1. **[1 punto]** Realiza las siguientes operaciones con potencias factorizando y usando las propiedades de las mismas. ***Expresa el resultado, en forma de una única potencia o de producto de potencias de exponente entero***.

$$\text{a) } 8^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} \cdot 16^{-2} \ \ ; \ \text{b) } \frac{6^4 \cdot 9^2 \cdot 6^{-5} \cdot 3^2}{18^3 \cdot 2^{-5} \cdot 3^{-3}}$$

2. **[1 punto]** ***Simplifica al máximo*** cada expresión con radicales. Si es posible, extrae factores del resultado final.

$$\text{a) } \sqrt{\sqrt[4]{16 \cdot \sqrt[3]{16}}} \ \ ; \ \text{b) } 4\sqrt{8} + 3\sqrt{18} + 2\sqrt{32} - \sqrt{50}$$

3. **[1 punto]** Racionaliza las siguientes expresiones con radicales y simplifica todo lo que se pueda el resultado.

$$\text{a) } \frac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \ \ ; \ \text{b) } \frac{10}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

4. **[1 punto]** Realiza la siguiente operación paso a paso y ***expresa el resultado en notación científica***.
Nota. No es válido dar el resultado final utilizando la calculadora. Si lo haces, es sólo para comprobar que el resultado es correcto.

$$\frac{5 \cdot 10^{-4} \cdot \left(2{,}31 \cdot 10^{-5} + 0{,}9 \cdot 10^{-6}\right)}{0{,}2 \cdot 10^{-9}}$$

5. **[1 punto]** Halla el valor de x en cada uno de los apartados (***dar valores exactos, no se admiten soluciones con decimales***). Para ello, procede de manera razonada haciendo uso de la definición de logaritmo o de las propiedades de los logaritmos.

$$\text{a) } \log_2(12-4x) = 3 \ \ ; \ \text{b) } \log x = 4\log 2 - 2\log 3$$

6. **[3 puntos]** Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\text{a) } \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} = \frac{1}{4} \ \ ; \ \text{b) } \sqrt{x-1} + 1 = x - 2$$

7. **[2 puntos]** Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x^2 + 3xy = 0 \end{cases}$$

Soluciones

1. **[1 punto]** Realiza las siguientes operaciones con potencias factorizando y usando las propiedades de las mismas. ***Expresa el resultado, en forma de una única potencia o de producto de potencias de exponente entero***.

   a) $8^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} \cdot 16^{-2} = \left(2^3\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} \cdot \left(2^4\right)^{-2} = 2^6 \cdot \left(2^{-2}\right)^3 \cdot \left(2^{-1}\right)^{-4} \cdot 2^{-8} =$
   $= 2^6 \cdot 2^{-6} \cdot 2^4 \cdot 2^{-8} = 2^{6-6+4-8} = 2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$

   b) $\frac{6^4 \cdot 9^2 \cdot 6^{-5} \cdot 3^2}{18^3 \cdot 2^{-5} \cdot 3^{-3}} = \frac{(2\cdot 3)^4 \cdot \left(3^2\right)^2 \cdot (2\cdot 3)^{-5} \cdot 3^2}{\left(2\cdot 3^2\right)^3 \cdot 2^{-5} \cdot 3^{-3}} = \frac{2^4 \cdot 3^4 \cdot 3^4 \cdot 2^{-5} \cdot 3^{-5} \cdot 3^2}{2^3 \cdot 3^6 \cdot 2^{-5} \cdot 3^{-3}} = \frac{2^{-1} \cdot 3^5}{2^{-2} \cdot 3^3} =$
   $= 2^{-1-(-2)} \cdot 3^{5-3} = 2^1 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18$.

2. **[1 punto]** ***Simplifica al máximo*** cada expresión con radicales. Si es posible, extrae factores del resultado final.

   a) $\sqrt{\sqrt[4]{16 \cdot \sqrt[3]{16}}} = \sqrt{\sqrt[4]{2^4 \cdot \sqrt[3]{2^4}}} = \sqrt{\sqrt[4]{\sqrt[3]{2^{12} \cdot 2^4}}} = \sqrt[24]{2^{16}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$.

   b) $4\sqrt{8} + 3\sqrt{18} + 2\sqrt{32} - \sqrt{50} = 4\sqrt{2^3} + 3\sqrt{2\cdot 3^2} + 2\sqrt{2^5} - \sqrt{2\cdot 5^2} =$
   $= 4\cdot 2\sqrt{2} + 3\cdot 3\sqrt{2} + 2\cdot 2^2\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2} + 9\sqrt{2} + 8\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 20\sqrt{2}$.

3. **[1 punto]** Racionaliza las siguientes expresiones con radicales y simplifica todo lo que se pueda el resultado.

   a) $\frac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\left(2+\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}+2}{2\cdot 2} = \frac{2\sqrt{2}+2}{4} = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$.

   b) $\frac{10}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{10\cdot\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)} = \frac{10\cdot\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(2\sqrt{3}\right)^2 - \sqrt{2}^2} = \frac{10\cdot\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{12-2} =$
   $\frac{10\cdot\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{10} = 2\sqrt{3}+\sqrt{2}$

4. **[1 punto]** Realiza la siguiente operación paso a paso y ***expresa el resultado en notación científica***.
   Nota. No es válido dar el resultado final utilizando la calculadora. Si lo haces, es sólo para comprobar que el resultado es correcto.

$$\frac{5\cdot 10^{-4}\cdot\left(2,31\cdot 10^{-5}+0,9\cdot 10^{-6}\right)}{0,2\cdot 10^{-9}} = \frac{5\cdot 10^{-4}\cdot\left(23,1\cdot 10^{-6}+0,9\cdot 10^{-6}\right)}{0,2\cdot 10^{-9}} = \frac{5\cdot 10^{-4}\cdot 24\cdot 10^{-6}}{0,2\cdot 10^{-9}} = \frac{120\cdot 10^{-10}}{0,2\cdot 10^{-9}} =$$
$$= 600\cdot 10^{-1} = 6,00\cdot 10^{1}.$$

5. **[1 punto]** Halla el valor de x en cada uno de los apartados (***dar valores exactos, no se admiten soluciones con decimales***). Para ello, procede de manera razonada haciendo uso de la definición de logaritmo o de las propiedades de los logaritmos.

   a) $\log_2(12-4x) = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 12-4x \Leftrightarrow 8 = 12-4x \Leftrightarrow 4x = 4 \Leftrightarrow x = 1$.

   b) $\log x = 4\log 2 - 2\log 3 \Leftrightarrow \log x = \log 2^4 - \log 3^2 \Leftrightarrow \log x = \log\frac{2^4}{3^2} \Leftrightarrow \log x = \frac{16}{9} \Leftrightarrow x = \frac{16}{9}$.

6. **[3 puntos]** Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}=\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 8x-12=x^2 \Leftrightarrow x^2-8x+12=0$.

El discriminante de esta ecuación es $\Delta=(-8)^2-4\cdot 1\cdot 12=64-48=16$.

Por tanto: $x=\dfrac{8\pm 4}{2}=\begin{cases} x_1=\dfrac{12}{2}\Rightarrow x_1=6 \\ x_2=\dfrac{4}{2}\Rightarrow x_2=2 \end{cases}$.

b) $\sqrt{x-1}+1=x-2 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}=x-3 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1}\right)^2=(x-3)^2 \Leftrightarrow x-1=x^2-6x+9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-7x+10=0$. El discriminante de esta ecuación es $\Delta=(-7)^2-4\cdot 1\cdot 10=49-40=9$. Por tanto:

$x=\dfrac{7\pm 3}{2}=\begin{cases} x_1=\dfrac{10}{2}\Rightarrow x_1=5 \\ x_2=\dfrac{4}{2}\Rightarrow x_2=2 \end{cases}$. Hagamos la comprobación, por si alguna de ellas no fuera solución.

- Si $x=5$, entonces $\sqrt{5-1}+1=5-2 \Leftrightarrow \sqrt{4}+1=3 \Leftrightarrow 2+1=3 \Leftrightarrow 3=3$.
- Si $x=2$, entonces $\sqrt{2-1}+1=2-2 \Leftrightarrow \sqrt{1}+1=0 \Leftrightarrow 1+1=0 \Leftrightarrow 2=0$.

De lo anterior deducimos que $x=5$ es la única solución de la ecuación. $x=2$ no es solución porque produce una contradicción al sustituir en la ecuación original.

7. **[2 puntos]** Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$\begin{cases} 2x-y=1 \\ x^2+3xy=0 \end{cases}$. Despejando y de la primera ecuación tenemos: $y=2x-1$. Sustituyendo este valor en la segunda:

$$x^2+3x(2x-1)=0 \Rightarrow x^2+6x^2-3x=0 \Rightarrow 7x^2-3x=0 \Rightarrow x(7x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\dfrac{3}{7} \end{cases}.$$

Si $x=0 \Rightarrow y=2\cdot 0-1 \Rightarrow y=-1$.

Si $x=\dfrac{3}{7} \Rightarrow x=2\cdot\dfrac{3}{7}-1 \Rightarrow x=\dfrac{6}{7}-1 \Rightarrow x=-\dfrac{1}{7}$.