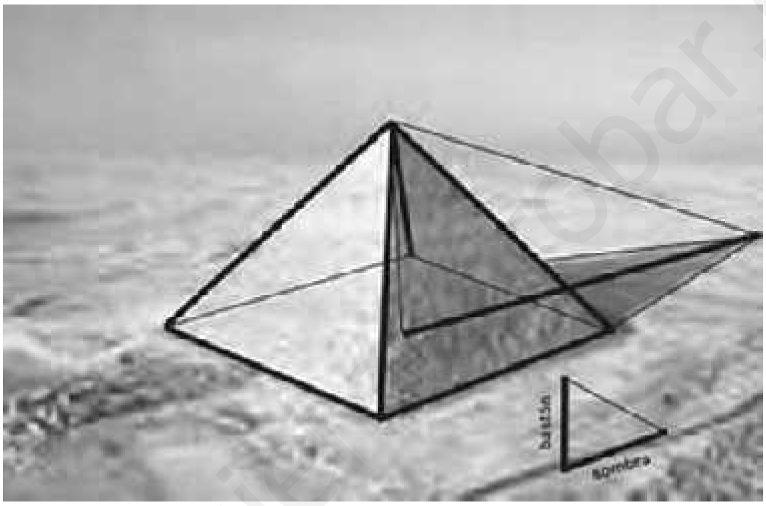
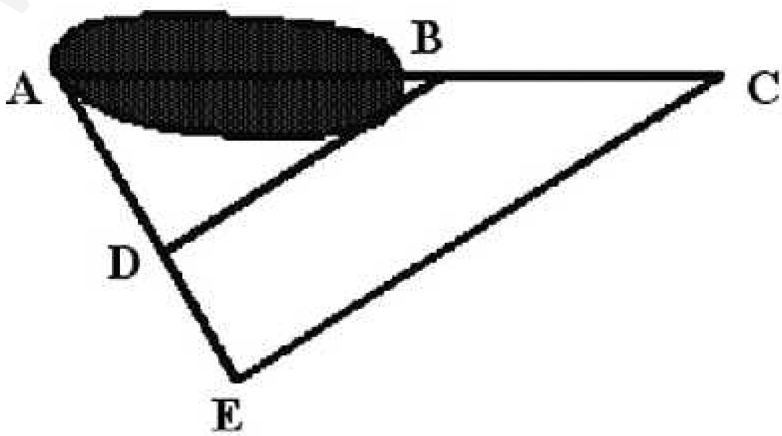
PROPORCIONALIDAD GEOMÉTRICA

1) Un triángulo tiene como medidas de sus lados 8 m, 6 m y 12 m. Otro triángulo tiene de lados 6 m, 4 m y 3 m ¿Son semejantes estos triángulos? Si lo son, ¿cuál sería su razón de semejanza?

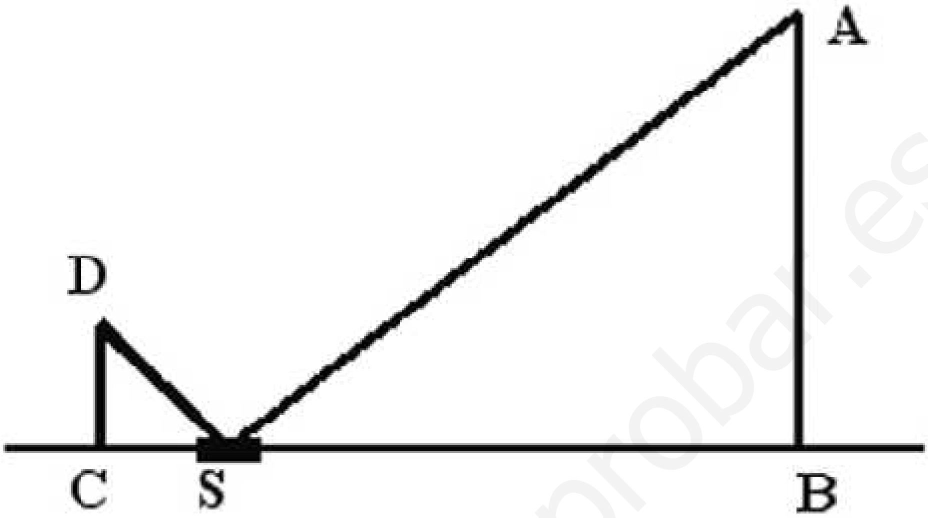
2) **La pirámide de Keops tiene una base cuadrada de 230 metros de lado. Dice la leyenda que Tales midió su altura observando que la sombra proyectada por la pirámide era de 85 metros desde la base y colocando su bastón de 1,46 metros en el punto donde acababa la sombra, midió la que proyectaba el bastón, que era de 2 metros. ¿Qué altura tiene la pirámide?**



3) **Dos exploradores miden la longitud AB de un estanque construyendo un triángulo ACE y trazando BD paralela a CE. Suponiendo que AE = 8 m, DE = 3 m. y BC = 3,60 m. ¿Qué longitud tiene AB?**

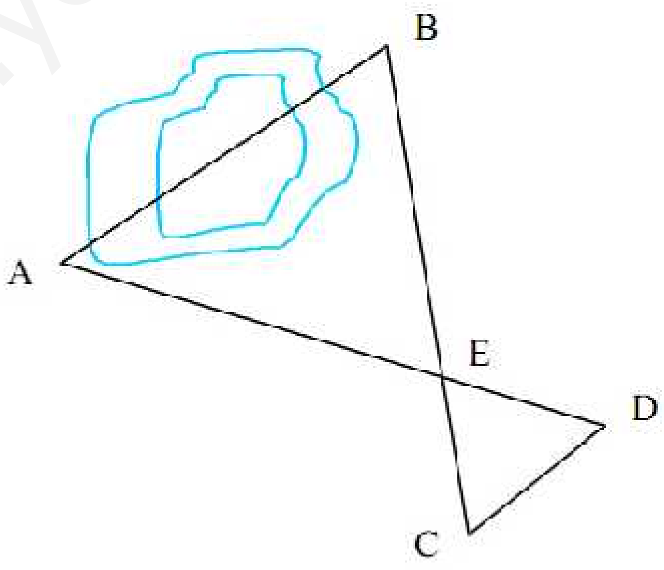


4) **Sea AB un árbol cuya copa es inaccesible. Un observador coloca un espejo S sobre el terreno y se aleja de él hasta el punto C, desde el cual ve la imagen de la copa.**
Si DC = 1,7 m, CS = 3 m., SB = 12 m., ¿qué altura tiene el árbol?



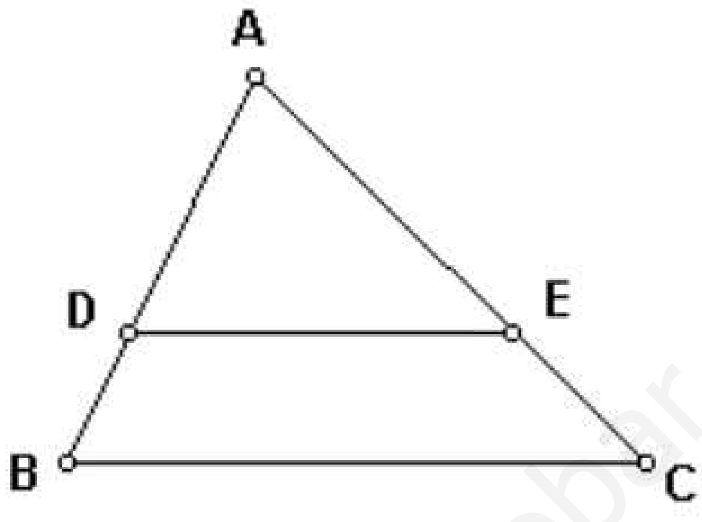
5) Una antena proyecta una sombra de 50,4 m y un poste de altura 2,54 m proyecta una sombra de 4,21 m ¿Cuánto mide la antena?

6) **En la siguiente figura, si los segmentos AB y CD son paralelos, demostrar que los triángulos ABE y CDE son semejantes y calcula la razón de proporcionalidad si CD = 6 m, EC = 8 m y EB = 24 m. Calcular AB.**

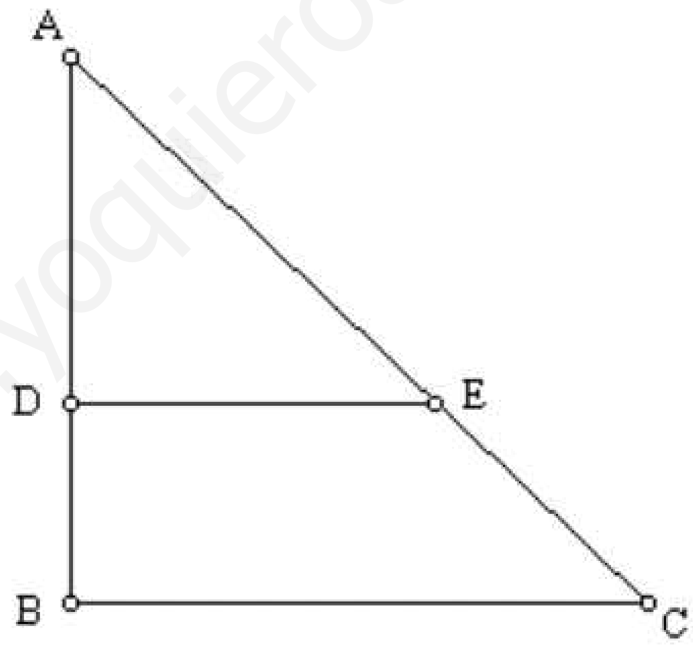


7) ¿Qué altura tiene la torre de un templo si su sombra mide 6 m, la altura de un árbol que está a su lado mide 3 m y la distancia desde la copa del árbol hasta donde termina su sombra es de 5 m.?

8) Calcular la medida del segmento EC sabiendo que BC es paralela a DE, AB = 9 cm, DA = 6 cm y AC = 15 cm.



9) Calcular la medida del segmento AC sabiendo que DE es paralela a BC, el ángulo EDA = 90º, AD = 2 cm, DE = 3 cm y BC = 18 cm.



10) En el triángulo ABC los lados son AB = 5 m., AC = 7 m. Sobre el lado AB se marca una distancia AD = 2 m. ¿Cuál será la longitud del segmento AE marcado sobre AC para que el segmento DE sea paralelo a BC?

11) Dos triángulos isósceles tienen el mismo ángulo en el vértice. ¿Son semejantes?

12) ¿Son semejantes todos los triángulos equiláteros? ¿y los triángulos rectángulos?

13) En el triángulo ABC el lado AB = 12 cms, BC = 11 cms y AC = 9 cm. La paralela a AB tiene en el triángulo un segmento MN = 10 cms. Calcula los segmentos AM, MC, NC y NB.

14) Las bases de un trapecio tienen 24 y 16 m y los lados 6 y 10 m. Calcula los otros dos lados del triángulo formado al prolongar los lados del trapecio.

15) Para calcular la altura de un árbol, se clava a 1,36 m de su base un palo de 2,45 m y 0,6 m más lejos un palo de 1,65 m. Si los extremos de los palos están alineados con la copa del árbol, ¿cuál es la altura de éste?

16) La longitud de los lados AB, BC y CA de un triángulo son entre sí como 3 : 4 : 6. Sabiendo que el perímetro del triángulo es de 26 m. y que en el triángulo A'B'C' semejante el lado A'B' tiene una longitud de 21 m, determina las longitudes de los lados de ambos triángulos.

17) Teniendo que hacer en bicicleta la excursión Madrid-Toledo, consultamos el mapa en el que, sobre un segmento de 7 mm, se lee 10 km. En tal mapa, la distancia entre ambas ciudades por carretera es de 4,9 cms. ¿Cuál es la distancia real?

18) En un mapa no aparece la escala pero sabemos que a una distancia de 39 km le corresponde en el mapa 1,5 cms. Determina la escala.

19) En un mapa de España, se considera el triángulo cuyos vértices coinciden con el cabo de Finisterre (F), la punta de Tarifa (T) y el cabo Creus (C) obteniendo las medidas: FT = 21,5 cms, TC = 27 cm y CF = 26,5 cms. Halla las distancias reales de los tres lados del triángulo si la escala es 1 cm/40 km.

20) Un triángulo tiene dos lados de longitud 2 cm y 4 cm y el ángulo comprendido entre ellos es de 70º. Otro triángulo tiene lados de 8 cm y 3 cm y el ángulo entre ellos es de 70º ¿Cuál es la razón de semejanza si existe?

21) En un rectángulo ABCD cuyos lados son AB = 8 cms, BC = 10 cms, se traza EF paralela a AB de manera que los rectángulos ABEF y ABCD son semejantes. ¿Cuánto mide el segmento BE?

22) Si la razón de semejanza de dos triángulos semejantes es de 5/2 y el perímetro del menor es 13, ¿cuál es el perímetro del mayor? Si el área del menor es 6 ¿cuál es el área del mayor?

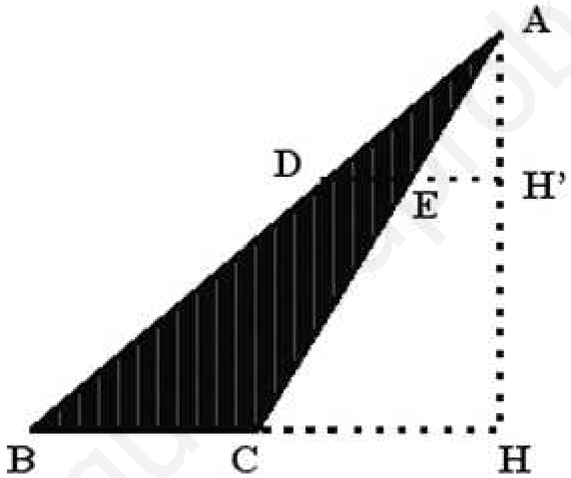
23) La razón de semejanza entre dos paralelogramos semejantes es 2/3 y el área del primero mide 60 cm^2. Determina el área del segundo.

24) **Dibuja el plano de un campo rectangular de 8 x 6 metros haciendo corresponder a cada metro 2 cms. ¿Cuáles serán las dimensiones del plano del campo? ¿Cuál será el área sobre el plano de un estanque circular cuyo centro coincide con el del rectángulo y es tangente a los vértices del campo?**

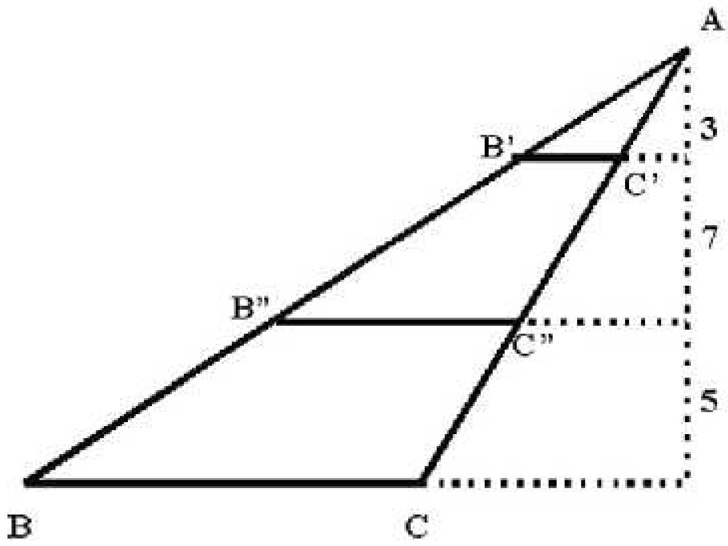
25) **El plano de un jardín está formado por un cuadrado y cuatro triángulos equiláteros, cada uno con su base en un lado del jardín y su vértice externo al mismo. ¿Cuál es la distancia real entre los dos vértices extremos de los triángulos si, en el plano, el lado del cuadrado mide 4 cm y la escala del dibujo es 1:200? Determina después el área real del jardín.**

26) En un triángulo rectángulo ABC cuyos catetos BA = 8 cm y BC = 6 cm, se inscribe un cuadrado que tiene dos lados sobre los catetos y su vértice D sobre la hipotenusa. Halla el lado del cuadrado.

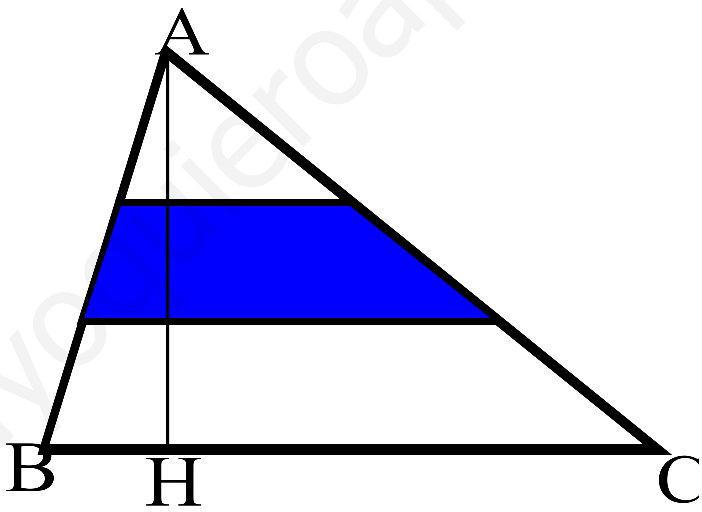
27) **En un triángulo de base BC = 4 cm y altura AH = 6 cm, se traza un segmento DE paralelo a la base, que corta a la altura en un punto H' tal que AH' = 1/3 AH. Determina las áreas de las dos partes en que queda dividido el triángulo.**



28) En un triángulo de 40 cm de base y 30 cm de altura, se trazan dos segmentos paralelos a la base que dividen a la altura, a partir del vértice, en tres partes que son entre sí como 3 : 7 : 5. Halla las áreas de las tres figuras



29) **Tenemos una parcela en forma de triángulo escaleno de 24 há. que se quiere dedicar a tres tipos de cultivo. Para ello se ha dividido la altura relativa a la base en tres partes iguales y se han trazado por las divisiones rectas paralelas a la base. Calcula la superficie de cada una de las figuras geométricas en que queda dividida la parcela.**

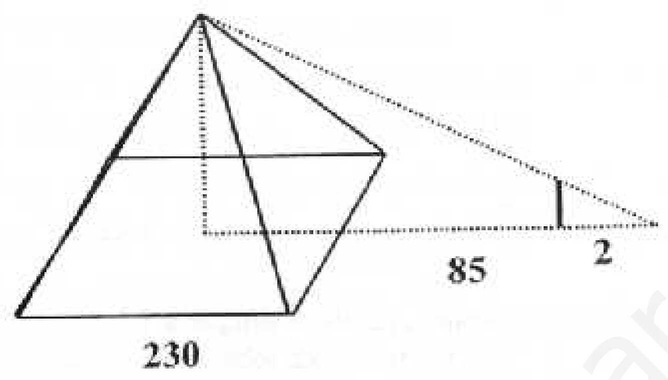


30) **En un triángulo isósceles de 12 cm de base y 10 cm de altura, se inscriben rectángulos, de forma que cada uno de ellos tenga uno de sus lados sobre la base del triángulo y dos de sus vértices sobre cada uno de los lados iguales del triángulo. Se pide:**
¿Qué área tendrá un rectángulo inscrito cuya base mida 2 cm?

SOLUCIONES

1) Sus lados son proporcionales y la razón de semejanza es $12/6 = 8/4 = 6/3 = 2$

2) La sombra forma, junto a la vertical desde la cúspide a la base de la pirámide, un triángulo rectángulo donde: $h/200 = 1{,}46/2$ de donde: $h = 146$ m.



3) Dado que DB y EC son paralelas, se cumplirá que $AB/BC = AD/DE$ Por lo que $AB/3{,}60 = 5/3$ de donde $AB = 6$ m.

4) $DC/CS = AB/BS$ así que $1{,}7 / 3 = AB/12$
y $AB = 6{,}8$ m.

5) La altura h de la antena cumplirá: $h / 2{,}54 = 50{,}4 / 4{,}21 \rightarrow h = 30{,}4$ m.

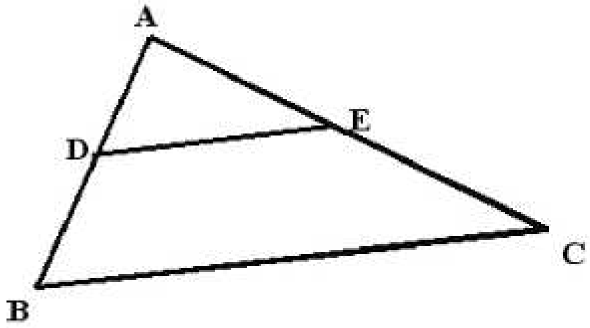
6) Los tres ángulos son iguales, sea por ser opuestos por el vértice (en E) o por estar comprendidos por una secante que corta a dos paralelas. Entonces $AB / CD = EB / EC \rightarrow AB / 6 = 24 / 8$ de donde $AB = 18$ m.

7) Si la sombra del árbol tiene una longitud s, es posible calcularla por el teorema de Pitágoras, dado que la altura del árbol (un cateto) vale 3 y la proyección desde la copa del árbol a donde acaba la sombra (hipotenusa) es 5. De ahí $5^2 = s^2 + 3^2 \rightarrow s = 4$
Así , si la altura del templo es h: $h / 6 = 3 / 4 \rightarrow h = 4{,}5$ m.

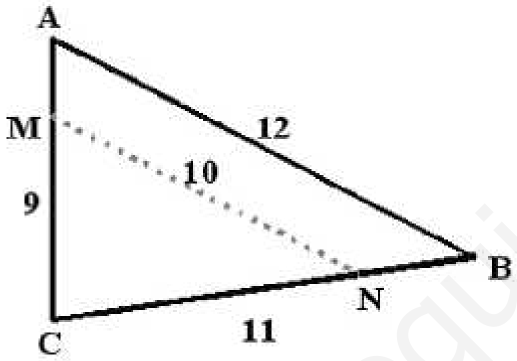
8) $AD / AB = AE / AC$ por el teorema de Tales, luego $6 / 9 = AE / 15 \rightarrow AE = 10$ luego resultará $EC = AC - AE = 15 - 10 = 5$ cm.

9) Dado que es un ángulo recto en D también lo será en B, luego el triángulo ABC es rectángulo. AC es la hipotenusa de ese triángulo. Para hallar su longitud bastaría saber BC (18) y AB.
Por el teorema de Tales, $AB / AD = BC / DE \rightarrow AB / 2 = 18 / 3 \rightarrow AB = 12$
De esa forma, $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 144 + 324 = 468 \rightarrow AC = 21{,}63$ cm

10) Por el teorema de Tales resultará que AD/AB = AE/AC de manera que 2 / 5 = AE / 7 AE = 2,8 metros



11) Si tienen el mismo ángulo A en el vértice significa que los otros dos ángulos son iguales entre ambos, en particular valdrá cada uno ½ (180 - A). Eso significa que tienen los tres ángulos correspondientes iguales y son, por tanto, semejantes.

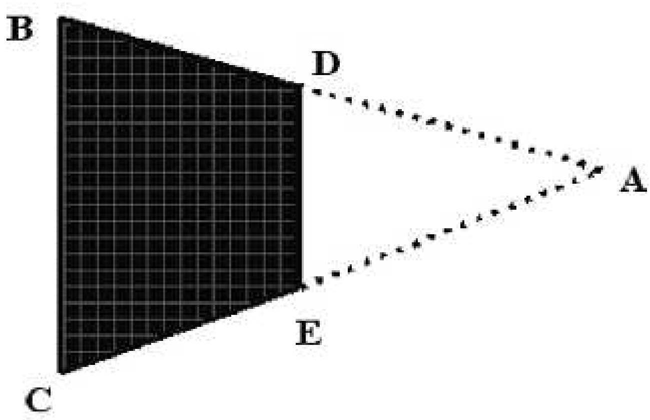


12) Los triángulos equiláteros son semejantes puesto que tienen los tres ángulos interiores iguales a 60º. Los rectángulos no porque sólo se garantiza que tienen un ángulo interior igual a 90º.

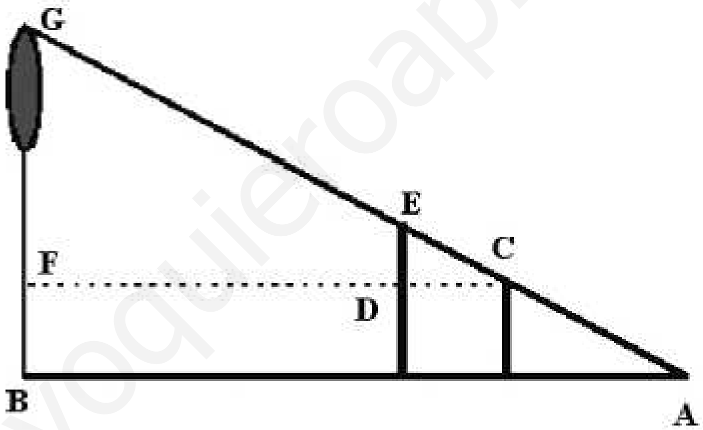
13) Por la consecuencia del teorema de Tales resultará que
CM/CA = CN/CB = MN/AB
Sustituyendo por sus valores conocidos: CM/9 = CN/11 = 10/12
de donde resultan los valores: CM = 7,5 cm CN = 9,16 cm
Consecuentemente, AM = 1,5 cm NB = 1,84 cm

14) BC = 24 m, DE = 16 m, BD = 6 m, CE = 10 m.
Se cumplirá por la consecuencia del teorema de Tales que:
AD/AB = DE/BC AD/AD+DB = DE/BC AD/AD+6 = 16/24 = 2/3

AD = 12 m. de donde AB = 18 m.
AE/AE+EC = DE/BC   AE/AE+10 = 16/24 = 2/3
AE = 20 m de donde   AC = 30 m.



15) Se puede formar el triángulo rectángulo, de manera que en él se cumplan las siguientes relaciones: CD/CF = ED/FG   de manera que se tenga: 0,6 / 1,96 = 0,8 / FG
dado que   CF = CD + DF y ED es igual a la diferencia entre la altura de los dos palos. Se deduce de esta manera que: FG = 2,61 m.   BG = BF + FG = 1,65 + 2,61 = 4,26 m.



16) La relación entre los lados del triángulo ABC nos indica que
AB/BC = 3/4 ;   AB/CA = 3/6 = ½   de donde   BC = 4 AB / 3   y   CA = 2 AB Como el perímetro de este triángulo viene dado,
AB + BC + CA = AB + 4 AB / 3 + 2 AB = AB (1 + 4/3 + 2) = 13 AB / 3   = 26
En consecuencia,   AB = 26 . 3 / 13 =   6 m   y los demás lados son BC = 8, CA = 12.
Si el lado correspondiente A'B' del triángulo es de 21, entonces la razón de semejanza será 21/6 que, aplicado a los otros dos lados da:
B'C' = 21 .8 / 6 = 28 m ;   C'A' = 21 . 12 / 6 = 42 m.

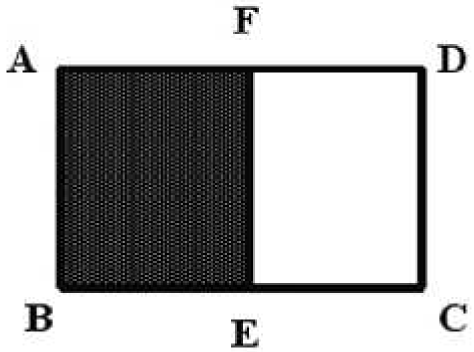
17) 7 mm ------ 10 kms
49 mm -----   x   x = 70 kms

18) 39 km ----- 1,5 cms
x ----- 1 cm $x = 26$ km Escala 1:2.600.000

19) 1 cm ----- 40 km
21,5 cm - x FT = 860 km Igualmente, TC = 1080 km FC = 1060 km

20) Con estos datos no se puede garantizar que sean semejantes porque $8/4 \neq 3/2$.

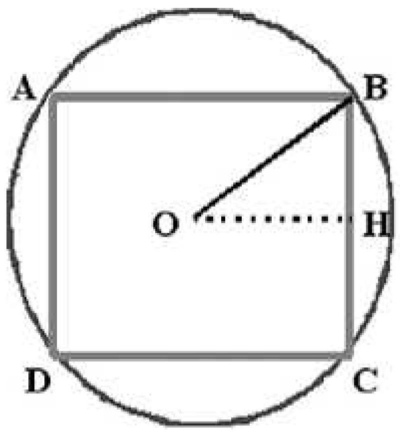
21) Al ser el rectángulo ABCD semejante al BEFA serán proporcionales sus lados de manera que AB/BC = BE/EF pero como EF coincide con AB, se tendrá: 8/10 = BE/8
Así que BE = 6,4 cms.



22) P = 5/2 . 13 = 32,5 mientras que en el caso del área será $A = (5/2)^2 \cdot 6 = 37{,}5$ ud^2

23) Área = $(2/3)^2 \cdot 60 = 26{,}66$ cm^2.

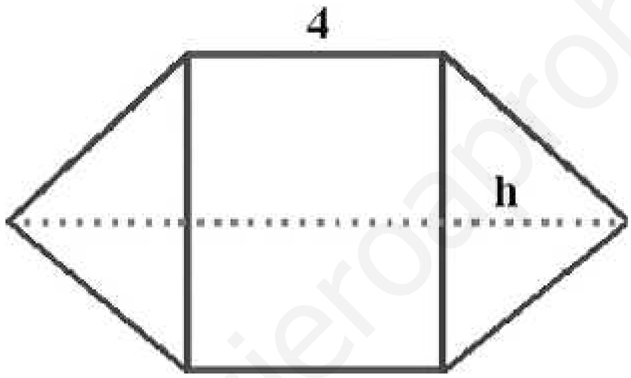
24) Se tiene el rectángulo ABCD sobre el plano. Al corresponder 1 m. del jardín real a 2 cms sobre el plano, significa que las dimensiones sobre dicho plano serán de
1 m ----- 2 cm
8 m ----- x AB = 16 cm Igualmente, BC = 12 cm



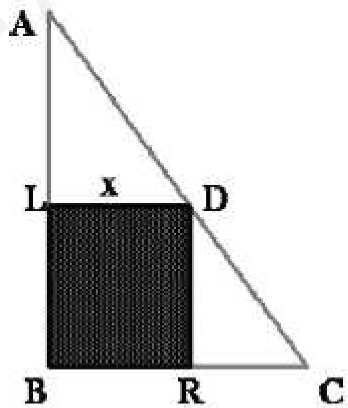
Si trazamos la semidiagonal OB siendo O el centro del rectángulo equidistante de sus vértices,

ésta constituirá el radio de la circunferencia pedida.
Su valor viene dado por el teorema de Pitágoras aplicado al triángulo OHB,
$OH^2 + HB^2 = OB^2 \quad \rightarrow \quad 8^2 + 6^2 = OB^2$
Dando OB = 10 cm y el área del círculo será Área = π . 102 = 314,16 cm^2

25) Si el lado del cuadrado es 4 en el plano, será necesario determinar la altura de uno de los triángulos equiláteros formados. Por el teorema de Pitágoras, será
$h^2 = 4^2 - 2^2 = 12 \qquad h = \sqrt{12}$
La longitud sobre el plano entre dos vértices será entonces: $d = 4 + 2 . \sqrt{12}$
Como la escala es 1:200 esa distancia será en la realidad, de:
$D = 200 (4 + 2 . \sqrt{12}) = 800 (1 + \sqrt{3}) = 2185,6$ cm = 21,85 m.
El área del jardín sobre el plano será igual al área del cuadrado (16 cm^2) más cuatro triángulos equiláteros, cada uno de ellos de área: $A = ½\, 4 . \sqrt{12} = 4 . \sqrt{3}$
Área sobre el plano = $16 + 4 . 4 . \sqrt{3} = 16 (1 + \sqrt{3}) = 43,71$ cm^2
y sobre la realidad: Área = $(200)^2 . 43,71 = 174,84$ m^2



26) Será resuelto mediante descomposición algebraica de las figuras en que se descompone el triángulo ABC.



Llamando x al lado del cuadrado deseado, resultarán las siguientes áreas:
Área ALD = $½\, x . (8 - x) = ½ (8x - x^2)$
Área DRC = $½\, x . (6 - x) = ½ (6x - x^2)$

Estas dos áreas, junto a la del cuadrado igual a x^2 debe ser igual al área total del triángulo que también puede ser conocida: Área ABC = ½ 6 . 8 = 24

De modo que: $\frac{1}{2}(8x - x^2) + \frac{1}{2}(6x - x^2) + x^2 = 24$

7 x = 24 x = 24/7 = 3,42 cm

27) En el triángulo ACH se cumplirá que EH'/CH = AH'/AH = 1/3 de donde CH = 3 EH'
En el triángulo ABH también DH'/BH = AH'/AH = 1/3 lo que lleva a BH = 3 DH'
es decir: BC + CH = 3 (DE + EH')
4 + 3 EH' = 3 (DE + EH') = 3 DE + 3 EH'
4 = 3 DE así que DE = 4/3
Las áreas a calcular serán por tanto:
Área (ADE) = ½ 4/3 . 2 = 4/3 dado que AH' = 2
Área (ABC) = ½ 4 . 6 = 12
Así que Área (DECB) = 12 - 4/3 = 10 2/3

28) Por un método similar al anterior, resultan las áreas 37,5 ; 229,1 ; 333,4 cm2

29) En el triángulo será B h / 2 = 24 de donde B h = 48. Si las bases de los tres triángulos formados son, de abajo a arriba B, b2 y b1 resultará que el triángulo grande es semejante al pequeño de base b1 luego:
B / b1 = h / 1/3 h → b1 = 1/3 B Del mismo modo b2 = 2/3 B así que las superficies serán:
Triángulo pequeño superior: 1/3 B 1/3 h = 1/9 B h = 48 / 9 = 5 1/3 há.
Triángulo de base b2 : 2/3 B 2/3 h = 4/9 B h de donde el trapecio medio tendrá por área:
4/9 . 48 – 1/9 . 48 = 3/9 . 48 = 16 há.
Trapecio inferior: 48 – 16 – 5 1/3 = 26 2/3 há.

30) Consideremos el triángulo isósceles que contiene un rectángulo inscrito en él de alto x y ancho 2. Si tomamos sólo la mitad de ese triángulo tendremos otro rectángulo de base 6 y altura 10 en el que está inscrito un rectángulo de altura x y anchura 1.
Se cumplirá en él: 10 – x / 10 = 1/6 → 6 (10-x) = 10 → x = 50/6 = 8,4
De donde el área del rectángulo completo será: 2 . 8,4 = 16,8