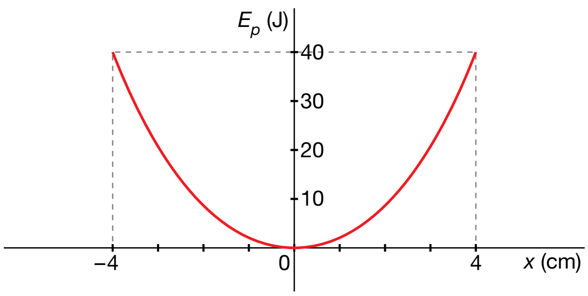
$$x\,(t = 0) = 0{,}04 \cdot sen\,(\pi \cdot 0 + \varphi_0) = 0{,}02 \quad \rightarrow \quad sen\,\varphi_0 = \frac{0{,}02}{0{,}04} = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

La ecuación de movimiento será, por tanto:

$$x\,(t) = 0{,}04 \cdot sen\left(\pi \cdot t + \frac{\pi}{6}\right)$$

Página 177

10 **Un cuerpo de masa *m* unido a un muelle realiza un movimiento armónico simple. La figura representa su energía potencial en función de la elongación, *x*.**



a) Representa E_c y E_M en función de *x*.

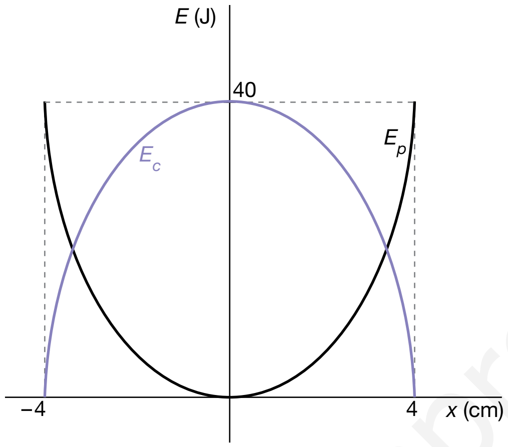
b) Calcula la constante elástica del muelle.

c) Si la masa es *m* = 1 kg, calcula su velocidad máxima y la posición en que se alcanza.

a) La energía potencial depende de la elongación. En el punto de equilibrio, la energía potencial es cero, y en los extremos, donde la elongación adquiere su valor máximo, o amplitud, su valor es:

$$E_{p_{máx}} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2$$

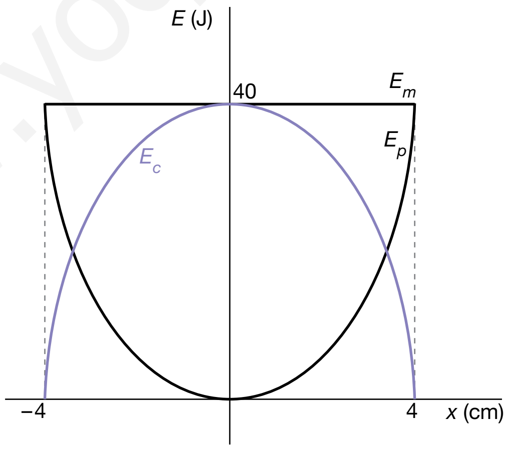
Las fuerzas elásticas son conservativas y, por tanto, la energía mecánica, suma de las energías cinética y potencial, se conserva, de modo que la energía potencial se transforma en energía cinética, y viceversa, siendo la energía cinética máxima en el punto de equilibrio y nula en los extremos, como se muestra en la figura:



La energía cinética en cada momento es igual a la energía mecánica menos la energía potencial:

$$E_c = E_m - E_p = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 - \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (A^2 - x^2)$$

La energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial. Si se suman las curvas de la energía potencial y la energía cinética, la representación de la energía mecánica será una línea horizontal, por ser su valor constante e igual a 40 J.



b) A partir de la figura que representa la energía potencial en función de la elongación, se deduce el valor de la amplitud y de la energía potencial máxima:

$$A = 4 \text{ cm} \quad ; \quad E_{p_{máx}} = 40 \text{ J}$$

Por tanto, sustituyendo estos valores en la expresión [1] y despejando, se obtiene la constante elástica del muelle:

$$E_{p_{máx}} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \quad ; \quad 40 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (0{,}04)^2 \quad \rightarrow \quad k = 50\,000 \text{ N/m}$$

c) La expresión de la energía cinética, en general, es:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Si la velocidad es máxima, la energía cinética será máxima e igual a 40 J. Por tanto, el valor de la velocidad máxima será:

$$E_{c_{máx}} = E_{p_{máx}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \;\rightarrow\; 40 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot v^2 \;\rightarrow\; v = 8{,}94 \text{ m/s}$$

Características de las ondas

11 **¿Qué caracteriza a las ondas longitudinales? ¿Y a las transversales? Pon ejemplos de cada tipo.**

Una onda transversal es aquella en la que la dirección de la perturbación y de propagación son perpendiculares. Ejemplos de este tipo de ondas son las ondas electromagnéticas, las ondas en el agua o las ondas que se producen al agitar el extremo de una cuerda tensa.

En una onda longitudinal, la dirección de la perturbación y la de la propagación son las mismas. Ejemplos de este tipo de ondas son el sonido o las ondas que se propagan en un muelle largo cuando comprimimos una sección del muelle y lo soltamos.

12 **La velocidad del sonido en el aire es 340 m/s. Si el oído humano percibe sonidos de frecuencia comprendida entre 20 Hz y 20 000 Hz, halla las longitudes de onda correspondientes a estas frecuencias.**

El producto de la longitud de onda y su frecuencia es la velocidad de propagación de la onda. Por tanto:

$$\lambda = \frac{v}{f}$$

$$\lambda_1 = \frac{340 \text{ m/s}}{20 \text{ s}^{-1}} = 17 \text{ m}$$

$$\lambda_2 = \frac{340 \text{ m/s}}{20\,000 \text{ s}^{-1}} = 0{,}017 \text{ m}$$

13 **Una partícula empieza a vibrar con una frecuencia de 0,01 Hz dando lugar a una onda que se propaga por el medio circundante a una velocidad tal que otra partícula situada a 100 m comienza a vibrar 4 s más tarde. Calcula:**

a) La velocidad de propagación de la onda.

b) El período y la pulsación de la onda.

c) La longitud de onda.

a) La velocidad de propagación de la onda es la distancia a la que se propaga la perturbación en la unidad de tiempo; por tanto:

$$v = \frac{100 \text{ m}}{4 \text{ s}} = 25 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) El período es la magnitud inversa de la frecuencia:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{0{,}01 \text{ Hz}} = 100 \text{ s}$$

La pulsación o frecuencia angular es:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 0,02 \cdot \pi \text{ rad/s}$$

c) La longitud de onda es:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{25 \text{ m/s}}{0,01 \text{ Hz}} = 2\,500 \text{ m}$$

14 **La separación entre las crestas de una ola en la superficie del agua de un lago es de 50 cm. Calcula la velocidad a la que se desplaza la onda si se ha cronometrado que una boya de corcho que se encuentra en el agua sube y baja 20 veces en 47,6 s.**

La separación entre dos crestas consecutivas es una longitud de onda:

$$\lambda = 0,5 \text{ m}$$

El período es el tiempo que transcurre entre dos estados de vibración idénticos consecutivos, es decir, el tiempo que transcurre en una oscilación completa del corcho. Por tanto:

$$T = \frac{47,6 \text{ s}}{20} = 2,38 \text{ s}$$

La frecuencia es la inversa del período:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2,38 \text{ s}} = 0,42 \text{ Hz}$$

Por tanto, la velocidad de propagación es:

$$v = \lambda \cdot f = 0,5 \text{ m} \cdot 0,42 \text{ Hz} = 0,21 \text{ m/s}$$

Ecuación de las ondas armónicas

15 **Se agita una cuerda levantando y bajando la mano 0,5 m y haciéndola oscilar con una cadencia de 4 oscilaciones por segundo. Su velocidad es de 2 m/s. Escribe la ecuación de onda y calcula la velocidad de un punto a 10 m de distancia del foco cuando se llevan 5 s agitando la cuerda.**

La ecuación general de una onda armónica es:

$$y\,(x,t) = A \cdot sen\,(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi_0)$$

De acuerdo con los datos del problema:

$$A = 0,5 \text{ m} \;\; ; \;\; f = \frac{4 \text{ oscilaciones}}{1 \text{ s}} = 4 \text{ Hz} \;\rightarrow\; \omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 8 \cdot \pi \text{ rad/s}$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{2 \text{ m/s}}{4 \text{ Hz}} = 0,5 \;\rightarrow\; k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} = \frac{2 \cdot \pi}{0,5 \text{ m}} = 4 \cdot \pi \text{ rad/m}$$

Suponemos la fase inicial nula, ya que no disponemos de datos para obtenerla. Sustituyendo llegamos a la ecuación de la onda:

$$y\,(x,t) = 0,5 \cdot sen\,(8 \cdot \pi \cdot t - 4 \cdot \pi \cdot x) = 0,5 \cdot sen\left[8 \cdot \pi \cdot \left(t - \frac{x}{2}\right)\right] \text{ m}$$

La velocidad con que oscila un punto de la onda es la derivada de la ecuación de la onda respecto del tiempo:

$$v\,(x,t)=\frac{dy\,(x,t)}{dt}=0{,}5\cdot 8\cdot\pi\cdot cos\left[8\cdot\pi\cdot\left(t-\frac{x}{2}\right)\right]=4\cdot\pi\cdot cos\left[8\cdot\pi\cdot\left(t-\frac{x}{2}\right)\right]\ \text{m/s}$$

Para x = 10 m y t = 5 s, la velocidad es:

$$v\,(10\ \text{m},5\ \text{s})=4\cdot\pi\cdot cos\left[8\cdot\pi\cdot\left(5-\frac{10}{2}\right)\right]=4\cdot\pi\ \text{m/s}$$

16 **La ecuación de una onda en una cuerda (en unidades del SI) es:**

$$\boldsymbol{y\,(x,\,t)=0{,}01\cdot sen\,(6\cdot\pi\cdot t-10\cdot\pi\cdot x)}$$

Indica el significado físico de las magnitudes que aparecen en esa ecuación y calcula el período, la longitud de onda y la velocidad de propagación.

Determina la elongación y la velocidad del punto x = 1 m en el instante t = 2 s.

a) Comparando la ecuación de la onda del problema con la ecuación general de una onda armónica, vemos que:

– A = 0,01 m es la amplitud, es decir, el valor máximo de la elongación. Esto significa que cada punto de la cuerda se separa, como máximo, 1 cm de la posición de equilibrio.

– $\omega=6\cdot\pi$ rad/s es la frecuencia angular, es decir, el número de veces que oscila cada punto de la onda en la unidad de tiempo multiplicado por la fase correspondiente a un ciclo completo ($2\cdot\pi$ rad). En este caso, cada punto de la cuerda realiza 3 oscilaciones completas por segundo.

– $k=10\cdot\pi$ rad/m es el número de onda, que indica el número de longitudes de onda que caben en una distancia de $2\cdot\pi$ m, o lo que es lo mismo, la diferencia de fase espacial, en un instante dado, entre dos puntos de la onda separados 1 m. En 1 m de cuerda del problema, la fase espacial avanza $5\cdot 2\cdot\pi$ rad (5 ciclos completos o 5 longitudes de onda), por lo que entre dos puntos separados $2\cdot\pi$ m caben 31,4 (es decir $5\cdot 2\cdot\pi$) longitudes de onda.

– La fase inicial es 0 rad; es decir, la oscilación comienz en el foco, en el punto de equilibrio.

El período, la longitud de onda y la velocidad de propagación son:

$$T=\frac{2\cdot\pi}{\omega}=\frac{2\cdot\pi}{6\cdot\pi\ \text{rad/s}}=0{,}33\ \text{s}\quad;\quad\lambda=\frac{2\cdot\pi}{k}=\frac{2\cdot\pi}{10\cdot\pi\ \text{rad/m}}=0{,}2\ \text{m}$$

$$v=\lambda\cdot f=\frac{\lambda}{T}=\frac{0{,}2\ \text{m}}{0{,}33\ \text{s}}=0{,}6\ \text{m/s}$$

b) La elongación en x = 1 m, t = 2 s es:

$$y\,(1\ \text{m},2\ \text{s})=0{,}01\cdot sen\,(6\cdot\pi\cdot 2-10\cdot\pi\cdot 1)=0$$

La velocidad es la derivada de la elongación respecto del tiempo:

$$v\,(x,t)=\frac{dy\,(x,t)}{dt}=A\cdot\omega\cdot cos\,(\omega\cdot t-k\cdot x)$$

$$v\,(x,t)=0{,}06\cdot\pi\cdot cos\,(6\cdot\pi\cdot t-10\cdot\pi\cdot x)$$

$$v\,(1\ \text{m},2\ \text{s})=0{,}06\cdot\pi\cdot cos\,(6\cdot\pi\cdot 2-10\cdot\pi\cdot 1)=0{,}19\ \text{m/s}$$

17 **Una onda armónica se propaga según la ecuación, expresada en el SI:**

$$\boldsymbol{y(x,t) = 2 \cdot sen\,(2 \cdot \pi \cdot x - 16 \cdot \pi \cdot t)}$$

a) Indica en qué sentido se propaga la onda.

b) Determina la amplitud, la frecuencia, la longitud de onda y la velocidad de propagación.

c) Halla la expresión de la velocidad de vibración de cualquier punto de la onda y calcula su valor máximo.

La ecuación general de una onda armónica que se propaga en el sentido positivo del eje *X* es:

$$y\,(x,t) = A \cdot sen\left[2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) + \varphi_0\right] \quad ; \quad v > 0$$

Y la de una onda armónica que se propaga en el sentido negativo de dicho eje es:

$$y\,(x,t) = A \cdot sen\left[2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{T}\right) + \varphi_0\right] \quad ; \quad v < 0$$

Como vemos, cuando los dos términos (*x* o *t*) de la fase en la ecuación de la onda van precedidos del mismo signo, la onda se propaga en el sentido negativo del eje *X*, y en sentido positivo cuando ambos términos tienen signos opuestos.

a) La ecuación de la onda del problema es:

$$y\,(x,t) = 2 \cdot sen\,(2 \cdot \pi \cdot x - 16 \cdot \pi \cdot t)$$

Al tener un término de la fase, *k*, precedido por un signo más y el otro término, ω, precedido por el signo menos, la onda se propaga en el sentido positivo del eje *X*, y la velocidad de propagación es positiva.

b) Comparando la ecuación general de una onda armónica que se propaga en el sentido positivo del eje *X* con la ecuación del problema:

$$y\,(x,t) = A \cdot sen\,\left[2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) + \varphi_0\right]$$

$$y\,(x,t) = 2 \cdot sen\,(2 \cdot \pi \cdot x - 16 \cdot \pi \cdot t) = 2 \cdot sen\,[2 \cdot \pi \cdot (x - 8 \cdot t)]$$

se calculan directamente la amplitud, *A*; la longitud de onda, λ; el período, *T*, y la fase inicial, φ_0:

$$A = 2 \text{ m} \quad ; \quad \frac{1}{\lambda} = 1 \;\rightarrow\; \lambda = 1 \text{ m} \quad ; \quad \frac{1}{T} = 8 \;\rightarrow\; T = 0{,}125 \text{ s} \quad ; \quad \varphi_0 = 0 \text{ rad}$$

La frecuencia, *f*, es la inversa del período:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}125} = 8 \text{ s}^{-1}$$

A partir de la ecuación que relaciona las magnitudes fundamentales de una onda (longitud de onda, período y velocidad de propagación) se calcula la velocidad de propagación de la onda:

$$v = \frac{\lambda}{T} \;\rightarrow\; v = \frac{1}{0{,}125} = 8 \text{ m/s}$$

c) La velocidad de vibración de cualquier punto de la onda se obtiene derivando respecto al tiempo la ecuación de la posición:

$$v\,(x,t) = \frac{dy\,(x,t)}{dt} = 2 \cdot (-16 \cdot \pi) \cdot cos\,[2 \cdot \pi \cdot (x - 8 \cdot t)] = -32 \cdot \pi \cdot cos\,[2 \cdot \pi \cdot (x - 8 \cdot t)]$$

La velocidad será máxima, en módulo, en aquellos puntos que cumplan:

$$cos\,[2\cdot\pi\cdot(x-8\cdot t)]=-1$$

Por tanto, la velocidad máxima será:

$$v=32\cdot\pi=100{,}53\ \text{m/s}$$

18 **En un estanque existen dos boyas situadas a 20 m una de otra. Se generan olas en la primera boya de 15 cm de altura entre cresta y valle que al cabo de 40 s alcanzan la segunda, y se cuenta que la boya realiza en un minuto 48 oscilaciones. Encuentra el período, la frecuencia, la longitud de onda y la ecuación de onda.**

La amplitud es la mitad de la diferencia de altura entre la cresta y el valle (ambos puntos representan la máxima separación de la posición de equilibrio):

$$A = 0{,}075\ \text{m}$$

La boya realiza 48 oscilaciones en un minuto, por lo que la frecuencia, el período y la frecuencia angular son:

$$f=\frac{48\ \text{oscilaciones}}{60\ \text{s}}=0{,}8\ \text{Hz}\ \rightarrow\ T=\frac{1}{f}=\frac{1}{0{,}8\ \text{Hz}}=1{,}25\ \text{s}$$

$$\omega=2\cdot\pi\cdot f=1{,}6\cdot\pi\ \text{rad/s}$$

Teniendo en cuenta el tiempo que tarda una cresta o un valle en recorrer la distancia que separa ambas boyas obtenemos la velocidad de propagación, y con esta, la longitud de onda y el número de ondas:

$$v=\frac{e}{t}=\frac{20\ \text{m}}{40\ \text{s}}=0{,}5\ \text{m/s}\ \rightarrow\ \lambda=\frac{v}{f}=\frac{0{,}5\ \text{m/s}}{0{,}8\ \text{s}^{-1}}=0{,}625\ \text{m}$$

$$k=\frac{2\cdot\pi}{\lambda}=\frac{2\cdot\pi}{0{,}625\ \text{m}}=3{,}2\cdot\pi\ \text{rad/m}$$

La ecuación de la onda es:

$$y\,(x,t)=0{,}075\cdot sen\,(1{,}6\cdot\pi\cdot t-3{,}2\cdot\pi\cdot x)$$

Página 178

19 **Una onda armónica unidimensional *y* (*x*, *t*), de 4 Hz de frecuencia y 2 mm de amplitud, se desplaza a 2,5 m/s hacia los valores positivos del eje *X*. Escribe la ecuación de la onda si el origen de tiempos corresponde a un instante en el que *y* = 2 mm y *x* = 0.**

Los datos del problema son:

$$A = 0{,}002\ \text{m}\quad;\quad f = 4\ \text{Hz}\quad;\quad v = 2{,}5\ \text{m/s}$$

Con estos valores, obtenemos la frecuencia angular, la longitud de onda y el número de ondas:

$$\omega=2\cdot\pi\cdot f=8\cdot\pi\ \text{rad/s}\ \ ;\ \ \lambda=\frac{v}{f}=\frac{2{,}5\ \text{m/s}}{4\ \text{s}^{-1}}=0{,}625\ \text{m}$$

$$k=\frac{2\cdot\pi}{\lambda}=3{,}2\cdot\pi\ \text{rad/m}$$

La ecuación de la onda que se propaga en el sentido positivo del eje *X* toma la forma:

$$y(x, t) = A \cdot sen(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi_0) = 2 \cdot 10^{-3} \cdot sen(8 \cdot \pi \cdot t - 3{,}2 \cdot \pi \cdot x + \varphi_0)$$

donde φ_0 representa la fase inicial en el foco. Para hallar su valor, aplicamos las condiciones iniciales en la ecuación anterior:

$$y(0, 0) = 0{,}002 = 0{,}002 \cdot sen(8 \cdot \pi \cdot 0 - 3{,}2 \cdot \pi \cdot 0 + \varphi_0) = 0{,}002 \cdot sen\ \varphi_0$$

$$sen\ \varphi_0 = 1 \ \rightarrow \ \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Por tanto, la ecuación de la onda es:

$$y(x, t) = 0{,}002 \cdot sen\left[2 \cdot \pi \cdot (4 \cdot t - 1{,}6 \cdot x) + \frac{\pi}{2}\right] \text{ m}$$

20 **En una cuerda tensa se genera una onda viajera de 10 cm de amplitud mediante un oscilador de 20 Hz. La onda se propaga a 2 m · s^{-1}.**

a) Escribe la ecuación de la onda suponiendo que se propaga de derecha a izquierda y que en el instante inicial la elongación en el foco es nula.

b) Determina la velocidad de una partícula de la cuerda situada a 1 m del foco en *t* = 3 s.

a) La ecuación general de una onda que se propaga de derecha a izquierda a lo largo del eje *X* se puede expresar en la forma:

$$y(x, t) = A \cdot sen\left[2 \cdot \pi \cdot f \cdot \left(t + \frac{x}{v}\right) + \varphi_0\right]$$

En el instante inicial (*t* = 0), la elongación en el foco (*x* = 0) es nula, por lo que la fase inicial es:

$$y(0, 0) = 0 = A \cdot sen\left[2 \cdot \pi \cdot f \cdot \left(0 + \frac{0}{v}\right) + \varphi_0\right] \ \rightarrow \ sen\ \varphi_0 = 0 \ \rightarrow \ \varphi_0 = 0$$

Con los datos del problema:

$$A = 0{,}1 \text{ m} \quad ; \quad f = 20 \text{ Hz} \quad ; \quad v = 2 \text{ m/s}$$

La ecuación de la onda es:

$$y(x, t) = 0{,}1 \cdot sen\left[40 \cdot \pi \cdot \left(t + \frac{x}{2}\right)\right]$$

b) La velocidad de una partícula de la cuerda es la derivada de la elongación respecto del tiempo:

$$v(x, t) = \frac{dy(x, t)}{dt} = 4 \cdot \pi \cdot cos\left[40 \cdot \pi \cdot \left(t + \frac{x}{2}\right)\right]$$

A 1 m del foco y en *t* = 3 s, la velocidad es:

$$v(1 \text{ m}, 3 \text{ s}) = 4 \cdot \pi \cdot cos\left[40 \cdot \pi \cdot \left(3 + \frac{1}{2}\right)\right] = 12{,}6 \text{ m/s}$$

21 **Una onda transversal viaja a 20 m/s hacia la izquierda con una amplitud de 0,25 m y una frecuencia de 0,20 Hz. Cuando han pasado 2,5 s desde su comienzo, la elongación en el foco es igual a la amplitud. Halla la longitud de onda, el número de onda, la frecuencia angular, la ecuación de onda y la velocidad y aceleración en cada punto.**

Los datos del problema son:

$$v = 20 \text{ m/s} \quad ; \quad A = 0{,}25 \text{ m} \quad ; \quad f = 0{,}20 \text{ Hz}$$

La longitud de onda, el número de onda y la frecuencia angular son:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{20\ \text{m/s}}{0{,}20\ \text{Hz}} = 100\ \text{m} \quad ; \quad k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} = \frac{2 \cdot \pi}{100\ \text{m}} = \frac{\pi}{50} = 0{,}063\ \text{rad/m}$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot \pi\ \text{rad} \cdot 0{,}20\ \text{s}^{-1} = 1{,}26\ \text{rad/s}$$

Escribimos la ecuación de onda y aplicamos las condiciones para t = 2,5 s en el foco para calcular la fase inicial:

$$y\,(x, t) = A \cdot sen\,(\omega \cdot t + k \cdot x + \varphi_0)$$

$$y\,(0\ \text{m}, 2{,}5\ \text{s}) = 0{,}25 = 0{,}25 \cdot sen\left(0{,}4 \cdot \pi \cdot 2{,}5 + \frac{\pi}{50} \cdot 0 + \varphi_0\right)$$

$$sen\,(\pi + \varphi_0) = 1 \ \rightarrow \ \frac{\pi}{2} = \pi + \varphi_0 \ \rightarrow \ \varphi_0 = -\frac{\pi}{2}\ \text{rad}$$

Podemos escribir ya las ecuaciones de la elongación, la velocidad y la aceleración de la onda:

$$y\,(x, t) = 0{,}25 \cdot sen\left(0{,}4 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{50} \cdot x - \frac{\pi}{2}\right)\ \text{m} = 0{,}25 \cdot sen\left(1{,}26 \cdot t + 0{,}063 \cdot x - \frac{\pi}{2}\right)\ \text{m}$$

$$v\,(x, t) = 0{,}25 \cdot 1{,}26 \cdot cos\left(1{,}26 \cdot t + 0{,}063 \cdot x - \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}32 \cdot cos\left(1{,}26 \cdot t + 0{,}063 \cdot x - \frac{\pi}{2}\right)\ \text{m/s}$$

$$a\,(x, t) = -0{,}32 \cdot 1{,}26 \cdot sen\left(1{,}26 \cdot t + 0{,}063 \cdot x - \frac{\pi}{2}\right) = -0{,}40 \cdot sen\left(1{,}26 \cdot t + 0{,}063 \cdot x - \frac{\pi}{2}\right)\ \text{m/s}^2$$

22 Por una cuerda tensa se propaga, en el sentido positivo del eje *X*, una onda sinusoidal transversal a una velocidad de 10 m/s. Los puntos de la cuerda oscilan con una frecuencia *f* = 2 Hz. En el instante *t* = 0, el punto de la cuerda en *x* = 0 pasa por la posición de equilibrio con una velocidad de oscilación transversal positiva de 1 m/s.

a) Calcula la amplitud de la onda y su fase inicial.

b) Calcula la máxima velocidad de oscilación transversal de los puntos de la cuerda.

c) Escribe la función de onda correspondiente, en unidades del SI.

a) Las ecuaciones generales de la elongación, la velocidad y la aceleración son:

$$y\,(x, t) = A \cdot sen\,(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi_0)$$

$$v\,(x, t) = A \cdot \omega \cdot cos\,(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi_0)$$

$$a\,(x, t) = -A \cdot \omega^2 \cdot sen\,(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi_0)$$

La velocidad y aceleración máximas de un punto de la cuerda son:

$$v_{máx} = A \cdot \omega$$

$$a_{máx} = A \cdot \omega^2$$

La frecuencia angular vale:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 4 \cdot \pi\ \text{rad/s}$$

La velocidad de oscilación de un punto de la cuerda es máxima cuando el punto pasa por la posición de equilibrio. Teniendo esto en cuenta, podemos hallar la amplitud de la onda:

$$v_{máx} = A \cdot \omega \ \rightarrow \ A = \frac{v_{máx}}{\omega} = \frac{1\ \text{m/s}}{4 \cdot \pi\ \text{rad/s}} = 0{,}08\ \text{m}$$

Para hallar la fase inicial, sustituimos en la ecuación de la velocidad de oscilación de la onda:

$$v\,(0,0)=1=0{,}08\cdot 4\cdot \pi \cdot \cos\,(\omega \cdot 0-k\cdot 0+\varphi_0) \;\rightarrow\; \cos \varphi_0=1 \;\rightarrow\; \varphi_0=0$$

b) Como hemos dicho, la máxima velocidad de oscilación es la velocidad de cualquier punto de la cuerda cuando pasa por la posición de equilibrio; en este caso:

$$v_{máx}=1 \text{ m/s}$$

c) Para poder escribir la ecuación de la onda solo nos falta conocer su longitud de onda, que podemos hallar por medio de la relación entre esta y la frecuencia:

$$\lambda=\frac{v}{f}=\frac{10 \text{ m/s}}{2 \text{ Hz}}=5 \text{ m}$$

La ecuación de la onda es:

$$y\,(x,t)=A\cdot sen\left[2\cdot\pi\cdot\left(f\cdot t-\frac{x}{\lambda}\right)+\varphi_0\right]=0{,}08\cdot sen\left[2\cdot\pi\cdot\left(2\cdot t-\frac{x}{5}\right)\right] \text{ m}$$

23 **Una onda armónica transversal que se desplaza en la dirección positiva del eje *X* tiene una amplitud de 10 cm, una longitud de onda de 50 cm y una frecuencia de 10 Hz. En el origen de coordenadas y de tiempos, la elongación es 0,05 cm. Halla la velocidad de la onda y la función de onda.**

La velocidad de propagación de la onda es:

$$v=\lambda\cdot f=0{,}5 \text{ m}\cdot 10 \text{ Hz}=5 \text{ m/s}$$

Con los datos del problema, calculamos la frecuencia angular y el número de ondas:

$$\omega=2\cdot\pi\cdot f=20\cdot\pi \text{ rad/s} \;\; ; \;\; k=\frac{2\cdot\pi}{\lambda}=\frac{2\cdot\pi}{0{,}5 \text{ m}}=4\cdot\pi \text{ rad/m}$$

Escribimos la ecuación de onda y sustituimos los valores correspondientes a las condiciones iniciales en el foco para calcular la fase inicial:

$$y\,(x,t)=A\cdot sen\,(\omega\cdot t-k\cdot x+\varphi_0) \;\rightarrow\; y\,(0,0)=0{,}05=0{,}1\cdot sen\,(20\cdot\pi\cdot 0-4\cdot\pi\cdot 0+\varphi_0)$$

$$0{,}05=0{,}1\cdot sen\,\varphi_0 \;\rightarrow\; \varphi_0=\frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

Por tanto, la función de onda es:

$$y\,(x,t)=0{,}1\cdot sen\left(20\cdot\pi\cdot t-4\cdot\pi\cdot x+\frac{\pi}{6}\right) \text{ m}$$

24 **Por una cuerda se propaga una onda caracterizada por la ecuación (en unidades del SI):**

$$\boldsymbol{y\,(x,t)=9\cdot sen\,[2\cdot\pi\cdot(t/8-x/4)]}$$

a) Halla el período, la frecuencia, la longitud de onda y la velocidad de esta onda.

b) Halla la distancia a la que se encuentran, en un instante dado, dos puntos de esa cuerda que tienen una diferencia de fase entre ellos de 30 · π/4 radianes.

a) Si comparamos la ecuación del enunciado con la ecuación general de una onda armónica escrita en la forma:

$$y\,(x,t)=A\cdot sen\left[2\cdot\pi\cdot\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)+\varphi_0\right]$$

deducimos que:

$$T=8\ \text{s} \quad \rightarrow \quad f=\frac{1}{T}=\frac{1}{8\ \text{s}}=0{,}125\ \text{Hz}$$

$$\lambda=4\ \text{m} \quad \rightarrow \quad v=\lambda\cdot f=4\ \text{m}\cdot 0{,}125\ \text{s}^{-1}=0{,}5\ \text{m/s}$$

b) La diferencia de fase entre dos puntos, en un instante dado, es:

$$\Delta\varphi=\left(\frac{2\cdot\pi}{T}\cdot t-\frac{2\cdot\pi}{\lambda}\cdot x_1+\varphi_0\right)-\left(\frac{2\cdot\pi}{T}\cdot t-\frac{2\cdot\pi}{\lambda}\cdot x_2+\varphi_0\right)=\frac{2\cdot\pi}{\lambda}\cdot(x_2-x_1)=\frac{2\cdot\pi}{\lambda}\cdot\Delta x$$

Por tanto, la distancia entre los puntos debe ser:

$$\Delta x=\frac{\lambda}{2\cdot\pi}\cdot\Delta\varphi=\frac{4}{2\cdot\pi}\cdot\frac{30\cdot\pi}{4}=15\ \text{m}$$

25 **Una onda armónica transversal de período *T* = 2 s se propaga con una velocidad de 60 cm/s en sentido positivo a lo largo de una cuerda tensa orientada según el eje *X*.**

Se sabe que el punto de la cuerda de abscisa *x* = 30 cm oscila en la dirección del eje *Y*, de forma que cuando *t* = 1 s, la elongación es nula y su velocidad es positiva; y en el instante *t* = 1,5 s, su elongación es de 5 cm y su velocidad es nula. Calcula:

a) La frecuencia y la longitud de onda.

b) La fase inicial, la amplitud de la onda armónica y su expresión matemática.

c) La diferencia de fase de oscilación de dos puntos separados por un cuarto de longitud de onda.

a) La frecuencia y la longitud de onda se calculan a partir de los datos del período y la velocidad de propagación:

$$f=\frac{1}{T}=\frac{1}{2\ \text{s}}=0{,}5\ \text{Hz}$$

$$\lambda=\frac{v}{f}=\frac{0{,}6\ \text{m/s}}{0{,}5\ \text{Hz}}=1{,}2\ \text{m}$$

b) Escribimos la ecuación de la elongación para, con los datos correspondientes al punto x = 0,3 m, obtener los valores de la amplitud y la fase inicial. Para el instante t = 1 s, tenemos:

$$y\,(x,t)=A\cdot sen\left[2\cdot\pi\cdot\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)+\varphi_0\right]$$

$$y\,(0{,}3\ \text{m};1\ \text{s})=0=A\cdot sen\left[2\cdot\pi\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{0{,}3}{1{,}2}\right)+\varphi_0\right] \quad ; \quad v>0$$

$$sen\left(\pi-\frac{\pi}{2}+\varphi_0\right)=0 \quad \rightarrow \quad \frac{\pi}{2}+\varphi_0=\pm\, n\cdot\pi \quad ; \quad n=0,1,2,\ldots$$

$$\varphi_0=-\frac{\pi}{2}\pm n\cdot\pi \quad ; \quad n=0,1,2,\ldots$$

Como el enunciado indica que la velocidad de vibración de ese punto en ese instante es positiva, tenemos:

$$v\,(x,t)=A\cdot\frac{2\cdot\pi}{T}\cdot cos\left[2\cdot\pi\cdot\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)+\varphi_0\right]$$

$$v\,(0{,}3\ \text{m};1\ \text{s})>0 \quad \rightarrow \quad cos\left[2\cdot\pi\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{0{,}3}{1{,}2}\right)+\varphi_0\right]>0$$

$$cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi_0\right)>0$$

Esta condición se cumple si:

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} + \varphi_0 < \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad -\pi < \varphi_0 < 0$$

Por tanto, llegamos a la conclusión de que n = 0 y la fase inicial es:

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$$

Si sustituimos ahora los valores conocidos para el instante t = 1,5 s, obtenemos el valor de la amplitud:

$$y\,(0{,}3\ \text{m}; 1\ \text{s}) = 0{,}05 = A \cdot sen\left[2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1{,}5}{2} - \frac{0{,}3}{1{,}2}\right) - \frac{\pi}{2}\right]$$

$$A = \frac{0{,}05\ \text{m}}{sen\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right)} = 0{,}05\ \text{m}$$

Por lo que podemos ya escribir la ecuación de la onda armónica:

$$y\,(x, t) = 0{,}05 \cdot sen\left[2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{2} - \frac{x}{1{,}2}\right) - \frac{\pi}{2}\right] = 0{,}05 \cdot sen\left(\pi \cdot t - \frac{5}{3} \cdot \pi \cdot x - \frac{\pi}{2}\right)\ \text{m}$$

c) Entre dos puntos separados una distancia igual a un cuarto de longitud de onda, el desfase es siempre igual a una cuarto de $2 \cdot \pi$ rad, es decir. Lo comprobamos a continuación:

$$\Delta\varphi = \left(\omega \cdot t - \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot x_1 + \varphi_0\right) - \left(\omega \cdot t - \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot x_2 + \varphi_0\right) = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot \Delta x$$

Si $\Delta x = \frac{\lambda}{4} \quad \rightarrow \quad \Delta\varphi = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4} = \frac{2 \cdot \pi}{4} = \frac{\pi}{2}\ \text{rad}$.

Energía de las ondas

26 Un foco emite ondas que, a 1 m de distancia del foco, tienen una intensidad de 25 W/m². Halla la distancia a la que la intensidad se reduce a la mitad.

Aunque en el enunciado no se especifica, suponemos que el foco es un foco puntual que emite ondas esféricas en un medio homogéneo e isótropo. La intensidad de una onda se define como:

$$I = \frac{P}{S}$$

La relación entre las intensidades en dos puntos del medio es:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\dfrac{P}{4 \cdot \pi \cdot r_1^2}}{\dfrac{P}{4 \cdot \pi \cdot r_2^2}} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

Como vemos, la relación entre las intensidades es inversamente proporcional al cuadrado de la relación entre sus radios. Como la intensidad disminuye a la mitad, tenemos:

$$\frac{I_1}{\dfrac{I_1}{2}} = \frac{r_2^2}{1^2} \quad \rightarrow \quad 2 = r_2^2 \quad \rightarrow \quad r_2 = \sqrt{2} = 1{,}41\ \text{m}$$

Página 179

27 **La potencia de una bombilla es 40 W/m². Halla la intensidad de la luz que emite a 2 m y 30 m.**

Como la potencia no varía, tenemos:

$$I = \frac{P}{4 \cdot \pi \cdot r^2} \rightarrow I_{2\,m} = \frac{40}{4 \cdot \pi \cdot 2^2} = 0{,}80\ \frac{W}{m^2}$$

$$I_{30\,m} = \frac{40}{4 \cdot \pi \cdot 30^2} = 3{,}5 \cdot 10^{-3}\ \frac{W}{m^2}$$

28 **La energía de una onda es proporcional al cuadrado de la amplitud si esta se emite desde un foco puntual en una onda esférica. Encuentra la ecuación de una onda esférica.**

La energía en una partícula de masa *m*, frecuencia *f* y amplitud *A* es:

$$E = 2 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot f^2 \cdot A^2$$

Si esta energía se transmite en forma de onda esférica, la energía contenida en una esfera de radio r_1 se transmite a una esfera de radio r_2, mayor que r_1, por lo que se repartirá en un número mayor de partículas. Como la energía se conserva, al aumentar el número de partículas alcanzadas por la perturbación en el medio, la amplitud de la onda debe disminuir conforme aumenta la distancia al foco:

$$A = \frac{A_0}{r}$$

Esto nos permite escribir para la función de una onda esférica:

$$\psi(r, t) = \frac{1}{r} \cdot sen\,(\omega \cdot t - k \cdot r + \varphi_0)$$

29 **El vuelo 370 de Malaysia Airlines desapareció el 8 de marzo de 2014 en el Mar de China. Los controladores aéreos lo seguían con un radar de 1 000 Mhz de frecuencia y 1 kW de potencia.**

Calcula la intensidad de las ondas del radar a la distancia que estaba el avión cuando se detectó por última vez, sabiendo que dicha distancia fue de 200 km desde la posición del radar.

Suponemos ondas esféricas y que no hay absorción en la atmósfera.

La intensidad de una onda en un punto es la cantidad de energía por unidad de tiempo que atraviesa perpendicularmente la unidad de superficie colocada en ese punto.

Esto es:

$$I = \frac{E}{S \cdot t} = \frac{P}{S}$$

Como la energía se irradia en todas las direcciones en forma de ondas esféricas, de superficie $4 \cdot \pi \cdot r^2$, podemos escribir lo siguiente:

$$I = \frac{P}{S} = \frac{P}{4 \cdot \pi \cdot r^2}$$

Sustituyendo valores en la expresión anterior se calcula la intensidad de las ondas del radar a 200 km de la posición del radar:

$$I = \frac{P}{4 \cdot \pi \cdot r^2} = \frac{1000}{4 \cdot \pi \cdot 200\,000^2} = 1{,}99 \cdot 10^{-9}\ W/m^2$$

Absorción y atenuación de ondas

30 El coeficiente de absorción de una pared es 0,1 cm^{-1}. ¿Cuál debe ser la anchura de la pared para que se perciba detrás de ella la décima parte de la intensidad de las ondas que sobre ella inciden?

De acuerdo con la ley general de absorción, la intensidad de una onda disminuye exponencialmente con el espesor del medio:

$$I = I_0 \cdot e^{-\beta \cdot x}$$

Si la intensidad de la onda tras atravesar la pared es la décima parte de la intensidad incidente:

$$\frac{I_0}{10} = I_0 \cdot e^{-0,1 \cdot x} \rightarrow \frac{1}{10} = e^{-0,1 \cdot x}$$

$$x = \frac{\ln 10}{0,1} = 23 \text{ cm}$$

31 Calcula el coeficiente de absorción de una onda si su amplitud es 0,5 m a 0,1 m del foco emisor y 0,25 m a 10 m del foco.

Aplicando la ley general de la absorción:

$$I = I_0 \cdot e^{-\beta \cdot x}$$

Y teniendo en cuenta que la intensidad es directamente proporcional al cuadrado de la amplitud, para dos puntos situados a diferente distancia del foco emisor, podemos escribir:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{A_1^2}{A_2^2} \rightarrow \frac{A_1^2}{A_2^2} = \frac{e^{-\beta \cdot x_1}}{e^{-\beta \cdot x_2}} \rightarrow \frac{0,5^2}{0,25^2} = \frac{e^{-\beta \cdot 1}}{e^{-\beta \cdot 10}} = e^{\beta \cdot 9}$$

$$\ln 4 = \beta \cdot 9 \rightarrow \beta = 0,15 \text{ m}^{-1}$$

32 La intensidad de una onda es 0,01 W/m^2 y se reduce a la mitad cuando atraviesa un muro de 1 m. Halla el coeficiente de absorción de la onda.

Aplicando la ley general de la absorción:

$$I = I_0 \cdot e^{-\beta \cdot x}$$

$$\frac{I_0}{2} = I_0 \cdot e^{-\beta \cdot 1 \text{ m}} \rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\beta}$$

$$\beta = \ln 2 = 0,69 \text{ m}^{-1}$$

33 Se hace oscilar una cuerda de 10 m de longitud y 500 g durante 5 s, formándose ondas de 10 Hz y 0,1 m de amplitud. Calcula la energía y la potencia de las ondas producidas.

Para calcular la energía de las ondas, utilizaremos la densidad lineal de la cuerda, ya que no conocemos la masa de las partículas que la constituyen. La energía de la onda es:

$$E = \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot \omega^2 \cdot A^2 \rightarrow E = \frac{1}{2} \cdot \frac{0,5}{10} \cdot (2 \cdot \pi \cdot 10)^2 \cdot 0,1^2 = 0,99 \text{ J}$$

La potencia en 5 s será:

$$P = \frac{E}{t} = \frac{0,99 \text{ J}}{5 \text{ s}} = 0,198 \text{ W}$$