Matemáticas CCSS 2º Bachillerato
PBAU UIB junio 2.023

P1. — Queremos contratar una empresa de gestión de entre las siguientes:
- La empresa A nos cobra 150 € de coste base, y adicionalmente 5 € por cada cliente y 3 € por cada factura que emite.
- La empresa B nos cobra 300 € de coste base, 10 € por cada cliente, y no cobra por emitir facturas.
- La empresa C nos cobra 100 € de coste base, no cobra en función del número de clientes, pero cobra 5 € por cada factura que emite.

a) Si el año pasado tuvimos 50 clientes y, en total, emitimos 180 facturas, ¿ qué empresa nos hubiese costado menos contratar? (3 pt)

De cara al próximo año, tenemos una previsión de x clientes e y facturas. Con esta previsión, la empresa A nos costaría 1050 € y la empresa B nos costaría 900 €.

b) Calcula el número de clientes x y el número de facturas y previstas. (5 pt)

c) Con x clientes e y facturas, ¿cuánto nos costaría la empresa C? (2 pt)

a)

Empresa	Coste base (€)	Cliente (€)	Factura (€)
A	150	5	3
B	300	10	0
C	100	0	5

$$\Rightarrow \quad P = \begin{pmatrix} 150 & 5 & 3 \\ 300 & 10 & 0 \\ 100 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

El coste de cada empresa será el producto de esta matriz P por la matriz columna Q del número de clientes y facturas. El 1 se debe al coste base

$$Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 50 \\ 180 \end{pmatrix}$$

Por tanto

$$C = P \cdot Q = \begin{pmatrix} 150 & 5 & 3 \\ 300 & 10 & 0 \\ 100 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 50 \\ 180 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 + 250 + 540 \\ 300 + 500 \\ 100 + 900 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 940 \\ 800 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

y la más económica resultaría la B con un coste de 800 €.

Solución: $\boxed{\text{B más económica, 800 €}}$

b)
El sistema que se plantea es

$$\begin{pmatrix} 150 & 5 & 3 \\ 300 & 10 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1050 \\ 900 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{r} 150 + 5x + 3y = 1050 \\ 300 + 10x = 900 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 150 + 5 \cdot 60 + 3y = 1050 & \Rightarrow & y = 200 \\ 300 + 10x = 900 & \Rightarrow & x = 60 \end{array} \right.$$

Solución: $\boxed{\text{60 clientes, 200 facturas}}$

c)
La empresa C con 60 clientes y 200 facturas nos costaría

$$C_C(60, 200) = 100 + 0 \cdot 60 + 200 \cdot 5 = 1100 \text{ €}$$

Solución: $\boxed{\text{1100 €}}$

P2. — Un camión transporta una carga de exactamente 12 metros cúbicos de volumen y, como máximo un peso de 18 toneladas. Puede transportar:

- Arena, que pesa 1.6 toneladas por metro cúbico, y que se factura a 80 € por metro cúbico.
- Grava, que pesa 1.8 toneladas por metro cúbico, y que se factura a 100 € por metro cúbico.
- Ceniza, que pesa 0.5 toneladas por metro cúbico, y que se factura a 25 € por metro cúbico.

Nos interesa calcular el precio más alto que podrá facturar en un viaje. Para ello, se pide:

a) Plantea la maximización de este precio como un problema de programación lineal con dos variables. (4 pt)
b) Dibuja la región factible, indicando las rectas y vértices que la delimitan. (4 pt)
c) Calcula el número de toneladas de cada material que se tienen que transportar para alcanzar el precio máximo, y determina también dicho precio máximo. (2 pt)

a)

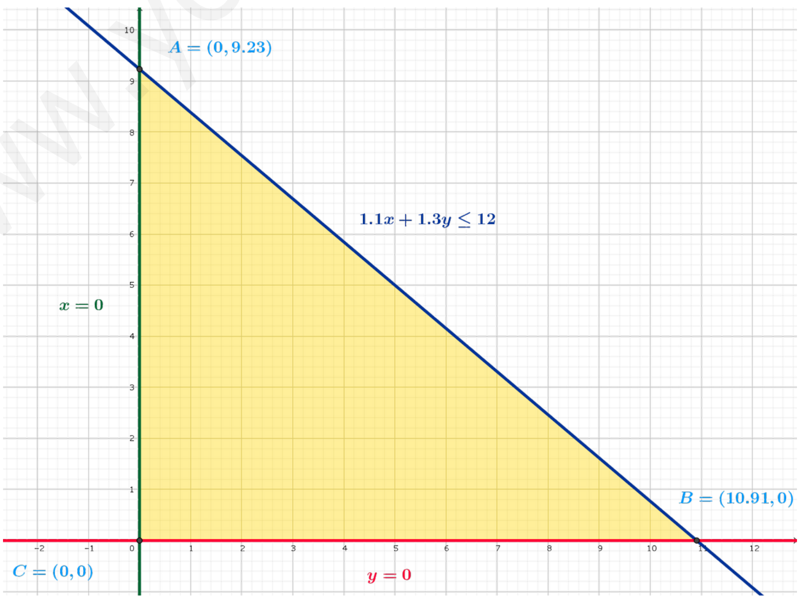
Carga	Volumen (m^3)	Densidad (Ton./m^3)	Masa (Ton.) = Vol · Densidad	Factura (€/m^3)	Precio (€) = Vol · Factura
Arena	x	1.6	1.6 ·x	80	80·x
Gravilla	y	1.8	1.8·y	100	100·y
Ceniza	12-x-y	0.5	(12-x-y)·0.5	25	25·(12-x-y)
			≤ 18		

Operando la restricción de la masa $1.6x + 1.8y + 0.5(12 - x - y) \leq 18 \quad \Rightarrow \quad 1.1x + 1.3y \leq 12$

El problema de optimización se resume en $\begin{cases} 1.1x + 1.3y \leq 12 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ y deseamos maximizar la función precio P(x,y)

$$P(x, y) = 80x + 100y + 25 \cdot (12 - x - y) = 55x + 75y + 300$$

b)



c)

El precio máximo lo obtendremos en A o B, ya que C supone no transportar nada y el precio será 0 €.

$$C_A(0, 9.23) = 55 \cdot 0 + 75 \cdot 9.23 + 300 = 992.25 \text{ €}$$

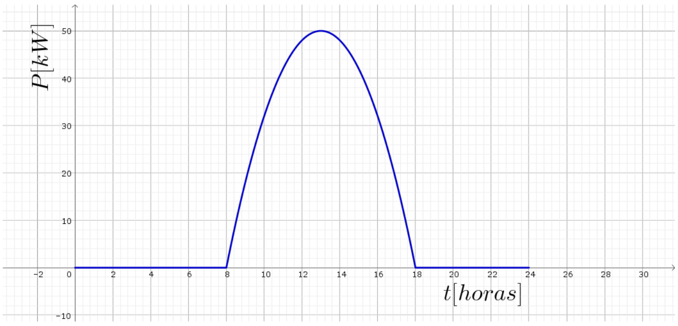
$$C_B(10.91, 0) = 55 \cdot 10.91 + 75 \cdot 0 + 300 = 900.05 \text{ €}$$

El precio máximo de 992.25 €, transportando 12 m^3, se obtiene con x = 0 e y = 9.23, es decir transportando 9.23 m^3 de gravilla, nada de arena y 12-9.23=2.77 m^3 de ceniza, que en toneladas es 9.23 · 1.8 = 16.614 Ton. de gravilla y 2.77 · 0.5 = 1.385 Ton. de ceniza.

Solución: $\boxed{\text{Precio máximo 992.25 €; 16.614 Ton. de gravilla y 1.385 Ton. de ceniza.}}$

P3. — La potencia generada por una placa solar, P (medida en kW), depende del tiempo transcurrido, t (medido en horas), según la siguiente expresión:

$$P(t) = \begin{cases} 0 & para\ 0 \le t < 8 \\ -2t^2 + 52t + c & para\ 8 \le t < 18 \\ 0 & para\ 18 \le t \le 24 \end{cases}$$



donde c es un parámetro real.

a) Teniendo en cuenta que la función es continua, ¿cuál es el valor del parámetro c? (3 pt)

b) Teniendo en cuenta que el valor máximo se alcanza a las 13 horas, calcula con la expresión dada cuál es la potencia en ese momento. (3 pt)

c) ¿En qué intervalos la función es creciente? ¿En qué intervalos es decreciente? (4 pt)

a)

f(x) es una función definida a trozos y cada trozo es continuo en su intervalo, ya que son funciones polinómica y constante. Si f(x) es continua en su dominio de definición los trozos deben unirse en los extremos o formalmente

$$\lim_{t\to 8^-} P(t) = \lim_{t\to 8^+} P(t) = f(8) \ \Rightarrow\ \lim_{t\to 8^-} 0 = \lim_{t\to 8^+} -2t^2 + 52t + c = P(8) \ \Rightarrow\ 0 = 288 + c = 288 + c \ \Rightarrow\ c = -288$$

De la misma forma en el otro extremo

$$\lim_{t\to 18^-} P(t) = \lim_{t\to 18^+} P(t) = P(18) \Rightarrow \lim_{t\to 18^-} -2t^2 + 52t + c = \lim_{t\to 18^-} 0 = P(18) \Rightarrow 288 + c = 288 + c = 0 \ \Rightarrow\ c = -288$$

Como el valor de c obtenido es el mismo, podemos asegurar la continuidad de P(t) en todo su dominio tomando c = -288.

Solución: $\boxed{c=-288}$

b)

$$P(13) = -2 \cdot 13^2 + 52 \cdot 13 - 288 = 50$$

Solución: $\boxed{50\ kW}$

c)

Dado que el máximo en la potencia se alcanza a 13 h y con la gráfica podríamos deducir que P(t) crece entre (8,13) y decrece entre (13,18). Podemos comprobarlo analizando el signo de P'(t)

$$P'(t) = -4t + 52\ si\ 8 < t < 18 \ \Rightarrow\ -4t + 52 = 0 \ \Rightarrow\ t = 13 \in (8,18)$$

	8		13		18
$P'(t)$	$\nexists$	+	0	-	$\nexists$
$P(t)$	0	$\nearrow$	50	$\searrow$	0

P4. — Consideramos el peso de un adulto, p (en kg), y su metabolismo basal, m (en vatios). Un investigador nos proporciona el siguiente modelo:

$$p(m) = 0.1 \cdot m^{1.5}, \qquad m \in (0, +\infty).$$

a) Haz una gráfico esquemático de la función p(m), indicando el dominio, el comportamiento en los extremos del dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales. (7 pt)
b) Encuentra la función que da el metabolismo basal en función del peso, m(p) (es decir, aísla la variable m). (3 pt)

a)
i- Dominio de definición. $(0, +\infty)$

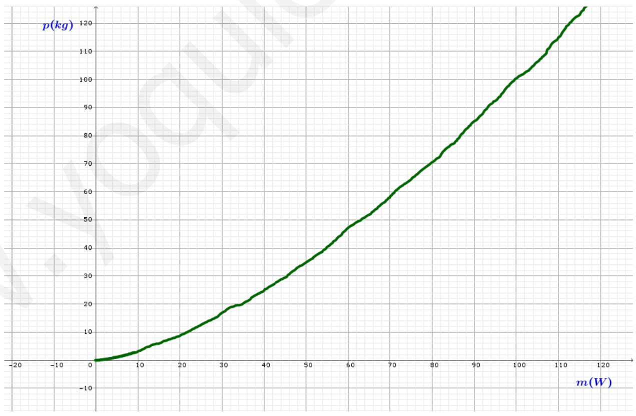
ii- Comportamiento en los extremos.

$$\lim_{m \to \infty} 0.1 \cdot m^{1.5} = +\infty \qquad ; \qquad \lim_{m \to 0} 0.1 \cdot m^{1.5} = 0$$

iii- Monotonía y extremos relativos

$$p'(m) = 0.1 \cdot 1.5 \cdot m^{0.5} = 0.15 \cdot m^{0.5} \Rightarrow 0.15 \cdot m^{0.5} = 0 \Rightarrow m = 0 \notin (0, +\infty)$$

	0	+∞
$p'(m)$	$\nexists$	+
$p(m)$	$\nexists$	↗



b)

$$p = 0.1 \cdot m^{1.5} \Rightarrow \frac{p}{0.1} = m^{\frac{3}{2}} \Rightarrow 10p = m^{\frac{3}{2}} \Rightarrow (10p)^2 = m^3 \Rightarrow \sqrt[3]{100 \cdot p^2} = m$$

Solución: $\boxed{m = \sqrt[3]{100 \cdot p^2}}$

P5. — Considera las funciones:

$$f(x) = (x+2)3, g(x) = x3 + 6x^2 + 12x.$$

a) Justifica, calculando, que $f'(x) = g'(x)$. (4 pt)
b) ¿Es cierto que $f(x) = g(x)$? (3 pt)
c) Calcula $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$. (3 pt)

a)

$$\left.\begin{array}{r} f'(x) = 3\cdot(x+2)^2\cdot 1 = 3\left(x^2+4x+4\right) = 3x^2+12x+12 \\ g'(x) = 3x^2+12x+12 \end{array}\right\} \implies f'(x) = g'(x)$$

b)
No, es falso que $f(x) = g(x)$. Por ejemplo $f(1) = (1+2)^3 = 27$ y $g(1) = 1^3 + 6\cdot 1^2 + 12\cdot 1 = 19$. Por tanto ya hemos encontrado un valor de x para el que $f(x) \neq g(x)$.

c)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x+2)^3}{x^3+6x^2+12x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{(1)}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$$

(1) Por orden de infinitud nos quedamos con los términos de mayor grado del numerador y del denominador.

Solución: $\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1}$

Matemáticas CCSS 2º Bachillerato
PBAU UIB junio 2.023

P6. — Manel elige al azar dos cifras entre 0 y 9, que podrían estar repetidas.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que ambas cifras sean múltiplo de tres? (3 pt)
b) El producto de las dos cifras es múltiplo de tres si al menos una de las cifras es múltiplo de tres. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto de las dos cifras sea múltiplo de tres? (4 pt)

Ahora, Pep te da su número de teléfono, que contiene nueve cifras también entre 0 y 9, posiblemente repetidas, y que supondremos que son cifras escogidas al azar.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que el producto de las nueve cifras sea múltiplo de tres? (3 pt)

a)
Recordando que el cero también es múltiplo de 3. De las cifras que son múltiplo de 3 entre el 0 y el 9 están el 0, el 3, el 6 y el 9. Por tanto al elegir una cifra entre 0 y 9 la $P(multiplo\ 3)=\frac{4}{10}$. Escojo una cifra y luego escojo otra cifra que puede ser la misma. Ambos sucesos son independientes, por tanto

$$P(1^{\circ}\ multiplo\ 3\ y\ 2^{\circ}\ multiplo\ 3)=P(multiplo\ 3)\cdot P(multiplo\ 3)=\frac{4}{10}\cdot\frac{4}{10}=\frac{16}{100}=\frac{4}{25}$$

Solución: $\boxed{P(1^{\circ}\ multiplo\ 3\ y\ 2^{\circ}\ multiplo\ 3)=\frac{4}{25}}$

b)
El producto es múltiplo de 3 si al menos una de las cifras es múltiplo de 3.

$$P(producto\ multiplo\ 3)=P(1^{\circ}\ multiplo\ 3\ o\ 2^{\circ}\ multiplo\ 3)=$$

$$P(multiplo\ 3)+P(multiplo\ 3)-P(1^{\circ}\ multiplo\ 3\ y\ 2^{\circ}\ multiplo\ 3)=\frac{4}{10}+\frac{4}{10}-\frac{4}{10}\cdot\frac{4}{10}=\frac{64}{100}=\frac{16}{25}$$

También puede plantearse como

$$P(producto\ multiplo\ 3)=P(al\ menos\ 1\ multiplo\ 3)=P(\overline{ninguno\ multiplo\ 3})=1-P(ninguno\ multiplo\ 3)=$$

$$=1-P(\overline{1^{\circ}\ multiplo\ 3})\cdot P(\overline{2^{\circ}\ multiplo\ 3})=1-\left(1-\frac{4}{10}\right)\cdot\left(1-\frac{4}{10}\right)=1-\frac{6}{10}\cdot\frac{6}{10}=1-\frac{36}{100}=\frac{64}{100}=\frac{16}{25}$$

Solución: $\boxed{P(producto\ multiplo\ 3)=\frac{16}{25}}$

c)
$$P(producto\ multiplo\ 3)=P(al\ menos\ 1\ multiplo\ 3)=P(\overline{ninguno\ multiplo\ 3})=1-P(ninguno\ multiplo\ 3)=$$

$$=1-P(\overline{1^{\circ}\ multiplo\ 3})\cdot P(\overline{2^{\circ}\ multiplo\ 3})\dots P(\overline{9^{\circ}\ multiplo\ 3})=1-\left(1-\frac{4}{10}\right)\cdot\left(1-\frac{4}{10}\right)\dots\left(1-\frac{4}{10}\right)=$$

$$=1-\frac{6}{10}\cdot\frac{6}{10}\dots\frac{6}{10}=1-\left(\frac{6}{10}\right)^{9}=\frac{989922304}{1000000000}$$

Solución: $\boxed{P(producto\ multiplo\ 3)=\frac{989922304}{1000000000}}$

P7. — De un total de n = 80 alumnos, el 80% de alumnos han aprobado un examen de matemáticas, y el 75% han aprobado un examen de física. Además, de los que han suspendido el examen de matemáticas, sólo un 50% ha aprobado el de física.

a) De los que han suspendido el examen de física, ¿cuántos han aprobado el de matemáticas? (4 pt)

b) ¿Cuántos alumnos han aprobado alguno de los dos exámenes? (3 pt)

c) ¿Aprobar el examen de física y aprobar el examen de matemáticas son sucesos independientes? (3 pt)

	Aprueba física	No aprueba física	Total
Aprueba matemáticas	52	12	64
No aprueba matemáticas	8	8	16
Total	60	20	80

a)

$$P(aprueba\ M/suspende\ F) = \frac{P(aprueba\ M \cap suspende\ F)}{P(suspende\ F)} = \frac{\frac{12}{80}}{\frac{20}{80}} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

Solución: $\boxed{P(aprueba\ M/suspende\ F) = \frac{3}{5}}$

b)

Todos menos los que han suspendido física y matemáticas, es decir 80 -8 = 72

Solución: $\boxed{\text{72 alumnos aprueban algún examen}}$

c)

A y B son sucesos independientes si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$\left.\begin{array}{r} P(aprobar\ F \cap aprobar\ M) = \frac{52}{80} = \frac{13}{20} \\ P(aprobar\ F) \cdot P(aprobar\ M) = \frac{60}{80} \cdot \frac{64}{80} = \frac{3}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow P(aprobar\ F \cap aprobar\ M) \neq P(aprobar\ F) \cdot P(aprobar\ M)$$

Los sucesos son dependientes

P8. — Para estudiar la vida de las tortugas marinas, hemos recopilado la edad que alcanzaron algunos ejemplares que murieron por causas naturales, y hemos obtenido (en años):

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
55	62	69	70	72	77	94	103

$\overline{x}$
75.25

Suponiendo que estos datos siguen una distribución normal, y que su desviación típica poblacional es de σ = 20 años,

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional con el 90% de confianza. (4 pt)

Supongamos ahora, además, que la media poblacional es de μ = 75.25.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una tortuga marina supere los 80 años de vida? (3 pt)
c) ¿Cuál es la probabilidad de que una tortuga marina supere los 80 años de vida, pero no los 100 años de vida? (3 pt)

a)
El intervalo de confianza para la media poblacional viene dado por $\left(\overline{X}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. Como el nivel de confianza es del 90 % $P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}}<Z\leq Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)=0.90 \;\Rightarrow\; P\left(Z\leq Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)=0.90 \;\Rightarrow\; Z_{\frac{\alpha}{2}}=1.645$

$$IC=\left(75.25-1.645\frac{20}{\sqrt{8}},75.25+1.645\frac{20}{\sqrt{8}}\right)=(63.62,86.88)$$

Solución: $\boxed{(63.62,86.88)}$

b)

$$P(X>80)=P\left(Z>\frac{80-75.25}{20}\right)=P(Z>0.24)=1-P(Z\leq 0.24)=1-0.5948=0.4052$$

Solución: $\boxed{P(X>80)=0.4052}$

c)

$$P(80<X\leq 100)=P\left(\frac{80-75.25}{20}<Z\leq\frac{100-75.25}{20}\right)=P(0.24<Z\leq 1.24)=$$

$$=P(Z\leq 1.24)-P(Z\leq 0.24)=0.8925-0.5948=0.2977$$

Solución: $\boxed{P(80<X\leq 100)=0.2977}$