

# 9 Proporcionalidad geométrica

## INTRODUCCIÓN

El estudio de la proporcionalidad geométrica y la semejanza de figuras es algo complejo para los alumnos de este nivel educativo.

Comenzamos la unidad recordando y diferenciando los conceptos básicos de las aplicaciones lineales (recta, segmento y polígono), que son el paso previo al estudio de la proporcionalidad de segmentos y a la aplicación de los criterios de semejanza de figuras, en particular de los triángulos.

Se proponen problemas sencillos de segmentos iguales y proporcionales que se originan a partir de rectas paralelas, para continuar resolviendo problemas de semejanza de figuras. Será más conveniente incidir en los criterios de semejanza de triángulos que enunciar directamente el teorema de Tales y sus aplicaciones.

Destacamos la importancia de saber interpretar una escala en un mapa o en un plano, subrayando la relación entre la distancia que medimos en centímetros o milímetros y estableciendo la distancia real.

## RESUMEN DE LA UNIDAD

- Una *recta* está formada por infinitos puntos; no tiene ni principio ni final. Por dos puntos siempre pasa una recta.
- Una *semirrecta* es una recta que tiene principio pero no final.
- Un *segmento* está delimitado por dos puntos.
- Un *polígono* es una figura formada por una línea poligonal cerrada. Está compuesto por varios elementos: diagonales, ángulos, lados y vértices.
- La *suma de los ángulos* de un polígono de  $n$  lados es:  $180^\circ \cdot (n - 2)$ .
- El cociente entre la medida de dos segmentos es su *razón*. Dos segmentos son proporcionales si tienen la misma razón.
- Varias rectas paralelas cortadas por rectas secantes forman *segmentos proporcionales* entre sí.
- Dos *triángulos* son *semejantes* si tienen los tres ángulos iguales, los tres lados proporcionales, o si tienen dos lados proporcionales y el ángulo que forman igual.
- Mediante la *escala numérica y gráfica* podemos calcular distancias de planos y mapas. La medida que calculamos en el mapa (cm) equivale a una distancia real (km).

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Calcular la razón de dos segmentos.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Recta, semirrecta y segmento.</li> <li>• El polígono y sus elementos. Suma de los ángulos de un polígono.</li> <li>• Razón de dos segmentos. Segmentos proporcionales.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Trazado de rectas, semirrectas y segmentos.</li> <li>• Identificación de polígonos y sus elementos. Triangulación de polígonos.</li> <li>• Cálculo de la razón de dos segmentos. Construcción de segmentos proporcionales.</li> </ul>
2. Aplicar los criterios de semejanza de segmentos y triángulos.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Segmentos iguales y proporcionales de rectas paralelas.</li> <li>• División de un segmento en partes iguales.</li> <li>• Semejanza de triángulos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Identificación de segmentos proporcionales en rectas paralelas.</li> <li>• Expresión gráfica de la división de un segmento en partes iguales.</li> <li>• Aplicación de los criterios de semejanza de triángulos. Resolución de problemas.</li> </ul>
3. Leer e interpretar escalas en planos y mapas.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Concepto de escala.</li> <li>• Escala numérica y escala gráfica.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Interpretación del significado de la escala.</li> <li>• Cálculo de distancias. Resolución de problemas.</li> </ul>

# 9 OBJETIVO 1

## CALCULAR LA RAZÓN DE DOS SEGMENTOS

NOMBRE: \_\_\_\_\_ CURSO: \_\_\_\_\_ FECHA: \_\_\_\_\_

### RECTA, SEMIRRECTA Y SEGMENTO

- Una **recta** es una línea continua formada por infinitos puntos, que no tiene ni principio ni final.

– Dos puntos definen una recta.

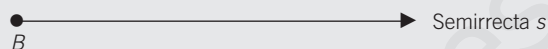
– Por un punto pasan infinitas rectas.



- Una **semirrecta** es una recta que tiene principio pero no final.

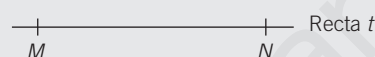
Un punto cualquiera forma dos semirrectas

sobre cada línea o dirección.



- Un **segmento** es la porción o parte de una recta delimitada por dos puntos.

Los puntos  $M$  y  $N$  forman el segmento  $MN$ .



- 1** Indica debajo de cada figura su nombre: recta, semirrecta o segmento.



- 2** Dibuja dos puntos cualesquiera,  $P$  y  $T$ , y traza una recta  $m$  que pase por ellos.

- 3** Dibuja un punto  $A$ , traza varias rectas que pasen por él y nómbralas con letras diferentes ( $r$ ,  $s$ ,  $t$ ...).

- 4** Considera un punto  $F$  y traza dos semirrectas,  $m$  y  $n$ , que tengan su origen en él.

- 5** Dibuja cuatro segmentos,  $AB$ ,  $MN$ ,  $PT$  y  $XY$ , de medidas 3, 6, 8 y 10 cm, respectivamente.

a)  $AB$

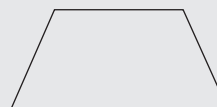
c)  $PT$

b)  $MN$

d)  $XY$

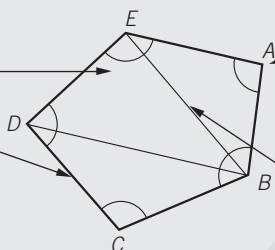
**POLÍGONOS**

- Varios segmentos unidos entre sí forman una **línea poligonal**. Una línea poligonal cerrada es un polígono.
- Un **polígono** es una figura plana delimitada por una línea poligonal cerrada.

**Línea poligonal abierta****Polígono (línea poligonal cerrada)****Elementos de un polígono**

Los **ángulos** son las regiones que forman los lados al cortarse. Se escriben así:  $\hat{E}$ .

Los **lados** son los segmentos que limitan el polígono. La suma de las longitudes de los lados se llama **perímetro**.



Los **vértices** son los puntos donde se cortan los lados. Se nombran con una letra mayúscula.

Las **diagonales** son los segmentos que unen dos vértices no consecutivos.

- 6 Con segmentos de medidas 1, 2, 3 y 4 cm, respectivamente, dibuja una línea poligonal abierta y un polígono.

a) Línea poligonal

b) Polígono

- 7 Piensa en cuatro objetos con forma de polígono y dibújalos.

a) Pizarra

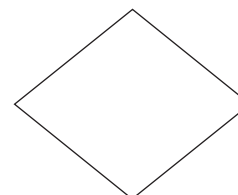
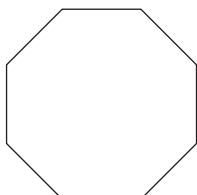
c)



b)

d)

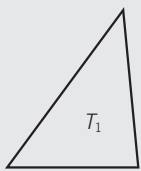
- 8 Señala y nombra los vértices y lados de los polígonos, y dibuja los ángulos y las diagonales.



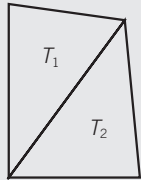
# 9

## SUMA DE LOS ÁNGULOS DE UN POLÍGONO

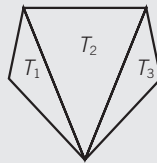
- Sabemos que la suma de los ángulos de un triángulo es  $180^\circ$ . Por eso, para hallar la suma de los ángulos de un polígono debemos proceder a su triangulación, mediante el trazado de diagonales desde uno de los vértices del polígono.
- La **suma de los ángulos de un polígono** se calcula sumando  $180^\circ$  tantas veces como triángulos tenga el polígono.



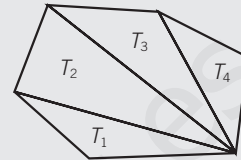
$$T_1 = 180^\circ$$



$$T_1 + T_2 = 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$$



$$T_1 + T_2 + T_3 = 180^\circ + 180^\circ + 180^\circ = 540^\circ$$

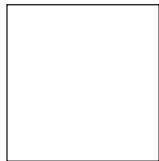


$$T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = 180^\circ + 180^\circ + 180^\circ + 180^\circ = 720^\circ$$

- Polígono de 3 lados:  $180^\circ \cdot (3 - 2) = 180^\circ \cdot 1 = 180^\circ$
- Polígono de 4 lados:  $180^\circ \cdot (4 - 2) = 180^\circ \cdot 2 = 360^\circ$
- Polígono de 5 lados:  $180^\circ \cdot (5 - 2) = 180^\circ \cdot 3 = 540^\circ$
- Polígono de 6 lados:  $180^\circ \cdot (6 - 2) = 180^\circ \cdot 4 = 720^\circ$
- Polígono de 7 lados:  $180^\circ \cdot (7 - 2) = 180^\circ \cdot 5 = 900^\circ$
- Polígono de  $n$  lados:  $180^\circ \cdot (n - 2)$

- 9 Realiza la triangulación de estos polígonos, coloréalos y señala los triángulos que se forman.

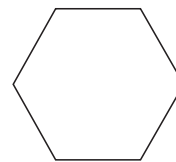
a) Cuadrado



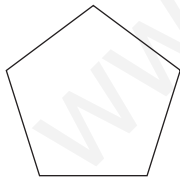
b) Rectángulo



c) Hexágono

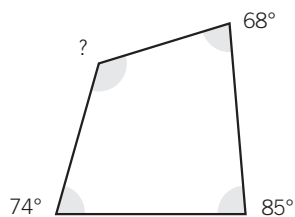


- 10 Calcula el valor de cada uno de los ángulos de un pentágono regular.

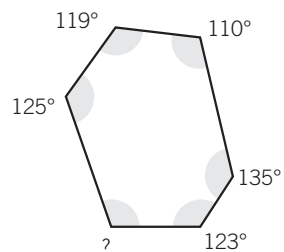


- 11 Halla el valor del ángulo que falta en cada caso.

a)



b)



**RAZÓN DE DOS SEGMENTOS**

La razón de dos segmentos es el número que resulta de dividir sus longitudes.

**EJEMPLO**

Sean los segmentos  $a$  y  $b$ , de longitudes 3 cm y 5 cm. Halla su razón.



La razón de  $a$  y  $b$  es:  $\frac{a}{b} = \frac{3}{5} = 0,6$ .

- 12** Dibuja dos segmentos,  $m$  y  $n$ , de longitudes 3 cm y 4 cm, respectivamente. Halla su razón.

- 13** La razón de dos segmentos,  $a$  y  $b$ , es 0,5. Si  $a$  mide 2 cm, calcula el valor de  $b$ . Dibuja los segmentos.

$$\frac{a}{b} = 0,5 \quad \frac{2}{b} = 0,5$$

- 14** La razón de dos segmentos,  $m$  y  $n$ , es 0,75. Si  $n$  mide 4 cm, calcula el valor de  $m$ . Dibuja los segmentos.

$$\frac{m}{n} = 0,75$$

**SEGMENTOS PROPORCIONALES**

Si la razón de dos segmentos,  $a$  y  $b$ , es la misma que la de otros dos segmentos,  $c$  y  $d$ , se dice que

los segmentos son proporcionales, se escribe:  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  y se cumple que  $a \cdot d = b \cdot c$ .

- 15** Los segmentos  $a$  y  $b$  miden 3 cm y 4 cm, y los segmentos miden  $c$  y  $d$ , 6 cm y 8 cm. Dibújalos y comprueba que son proporcionales.

- 16** Dos segmentos,  $a$  y  $b$ , miden 4 cm y 5 cm y son proporcionales a otros dos segmentos  $c$  y  $d$ . Si el segmento  $c$  mide 8 cm, calcula el valor del segmento  $d$ .

# 9 OBJETIVO 2

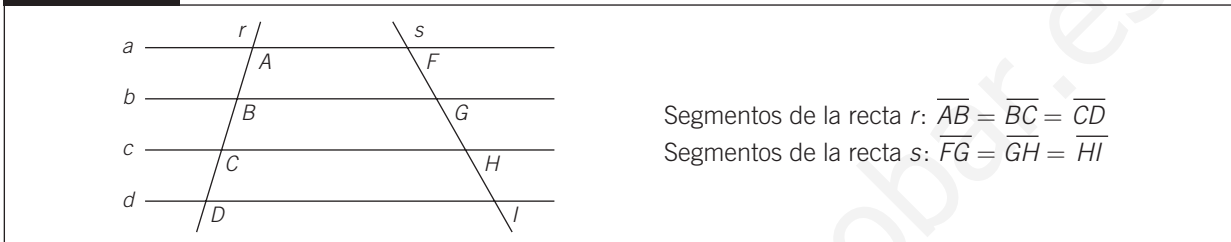
## APLICAR LOS CRITERIOS DE SEMEJANZA DE SEGMENTOS Y TRIÁNGULOS

NOMBRE: \_\_\_\_\_ CURSO: \_\_\_\_\_ FECHA: \_\_\_\_\_

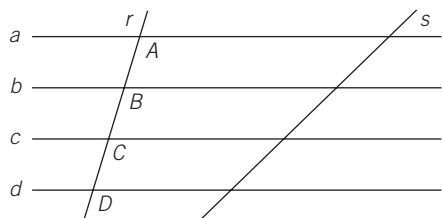
### SEGMENTOS IGUALES DE RECTAS PARALELAS

- Dibujamos cuatro rectas paralelas que estén a la misma distancia entre sí:  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$ .
- Las cortamos por dos rectas secantes,  $r$  y  $s$ , que forman segmentos en ambos lados.
- Los segmentos que se originan en la recta  $r$  son iguales entre sí y los segmentos que se originan en la recta  $s$  también lo son.

### EJEMPLO



### 1 Fíjate en el siguiente dibujo.



- Nombra los segmentos que se originan al trazar la recta  $s$ .
- Verifica que  $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$ .
- Comprueba lo mismo para los segmentos de la recta  $s$ .

### 2 Sobre las rectas, $f$ y $g$ , traza cuatro rectas paralelas que estén a una distancia de 1,5 cm entre sí.

- Nombra los segmentos que se originan al cortar las paralelas en  $f$  y  $g$ .
- Comprueba que los segmentos que se forman en cada recta son iguales.

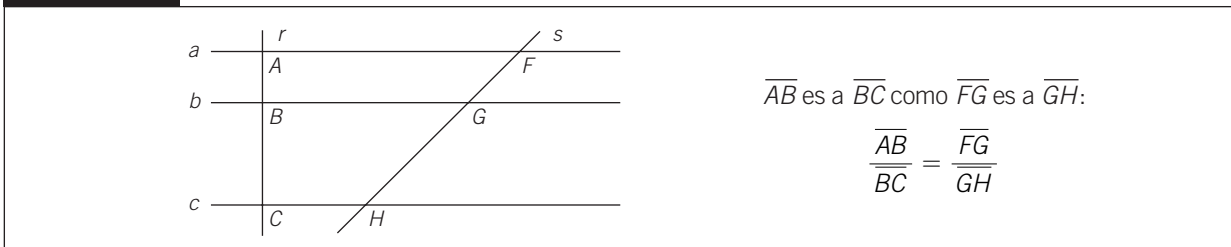
$f$  \_\_\_\_\_

$g$  \_\_\_\_\_

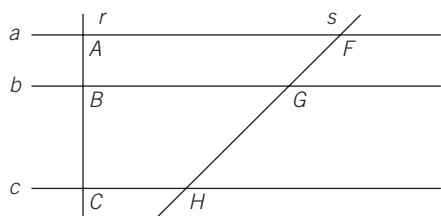
### SEGMENTOS PROPORCIONALES DE RECTAS PARALELAS

- Dibujamos varias rectas paralelas:  $a$ ,  $b$  y  $c$ .
- Las cortamos por dos rectas secantes,  $r$  y  $s$ , que forman segmentos en ambos lados.
- Los segmentos que originan las rectas  $r$  y  $s$  son proporcionales entre sí.

### EJEMPLO

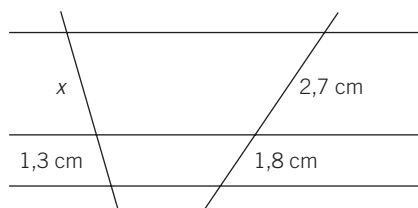


- 3 Fíjate en el dibujo y halla el valor del segmento  $GH$ .

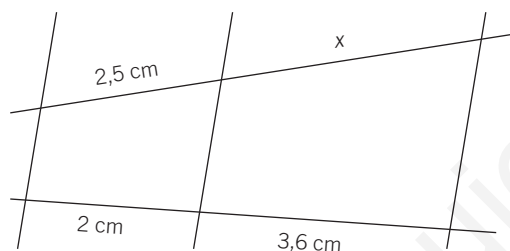


$$\begin{aligned} \overline{AB} &= 2 \text{ cm} & \overline{FG} &= 2,5 \text{ cm} \\ \overline{BC} &= 4 \text{ cm} & \overline{GH} &= ? \end{aligned}$$

- 4 Nombra los segmentos con letras mayúsculas y las rectas con minúsculas, y calcula el valor del segmento  $x$ .



- 5 Calcula el valor del segmento que falta. Nombra los segmentos y las rectas.



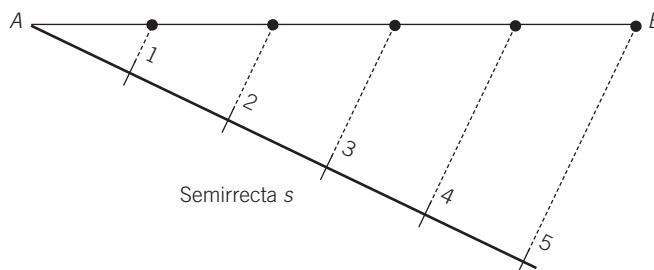
### DIVIDIR UN SEGMENTO $AB$ EN PARTES IGUALES

Seguimos estos pasos.

- 1.º Trazamos una semirrecta ( $s$ ) con origen en  $A$  y señalamos en ella tantos segmentos (1-5) iguales y consecutivos (de la medida que mejor nos parezca) como partes sean.
- 2.º Unimos el último segmento (5) con el extremo  $B$ .
- 3.º Trazamos paralelas a este y quedan señaladas las partes iguales en  $AB$ .

### EJEMPLO

Divide el segmento  $AB$  en 5 partes iguales.



## 9

- 6 Divide el segmento  $MN$  en 7 partes iguales.



- 7 Divide un segmento de 6 cm en ocho partes iguales.

### SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

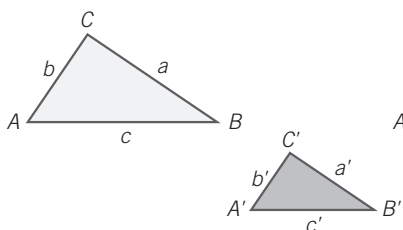
Dos triángulos son semejantes si se cumple cualquiera de estas condiciones.

- 1.<sup>a</sup> Tener los **tres lados proporcionales**.
- 2.<sup>a</sup> Tener los **tres ángulos iguales**.
- 3.<sup>a</sup> Tener **dos lados proporcionales y el ángulo que forman igual**.

### EJEMPLO

#### Primer criterio

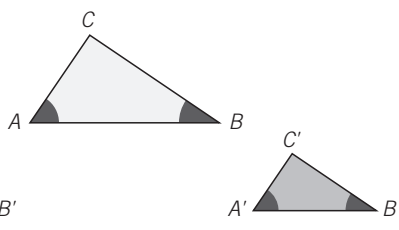
Dos triángulos son semejantes si tienen sus lados proporcionales.



$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

#### Segundo criterio

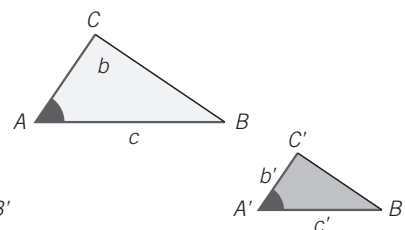
Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos iguales.



$$\begin{aligned} \widehat{A} &= \widehat{A'}; \widehat{B} = \widehat{B'} \\ \widehat{C} &= 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{B} = \widehat{C'} \end{aligned}$$

#### Tercer criterio

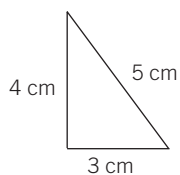
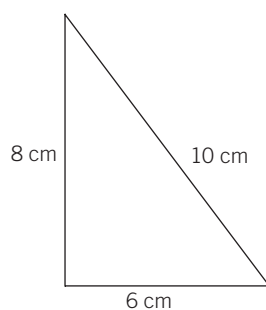
Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo igual y los lados que lo forman son proporcionales.



$$\widehat{A} = \widehat{A'}; \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$



- 8 La medida de los lados de los siguientes triángulos es:



- Nombra los lados de cada triángulo.
- Comprueba que son semejantes.
- ¿Qué criterio has aplicado?

- 9 En un triángulo conocemos los siguientes datos.

$$\text{Lado } AG = 4 \text{ cm} \quad \text{Lado } GC = 6 \text{ cm} \quad \widehat{G} = 60^\circ$$

Y en otro triángulo conocemos:

$$\text{Lado } DE = 8 \text{ cm} \quad \text{Lado } EF = 12 \text{ cm} \quad \widehat{E} = 60^\circ$$

- Comprueba si son semejantes.
- Indica el criterio aplicado.
- Realiza un dibujo representativo.

- 10 Dos triángulos rectángulos tienen un ángulo agudo común que mide  $40^\circ$ .

- ¿Son semejantes? ¿Por qué?
- Realiza un dibujo representativo.

- 11 Los lados de un triángulo miden 3 cm, 5 cm y 9 cm. Indica las medidas de un triángulo semejante al primero. Razona tu respuesta y realiza un dibujo representativo.

- 12 El ángulo de un triángulo mide  $75^\circ$ , y los lados que lo forman,  $AC = 4$  y  $CD = 6$  cm. ¿Cuál de las siguientes opciones correspondería a un triángulo semejante al dado? Razona tu respuesta y realiza un dibujo representativo.

- Ángulo =  $65^\circ$ ; lados  $MH = 8$  cm y  $HN = 10$  cm.
- Ángulo =  $75^\circ$ ; lados  $MH = 8$  cm y  $HN = 10$  cm.
- Ángulo =  $75^\circ$ ; lados  $MH = 8$  cm y  $HN = 12$  cm.
- Ángulo =  $90^\circ$ ; lados  $MH = 8$  cm y  $HN = 12$  cm.

# 9 OBJETIVO 3

## LEER E INTERPRETAR ESCALAS EN PLANOS Y MAPAS

NOMBRE: \_\_\_\_\_ CURSO: \_\_\_\_\_ FECHA: \_\_\_\_\_

### ESCALA DE UN PLANO O MAPA

- Las distancias y tamaños de los planos y mapas están reducidos, de manera que se pueden observar fácilmente.
- Los valores son proporcionales a la distancia o tamaño real.
- Mediante la **escala** relacionamos la distancia o el tamaño que hay en un plano o mapa con la distancia o tamaño reales.

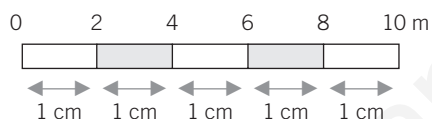
$$\text{Escala} = \frac{\text{Distancia o tamaño sobre el plano o mapa}}{\text{Distancia o tamaño en la realidad}}$$

### EJEMPLO

#### Escala numérica 1:300

1 cm del dibujo, plano o mapa equivale a 300 cm de la realidad (300 cm = 3 m).

#### Escala gráfica



Según esta escala:

5 cm del dibujo, plano o mapa equivalen a 10 m de la realidad.

1 cm del dibujo, plano o mapa equivale a 2 m de la realidad.

### 1 Completa la siguiente tabla.

ESCALA	DISTANCIA EN EL MAPA O PLANO	DISTANCIA REAL (cm)	DISTANCIA REAL (m)
1:100			
1:2.000			
1:20.000			
1:350.000			
1:2.000.000			

### 2 Expresa, mediante una escala numérica y una escala gráfica.

a) 1 cm en el plano equivale a 2 km en la realidad.

*Escala numérica*

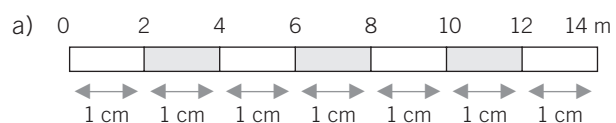
*Escala gráfica*

b) 1 cm en el plano equivale a 25 km en la realidad.

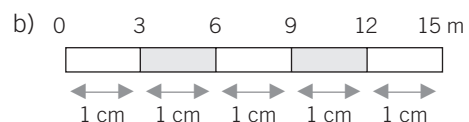
*Escala numérica*

*Escala gráfica*

3 Según las siguientes escalas, completa las equivalencias.



ESCALA GRÁFICA	REALIDAD (m)
1 cm	
2 cm	
5 cm	
10 cm	



ESCALA GRÁFICA	REALIDAD (km)
1 cm	
3 cm	
5 cm	
12 cm	

4 Un mapa de carreteras está elaborado a escala 1 : 200.000.

a) ¿Qué significa esto?

b) Una distancia de 4 cm en el mapa, ¿cuántos metros y kilómetros son en la realidad?

5 El plano de una casa está dibujado a escala 1 : 100. Si una habitación en el plano mide  $3 \times 4$  cm, ¿cuánto medirá en la realidad?

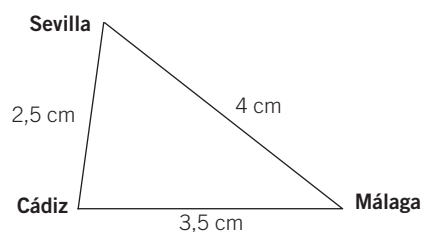
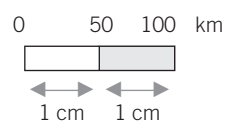
Si en el plano 1 cm  $\xrightarrow{\text{mide}}$  100 cm reales }  
 en el plano 3 cm  $\xrightarrow{\text{medirá}}$  x cm reales }

6 Considera la distancia en línea recta entre las siguientes ciudades en un plano. Halla la distancia real en km entre:

a) Sevilla-Cádiz

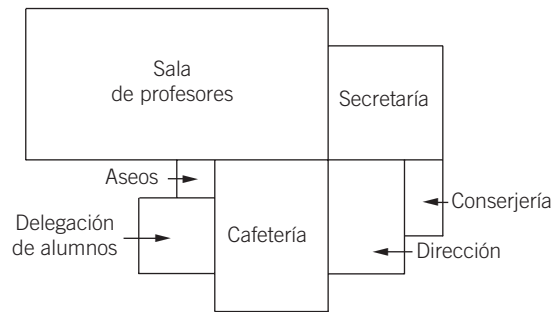
b) Sevilla-Málaga

c) Cádiz-Málaga



# 9

- 7 La planta baja del instituto viene representada por el siguiente plano.



Calcula las medidas reales de cada dependencia, sabiendo que la escala es 1 : 400.

DEPENDENCIA	MEDIDAS EN PLANO (cm)	MEDIDAS REALES (m)
Secretaría		
Sala de profesores		
Conserjería		
Dirección		
Cafetería		
Delegación de alumnos		
Aseos		

- 8 Halla la distancia que recorre Luisa para ir al instituto, si el plano está hecho a escala 1 : 4.000.

