1. **[1,5 puntos]** Realiza las siguientes operaciones con potencias. ***Expresa el resultado, en forma de una única potencia o de producto de potencias de exponente entero***.

$$\text{a) } \frac{5^3}{\left(5^{-2}\right)^3\cdot 5} \;;\; \text{b) } \frac{4^4\cdot 8^{-1}\cdot 16^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot 8^6} \;;\; \text{c) } \frac{25^2\cdot 5^{-2}\cdot 5^3\cdot 45^2}{\left(5^3\right)^2\cdot 27\cdot 3^{-2}}$$

2. **[1,5 puntos]** ***Simplifica al máximo*** cada expresión con radicales. Si es posible, extrae factores del resultado final.

$$\text{a) } \sqrt{2}\cdot\left(\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[3]{4}\right)^3 \;;\; \text{b) } \sqrt{3\sqrt[3]{3}}\cdot\sqrt[3]{81} \;;\; \text{c) } \sqrt{5}+\sqrt{45}+\sqrt{180}-\sqrt{80}$$

3. **[2 puntos]** Racionaliza las siguientes expresiones con radicales y simplifica todo lo que se pueda el resultado.

$$\text{a) } \frac{3\sqrt{27}-\sqrt{12}}{2\sqrt{3}} \;;\; \text{b) } \frac{-2\left(1-\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}-1}$$

4. **[1 punto]** Expresa mediante intervalos los valores de x que satisfacen las siguientes desigualdades con valores absolutos.

$$\text{a) } \left|1-2x\right|<3 \;;\; \text{b) } \left|\frac{3x}{2}-\frac{1}{4}\right|\geq\frac{1}{2}$$

5. **[1,5 puntos]** Calcula el valor final de cada expresión. Para ello, procede de manera razonada haciendo uso de la definición de logaritmo o de las propiedades de los logaritmos.

$$\text{a) } \log_3\sqrt{27} \;;\; \text{b) } \log_2\frac{1}{\sqrt{2}} \;;\; \text{c) } \log_4 16+\log_2\sqrt{32}-\log_5 1$$

6. **[1,5 puntos]** Halla el valor de x en cada uno de los apartados. Como en el ejercicio anterior, procede de manera razonada haciendo uso de la definición de logaritmo o de las propiedades de los logaritmos.

$$\text{a) } \log_x\frac{1}{4}=-2 \;;\; \text{b) } \log_4\left(\frac{3-x}{7}\right)=1 \;;\; \text{c) } \log\left(x+1\right)-\log 5=\log 100$$

7. **[1 punto]** Opera paso a paso y ***expresa el resultado en notación científica***.
Nota. No es válido dar el resultado final utilizando la calculadora. Si lo haces, es sólo para comprobar que el resultado es correcto.

$$\text{a) } \frac{3\cdot 10^3-200\cdot 10}{\left(2\cdot 10\right)^4} \;;\; \text{b) } \frac{5\cdot 10^{-4}\cdot\left(2,31\cdot 10^{-5}+0,9\cdot 10^{-6}\right)}{0,2\cdot 10^{-9}}$$

Nota*: lee bien los enunciados y contesta exactamente a lo que se pide en cada uno de ellos.*

Soluciones

1. **[1,5 puntos]** Realiza las siguientes operaciones con potencias. ***Expresa el resultado, en forma de una única potencia o de producto de potencias de exponente entero***.

a) $\dfrac{5^3}{\left(5^{-2}\right)^3\cdot 5} = \dfrac{5^3}{5^{-6}\cdot 5} = \dfrac{5^3}{5^{-5}} = 5^8$.

b) $\dfrac{4^4\cdot 8^{-1}\cdot 16^2}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\cdot 8^6} = \dfrac{\left(2^2\right)^4\cdot\left(2^3\right)^{-1}\cdot\left(2^4\right)^2}{\left(2^{-1}\right)^3\cdot\left(2^3\right)^6} = \dfrac{2^8\cdot 2^{-3}\cdot 2^8}{2^{-3}\cdot 2^{18}} = \dfrac{2^{13}}{2^{15}} = 2^{-2} = \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4}$.

c) $\dfrac{25^2\cdot 5^{-2}\cdot 5^3\cdot 45^2}{\left(5^3\right)^2\cdot 27\cdot 3^{-2}} = \dfrac{\left(5^2\right)^2\cdot 5^{-2}\cdot 5^3\cdot\left(3^2\cdot 5\right)^2}{\left(5^3\right)^2\cdot 3^3\cdot 3^{-2}} = \dfrac{5^4\cdot 5^{-2}\cdot 5^3\cdot 3^4\cdot 5^2}{5^6\cdot 3^3\cdot 3^{-2}} = \dfrac{5^7\cdot 3^4}{5^6\cdot 3^1} = 5^1\cdot 3^3 = 5\cdot 27 = 135$.

2. **[1,5 puntos]** ***Simplifica al máximo*** cada expresión con radicales. Si es posible, extrae factores del resultado final.

a) $\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[3]{4}\right)^3 = \sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2^3}\cdot\sqrt[3]{4^3} = \sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2^3}\cdot\sqrt[3]{2^6} = \sqrt[12]{2^6}\cdot\sqrt[12]{2^9}\cdot\sqrt[12]{2^{24}} = \sqrt[12]{2^{39}} = 2^3\sqrt[12]{2^3} = 8\sqrt[4]{2}$.

b) $\sqrt{3\sqrt[3]{3}}\cdot\sqrt[3]{81} = \sqrt{\sqrt[3]{3^3\cdot 3}}\cdot\sqrt[3]{3^4} = \sqrt[6]{3^4}\cdot\sqrt[3]{3^4} = \sqrt[6]{3^4}\cdot\sqrt[6]{3^8} = \sqrt[6]{3^{12}} = 3^2 = 9$.

c) $\sqrt{5}+\sqrt{45}+\sqrt{180}-\sqrt{80} = \sqrt{5}+\sqrt{3^2\cdot 5}+\sqrt{2^2\cdot 3^2\cdot 5}-\sqrt{2^4\cdot 5} = \sqrt{5}+3\sqrt{5}+2\cdot 3\sqrt{5}-2^2\sqrt{5} =$
$= \sqrt{5}+3\sqrt{5}+6\sqrt{5}-4\sqrt{5} = (1+3+6-4)\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$.

3. **[2 puntos]** Racionaliza las siguientes expresiones con radicales y simplifica todo lo que se pueda el resultado.

a) $\dfrac{3\sqrt{27}-\sqrt{12}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\left(3\sqrt{27}-\sqrt{12}\right)\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\sqrt{3}} = \dfrac{3\sqrt{81}-\sqrt{36}}{2\cdot 3} = \dfrac{3\cdot 9-6}{6} = \dfrac{27-6}{6} = \dfrac{21}{6} = \dfrac{7}{2}$.

b) $\dfrac{-2\left(1-\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{-2\left(1-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)} = \dfrac{-2\left(\sqrt{3}+1-3-\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}^2-1^2} = \dfrac{-2\cdot(-2)}{3-1} = \dfrac{4}{2} = 2$.

4. **[1 punto]** Expresa mediante intervalos los valores de x que satisfacen las siguientes desigualdades con valores absolutos.

a) $|1-2x|<3 \Leftrightarrow -3<1-2x<3 \Leftrightarrow -3-1<-2x<3-1 \Leftrightarrow -4<-2x<2 \Leftrightarrow 2>x>-1 \Leftrightarrow x\in(-1,\ 2)$.

b) $\left|\dfrac{3x}{2}-\dfrac{1}{4}\right| \geq \dfrac{1}{2}$. Resolvemos primero la desigualdad contraria: $\left|\dfrac{3x}{2}-\dfrac{1}{4}\right| < \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} < \dfrac{3x}{2}-\dfrac{1}{4} < \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4} < \dfrac{3x}{2} < \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{4} < \dfrac{3x}{2} < \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow -1<6x<3 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{6} < x < \dfrac{3}{6} \Leftrightarrow x\in\left(-\dfrac{1}{6},\ \dfrac{1}{2}\right)$.

Por tanto, los valores de x que satisfacen la desigualdad original son $x\in\left(-\infty,\ -\dfrac{1}{6}\right]\cup\left[\dfrac{1}{2},\ +\infty\right)$.

5. **[1,5 puntos]** Calcula el valor final de cada expresión. Para ello, procede de manera razonada haciendo uso de la definición de logaritmo o de las propiedades de los logaritmos.

a) $\log_3 \sqrt{27} = \log_3 \sqrt{3^3} = \log_3 3^{3/2} = \frac{3}{2}\log_3 3 = \frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}$.

b) $\log_2 \frac{1}{\sqrt{2}} = \log_2 \frac{1}{2^{1/2}} = \log_2 2^{-1/2} = -\frac{1}{2}\log_2 2 = -\frac{1}{2}\cdot 1 = -\frac{1}{2}$.

c) $\log_4 16 + \log_2 \sqrt{32} - \log_5 1 = \log_4 4^2 + \log_2 \sqrt{2^5} - 0 = 2\log_4 4 + \frac{5}{2}\log_2 2 = 2 + \frac{5}{2} = \frac{9}{2}$.

6. **[1,5 puntos]** Halla el valor de x en cada uno de los apartados. Como en el ejercicio anterior, procede de manera razonada haciendo uso de la definición de logaritmo o de las propiedades de los logaritmos.

a) $\log_x \frac{1}{4} = -2 \Rightarrow x^{-2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4 = x^2 \Rightarrow x = 2$.

b) $\log_4\left(\frac{3-x}{7}\right) = 1 \Rightarrow 4^1 = \frac{3-x}{7} \Rightarrow 28 = 3 - x \Rightarrow x = 3 - 28 \Rightarrow x = -25$.

c) $\log(x+1) - \log 5 = \log 100 \Rightarrow \log\frac{x+1}{5} = \log 100 \Rightarrow \frac{x+1}{5} = 100 \Rightarrow x+1 = 500 \Rightarrow x = 499$.

7. **[1 punto]** Opera paso a paso y ***expresa el resultado en notación científica***.

Nota. No es válido dar el resultado final utilizando la calculadora. Si lo haces, es sólo para comprobar que el resultado es correcto.

a) $\frac{3\cdot 10^3 - 200\cdot 10}{(2\cdot 10)^4} = \frac{3\cdot 10^3 - 2\cdot 10^3}{2^4\cdot 10^4} = \frac{1\cdot 10^3}{16\cdot 10^4} = 0,0625\cdot 10^{-1} = 6,25\cdot 10^{-3}$.

b) $\frac{5\cdot 10^{-4}\cdot\left(2,31\cdot 10^{-5} + 0,9\cdot 10^{-6}\right)}{0,2\cdot 10^{-9}} = \frac{5\cdot 10^{-4}\cdot\left(2,31\cdot 10^{-5} + 0,09\cdot 10^{-5}\right)}{0,2\cdot 10^{-9}} = \frac{5\cdot 10^{-4}\cdot 2,4\cdot 10^{-5}}{0,2\cdot 10^{-9}} = \frac{12\cdot 10^{-9}}{0,2\cdot 10^{-9}} =$

$= 60\cdot 10^0 = 6\cdot 10^1$.