Fuerza de gravedad.
Campo gravitatorio

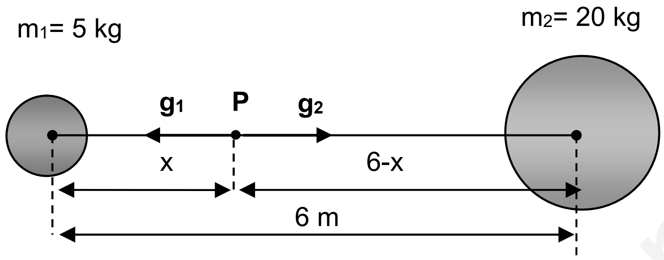
(Oviedo 2022-2023. Junio.1)

Dos partículas puntuales con masas m_1= 5 kg y m_2= 20 kg se hallan situadas a lo largo del eje X. La partícula de masa m_1 se encuentra en el origen de coordenadas, $x_1 = 0$, mientras que la masa m_2 está en el punto $x_2 = 6$ m.

a) Determine el punto del eje X en el que se anula el campo gravitatorio.
b) Potencial gravitatorio debido al sistema de masas en los puntos del eje X situados en las coordenadas: $x_A = -1$ m y $x_B = 7$ m.
DATOS: G= 6,67 10^{-11} N m^2 kg^{-2}

Solución

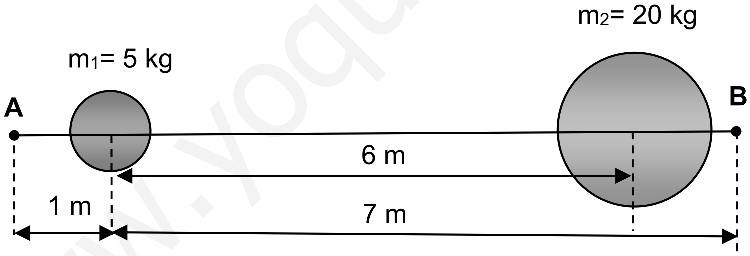
a)



Como el vector campo creado por cada una de las masas en el punto P apunta en sentido contrario, para que se anulen habrá de verificarse que g_1=g_2. Luego:

$$\left.\begin{aligned} g_1 &= G\,\frac{m_1}{x^2} \\ g_2 &= G\,\frac{m_2}{(6-x)^2} \end{aligned}\right\} g_1 = g_2\,;\ G\,\frac{m_1}{x^2} = G\,\frac{m_2}{(6-x)^2}\,;\ \frac{x^2}{(6-x)^2} = \frac{m_1}{m_2}\,; \quad \frac{x}{(6-x)} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}\,;\ \frac{x}{(6-x)} = 0{,}5\,;\ x = 2\ \text{m}$$

b)



Potencial en A:

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= -\,G\,\frac{m_1}{r_{1A}} = \\ V_2 &= -\,G\,\frac{m_2}{r_{2A}} = \end{aligned}\right\} V_A = V_1 + V_2 = -\,G\left(\frac{m_1}{r_{1A}} + \frac{m_2}{r_{2A}}\right)$$

$$V_A = -\,G\left(\frac{m_1}{r_{1A}} + \frac{m_2}{r_{2A}}\right) = -\,6{,}67\,10^{-11}\,\frac{N\,m^{\cancel{2}}}{kg^{\cancel{2}}}\left(\frac{5}{1} + \frac{20}{7}\right)\frac{\cancel{kg}}{\cancel{m}} = -\,5{,}24\,10^{-10}\,\frac{J}{kg}$$

Potencial en B:

$$V_B = -\,G\left(\frac{m_1}{r_{1B}} + \frac{m_2}{r_{2B}}\right) = -\,6{,}67\,10^{-11}\,\frac{N\,m^{\cancel{2}}}{kg^{\cancel{2}}}\left(\frac{5}{7} + \frac{20}{1}\right)\frac{\cancel{kg}}{\cancel{m}} = -1{,}38\,10^{-9}\,\frac{J}{kg}$$

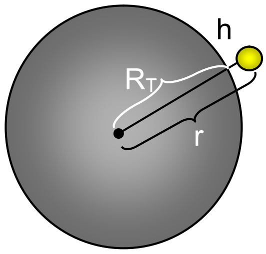
(Oviedo 2022-2023. Junio.2)

Un satélite artificial de 1500 kg de masa describe una órbita de trayectoria circular entorno a la Tierra con un radio de 3,5 10^4 m. Calcule:

a) ¿Cuál es el valor de la gravedad a dicha altura?
b) ¿Con que velocidad angular viaja el satélite?
c) Calcule la relación del peso del satélite en un punto de la órbita respecto a su peso en la superficie de la Tierra
DATOS: G= 6,67 10^{-11} N m^2 kg^{-2}; R_T = 6,37 10^6 m; M_T=5,97 10^{24} kg

Solución

a) Es evidente que hay un error en el enunciado: lo que se da como radio de la órbita (350 km) debe de ser la altura sobre la superficie terrestre a la que se encuentra el satélite.



$r= R_T+h$

$$g = G\frac{M_T}{r^2} = 6{,}67\,10^{-11}\frac{N\,\cancel{m^2}}{\cancel{kg^2}}\frac{5{,}97\,10^{24}\,\cancel{kg}}{\left(6{,}40\,10^6\right)^2\,\cancel{m^2}} = 9{,}72\,\frac{N}{m} = 9{,}72\,\frac{m}{s^2}$$

b)
$$F_N = m\,a_N = m\,\frac{v^2}{r} = m\,\frac{\omega^2 r^{\cancel{2}}}{\cancel{r}} = m\omega^2 r$$

$$G\frac{\cancel{m}\,M_T}{r^2} = \cancel{m}\omega^2 r\,;\ \omega = \sqrt{\frac{G\,M_T}{r^3}} = \sqrt{\frac{6{,}67\,10^{-11}\,\frac{N\,m^2}{kg^{\cancel{2}}}\,5{,}97\,10^{24}\,\cancel{kg}}{\left(6{,}40\,10^6\right)^3\,m^3}} = 1{,}23\,10^{-3}\,s^{-1}$$

c) Si se supone conocido el valor de la gravedad en la superficie de la Tierra g_0= 9,81 m/s^2:

$$\left.\begin{aligned} p_T &= m\,g_0 \\ p_{orb} &= m\,g_{orb}\end{aligned}\right\}\frac{p_T}{p_{orb}} = \frac{\cancel{m}\,g_0}{\cancel{m}\,g_{orb}}\,;\ p_{orb} = \frac{g_{orb}}{g_0}\,p_T = \frac{9{,}72\,\cancel{\frac{m}{s^2}}}{9{,}81\,\cancel{\frac{m}{s^2}}}\,p_T = 0{,}99\,p_T\,;\ p_{orb} = 0{,}99\,p_T$$

El valor de g_0 puede calcularse a partir de: $g_0 = G\,\dfrac{M_T}{{R_T}^2}$ donde todos los datos son conocidos.

(Oviedo 2022-2023. Julio.1)

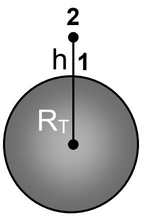
La Agencia Espacial Europea (ESA) pretende poner un satélite de 100 kg de masa en una órbita circular a 150 km de altura alrededor de la Tierra.

a) Obtenga la velocidad inicial mínima necesaria para que el satélite alcance dicha altura.
b) Una vez alcanzada esa altura, calcule la energía cinética que habría que proporcionarle al satélite para que se mantenga realizando una órbita circular alrededor de la Tierra.
DATOS: G= 6,67 10^{-11} N m^2 kg^{-2}; R_T = 6,37 10^6 m; M_T=5,97 10^{24} kg

Solución:

a) h= 150 km

$r= R_T+h$= (6370+150) km= 6520 km= 6,50 10^6 m



$$\left.\begin{aligned} &\text{Punto1}: Ec_1 + Ep_1 = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM_T}{R_T} \\ &\text{Punto2}: Ep_2 = -G\frac{mM_T}{r}\end{aligned}\right\}\ \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{m\,M_T}{R_T} = -\,G\frac{m\,M_T}{r}$$

$$v = \sqrt{2G\,M_T\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{r}\right)} = \sqrt{2.\,6{,}67\,10^{-11}\frac{N\,m^{\cancel{2}}}{kg^{\cancel{2}}}\,5{,}97\,10^{24}\,\cancel{kg}\left(\frac{1}{6{,}37\,10^6} - \frac{1}{6{,}52\,10^6}\right)\frac{1}{m}} = 1{,}70\,10^3\,\frac{m}{s}$$

(Oviedo 2022-2023. Julio.2)

Una sonda espacial se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 25 km/s desde la superficie de un planeta de masa $M_P = 3{,}25\ 10^{25}$ kg y con radio $R_P = 5{,}75\ 10^{6}$ m.

a) Responda de forma justificada: ¿conseguirá escapar la sonda espacial de la atracción gravitatoria del planeta?
b) Determine el peso de la sonda en el instante del lanzamiento si la energía cinética que se le comunica es de $2\ 10^{12}$ J.
DATOS: G= $6{,}67\ 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}

Solución

a) La velocidad mínima que debe de comunicarse a la sonda para que escape del campo gravitatorio del planeta se corresponde con la "velocidad de escape". Se considera que fuera del campo gravitatorio (r = infinito) la energía potencial será cero y si se lanza con la velocidad mínima llegaría al infinito con velocidad nula.

Luego:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Superficie del planeta}: Ec_P + Ep_P = \frac{1}{2} m v_{esc}^2 - G\frac{m\,M_P}{R_P} \\ \text{Fuera del c.gravitatorio}: Ep_\infty = 0; Ec_\infty = 0\end{array}\right\} \frac{1}{2}\cancel{m} v_{esc}^2 - G\frac{\cancel{m}\,M_P}{R_P} = 0$$

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2\ G M_P}{R_T}} = \sqrt{2.\,6{,}67\ 10^{-11}\frac{N\,m^{\cancel{2}}}{kg^{\cancel{2}}}\ \frac{3{,}25\,10^{25}\ \cancel{kg}}{5{,}75\,10^{8}\ \cancel{m}}} = 27\,459{,}1\frac{m}{s} = 27{,}5\frac{km}{s}$$

b) Considerando la energía cinética con que se lanza podemos calcular su masa:

$$Ec_P = \frac{1}{2} m v^2;\ m = \frac{2\,Ec_P}{v^2} = \frac{2\,.\,2\,10^{12}\,J}{\left(2{,}5\,10^4\right)^2\left(\frac{m}{s}\right)^2} = 6400\ Kg$$

A partir de los datos del planeta podemos calcular la gravedad en su superficie:

$$g_P = G\frac{M_P}{R_P^{\ 2}} = 6{,}67\,10^{-11}\frac{N\,\cancel{m^2}}{kg^{\cancel{2}}}\ \frac{3{,}25\,10^{25}\ \cancel{kg}}{\left(5{,}75\,10^{6}\right)^2\ \cancel{m^2}} = 65{,}57\ \frac{m}{s^2}$$

Por tanto, el peso en la superficie del planeta será:

P= m g_P = 6400 kg. 65,57 m/s^2= 419 648 N =$4{,}20\ 10^{5}$ N

(Oviedo 2021-2022. Junio 1A)

La intensidad del campo gravitatorio de un planeta de radio R_T es g_0= 9.80 m s^2

a) Determina a qué distancia desde el centro del planeta la intensidad de la gravedad disminuye a la mitad de su valor $g_0/2$ (punto A), y a la tercera parte $g_0/3$ (punto B).
b) Calcula la velocidad mínima que ha de llevar un cohete en el punto A para que llegue justo hasta el punto B.

DATOS: R_T= $6{,}37\ 10^{6}$ m; G= $6{,}67\ 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}

Solución:

a) $g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2};\ g_0 R_T^2 = G M_T$

El valor de la gravedad a una distancia ***r*** del centro de la Tierra (g) lo podemos expresar en función del valor en la superficie (g_0):

$$g = G\frac{M_T}{r^2} = \frac{g_0 R_T^2}{r^2};\ r = R_T\sqrt{\frac{g_0}{g}}$$

$$r_A = R_T\sqrt{\frac{g_0}{\frac{g_0}{2}}} = \sqrt{2}\,R_T = \sqrt{2}\,.6,37\,10^6\,m = 9,01.10^6\,m$$

$$r_B = R_T\sqrt{\frac{g_0}{\frac{g_0}{3}}} = \sqrt{3}\,R_T = \sqrt{3}\,.6,37\,10^6\,m = 1,10\,.10^7\,m$$

b) Aplicando el principio de conservación de la energía y teniendo en cuenta que la velocidad mínima será aquella para la cual llegue al punto B con velocidad nula:

$$\text{Punto A}: E_A = Ec_A + Ep_A = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM_T}{r_A} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{mg_0R_T^2}{r_A}$$

$$\text{Punto B}: E_B = Ec_B + Ep_B = 0 - \frac{GmM_T}{r_B} = -\frac{mg_0R_T^2}{r_B}$$

Suponiendo que la energía se conserva:

$$E_A = E_B;\ \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 - \frac{\cancel{m}g_0R_T^2}{r_A} = -\frac{\cancel{m}g_0R_T^2}{r_B}$$

$$v = R_T\sqrt{2\,g_0\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)} = 6,37\,10^6\,m\sqrt{2\,.9,80\frac{\cancel{m}}{s^2}\left(\frac{1}{9,01.10^6} - \frac{1}{1,10.10^7}\right)\frac{1}{\cancel{m}}} = 4,00.10^3\,\frac{m}{s^2}$$

(Oviedo 2021-2022. Junio 1B)

La masa de un cuerpo es de 100 kg sobre la superficie de Marte, donde la intensidad del campo gravitatorio es de 3.7 m s^2

a) ¿Cuál es el peso de dicho cuerpo sobre la superficie de un planeta de igual masa que la de Marte, pero con la mitad de su radio?
b) ¿Cuál sería el nuevo peso del cuerpo si se encuentra sobre la superficie de un tercer planeta de igual radio que Marte, pero con la tercera parte de la masa de éste?
DATOS: G= 6,67 10^{-11} N m^2 kg^{-2}

Solución:

a y b)

$$g_M = G\frac{M_M}{R_M^2}$$

Planeta A:

$$\left.\begin{array}{l} g_A = G\dfrac{M_A}{R_A^2} \\ M_A = M_M \\ R_A = \dfrac{R_M}{4} \end{array}\right\} g_A = G\frac{M_A}{R_A^2} = 4\,G\frac{M_M}{R_M^2} = 4\,g_M = 4.\,3,7\,\frac{m}{s^2} = 14,8\,\frac{m}{s^2};\ P_A = m\,g_A = 100\,kg\,.14,8\,\frac{m}{s^2} = 1480\,N$$

Planeta B:

$$\left.\begin{array}{l} g_A = G\dfrac{M_B}{R_B^2} \\ M_B = \dfrac{M_M}{3} \\ R_B = R_M \end{array}\right\} g_B = G\frac{M_B}{R_B^2} = \frac{1}{3}\,G\frac{M_M}{R_M^2} = \frac{1}{3}\,g_M = \frac{1}{3}\,3,7\,\frac{m}{s^2} = 1,23\,\frac{m}{s^2};\ P_B = m\,g_B = 100\,kg\,.1,23\,\frac{m}{s^2} = 123\,N$$

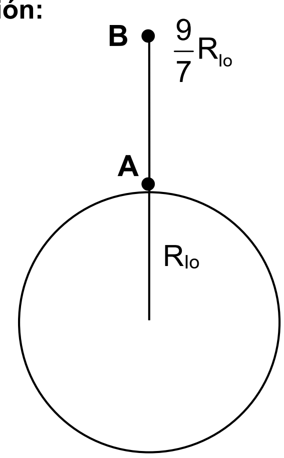
(Oviedo 2021-2022. Julio 1A)

El satélite más cercano a Júpiter, Io, tiene un radio $R_{Io} = 1.82 .10^6$ m y su masa es $M_{Io} = 8.94\ 10^{22}$ kg. Si se lanza desde su superficie un cohete que alcanza una altura máxima $h = 9/7\ R_{Io}$, determina:

a) La velocidad inicial con la que se ha lanzado el cohete para alcanzar dicha altura.
b) El valor de la aceleración de la gravedad sobre la superficie de Io y en el punto más alto que alcanza el cohete.
c) ¿Cuál sería el periodo de rotación orbital del cohete a dicha altura, si permaneciese en el punto más alto describiendo una trayectoria circular?
DATOS: $R_{Io}= 1{,}82\ 10^6$ m; $M_{Io}= 8{,}94\ 10^{22}$ kg; $G= 6{,}67\ 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}

Solución:

a)



$$\text{Punto A}: E_A = Ec_A + Ep_A = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM_{Io}}{R_{Io}}$$

$$\text{Punto B}: E_B = Ec_B + Ep_B = 0 - \frac{GmM_{Io}}{\left(R_{Io} + \frac{9}{7}R_{Io}\right)} = -\frac{GmM_{Io}}{\left(\frac{16}{7}R_{Io}\right)}$$

Suponiendo que la energía se conserva:

$$E_A = E_B;\ \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 - \frac{G\cancel{m}M_{Io}}{R_{Io}} = -\frac{G\cancel{m}M_{Io}}{\left(\frac{16}{7}R_{Io}\right)};\ \frac{v^2}{2} = \frac{GM_{Io}}{R_{Io}} - \frac{GM_{Io}}{\left(\frac{16}{7}R_{Io}\right)} = \frac{GM_{Io}}{R_{Io}}\left(1 - \frac{7}{16}\right) = \frac{9}{16}\frac{GM_{Io}}{R_{Io}}$$

$$v = \sqrt{2\,\frac{9}{16}\frac{GM_{Io}}{R_{Io}}} = \sqrt{\frac{9}{8}\frac{GM_{Io}}{R_{Io}}} = \sqrt{\frac{9}{8}\,\frac{6{,}67\,10^{-11}\,\frac{N\,m^{\cancel{2}}}{kg^{\cancel{2}}}\,8{,}94\,10^{22}\,\cancel{kg}}{1{,}82\,10^6\,\cancel{m}}} = 1{,}92.10^3\,\frac{m}{s}$$

b)

$$g_{Io} = G\frac{M_{Io}}{R_{Io}^2} = 6{,}67\,10^{-11}\frac{N\,m^2}{kg^2}\,\frac{8{,}94\,10^{22}\,kg}{\left(1{,}82\,10^6\right)^2 m^2} = 1{,}80\,\frac{m}{s^2}$$

$$g_h = G\frac{M_{Io}}{h^2} = G\frac{M_{Io}}{\left(\frac{9}{7}R_{Io} + R_{Io}\right)^2} = G\frac{M_{Io}}{\left(\frac{16}{7}R_{Io}\right)^2} = \left(\frac{7}{16}\right)^2 G\frac{M_{Io}}{R_{Io}{}^2} = \left(\frac{7}{16}\right)^2 g_{Io} = \left(\frac{7}{16}\right)^2 1{,}80\,\frac{m}{s^2} = 0{,}34\,\frac{m}{s^2}$$

c) Aplicando la 3ª ley de Kepler:

$$T^2 = k\,r^3 = \frac{4\pi^2}{G\,M}\ r^3$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G\,M}} = 2\pi\sqrt{\frac{\left(\frac{16}{7}R_{Io}\right)^3}{G\,M}} = 2\pi\sqrt{\frac{\left(\frac{16}{7}\,1{,}82\,10^6\right)^3 m^3}{6{,}67\,10^{-11}\,\frac{N\,m^2}{kg^2}\,8{,}94\,10^{22}\,kg}} = 2{,}18\,10^4\,s$$

$$2{,}18\,10^4\,s = 6{,}06\,h = 6\,h\,3\,min\,36\,s$$

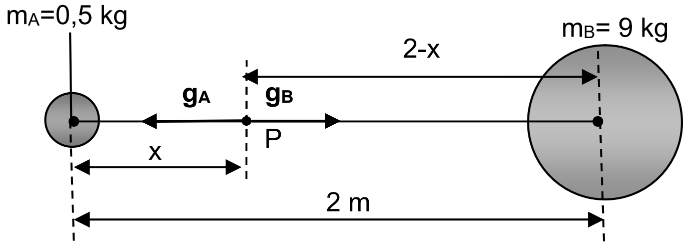
(Oviedo 2021-2022. Julio 1B)

Dos objetos tienen masas respectivas m_1 = 0.5 kg y m_2 = 9 kg. El primer objeto se sitúa en el origen de coordenadas, mientras que el segundo se sitúa a una distancia de 2 metros según el eje X positivo.

a) Determina el punto sobre el eje X en el que se anula el campo de atracción gravitatoria entre ambos objetos.
b) Calcula el valor del potencial gravitatorio debido a ambos objetos en dicho punto.

Solución:

a)



$$\left.\begin{aligned} g_A &= G\,\frac{m_A}{x^2} \\ g_B &= G\,\frac{m_B}{(2-x)^2} \end{aligned}\right\} g_A = g_B;\ G\,\frac{m_A}{x^2} = G\,\frac{m_B}{(2-x)^2};\ \frac{x}{2-x} = \sqrt{\frac{m_A}{m_B}} = \sqrt{\frac{0{,}5\ \cancel{kg}}{9\ \cancel{kg}}} = 0{,}2357$$

$$\frac{x}{2-x} = 0{,}2357\ ;\ x = 0{,}38\ m$$

b)

$$\left.\begin{aligned} V_A &= -\,G\frac{m_A}{r_A} = -\,G\frac{m_A}{x} \\ V_B &= -\,G\frac{m_B}{r_B} = -\,G\frac{m_B}{2-x} \end{aligned}\right\} V_{Tot} = V_A + V_B = -\,G\left(\frac{m_A}{x} + \frac{m_B}{2-x}\right)$$

$$V_{Tot} = -\,G\left(\frac{m_A}{x} + \frac{m_B}{2-x}\right) = 6{,}67\,10^{-11}\,\frac{N\,m^{\cancel{2}}}{kg^{\cancel{2}}}\left(\frac{0{,}5}{0{,}38} + \frac{9}{2-0{,}38}\right)\frac{\cancel{kg}}{\cancel{m}} = 4{,}58\,10^{-10}\,\frac{J}{kg}$$

(Oviedo. 2020-2021. Junio.1)

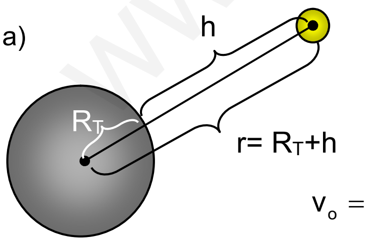
Se desea ubicar un satélite para comunicaciones, cuya masa es m = 1000 kg, en una órbita circular 500 km por encima de la superficie terrestre. Calcule:

a) La velocidad del satélite en dicha órbita.
b) ¿A qué distancia de la Tierra debería situarse el satélite para que su energía mecánica fuera la mitad?

DATOS: G = 6,67 10^{-11} N·m^2·kg^2; R_T = 6370 km; M_T = 5,98 10^{24} kg

Solución:

a)



$$r = R_T + h = (6370 + 500)\,km = 6870\,km = 6{,}87\,10^6 m$$

$$v_o = \sqrt{\frac{G\,M_T}{r}}\ ;\ v_o = \sqrt{\frac{6{,}67\,10^{-11}\,\frac{N\,m^2}{kg^2}\,5{,}98\,10^{24} kg}{6{,}87\,10^6\ m}} = 7620\,\frac{m}{s} = 27\,431\,\frac{km}{h}$$

b) Para una órbita circular: $Ec = \frac{1}{2}\left|Ep\right|$, por tanto: $E_{Mec} = Ec + Ep = \frac{1}{2}Ep = -\frac{1}{2}\frac{G\,m\,M_T}{r}$

$$\left(E_{Mec}\right)_1 = -\frac{1}{2}\frac{G\,m\,M_T}{r_1}\,;\left(E_{Mec}\right)_2 = -\frac{1}{2}\frac{G\,m\,M_T}{r_2}$$

$$\text{Como}: \left(E_{Mec}\right)_2 = \frac{1}{2}\left(E_{Mec}\right)_1;\left(E_{Mec}\right)_2 = -\frac{1}{2}\frac{G\,m\,M_T}{r_2} = -\frac{1}{4}\frac{G\,m\,M_T}{r_1}$$

$$r_2 = 2\,r_1 = 13\,740\ km;\ \text{Por tanto}: h_2 = r_2 - R_T = (13\,740 - 6370)\,km = 7370\,km$$

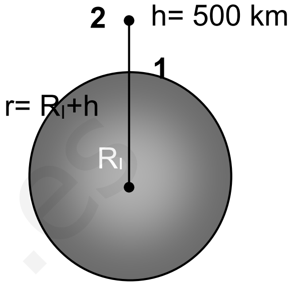
(Oviedo. 2020-2021. Junio.2)

Io, una de las lunas de Júpiter, posee una intensa actividad volcánica y el material lanzado durante las erupciones puede alcanzar alturas de 500 km sobre la superficie. Calcule:

a) La velocidad inicial del material volcánico en la superficie de Io.
b) La velocidad de escape en Io.

DATOS: G = 6,67 10^{-11} N·m^2·kg^2; R_I= 1815 km; M_I = 8,94 10^{22} kg

Solución:



a) **Punto 1**: superficie de Io. **Punto 2**: 500 km por encima de la superficie

$$\left.\begin{aligned} &\text{Punto1}: Ec_1 + Ep_1 = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM_I}{R_I} \\ &\text{Punto2}: Ep_2 = -G\frac{mM_I}{r} \end{aligned}\right\} \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM_I}{R_I} = -G\frac{mM_I}{r}$$

$$v = \sqrt{2GM_I\left(\frac{1}{R_I} - \frac{1}{r}\right)} = \sqrt{2\ 6{,}67 10^{-11}\frac{N\,m^2}{kg^2}\,8{,}94 10^{22}kg\left(\frac{1}{1{,}815\,10^6 m} - \frac{1}{2{,}315\,10^6 m}\right)} = 1{,}2 10^3\,\frac{m}{s} = 4320\,\frac{km}{h}$$

b)

$$v_{Esc} = \sqrt{\frac{2\,G\,M_I}{R_I}} = \sqrt{\frac{2\,.6{,}67\,10^{-11}\,\frac{N\,m^2}{kg^2}8{,}94\,10^{22}kg}{1{,}815\,10^6 m}} = 6570\,\frac{m}{s} = 6{,}57\,\frac{km}{s}$$

(Oviedo. 2020-2021. Julio. 1)

En el año 2053 una astronauta, cuya masa es m = 60 kg, se encuentra explorando el planeta X-1 de masa 10 veces menor y radio 10 veces menor que la Tierra. Calcule:

a) ¿Cuál sería el peso de la astronauta en la superficie del planeta X-1?
b) Unos meses más tarde aterriza con su nave en el planeta Z-1, cuyo radio es también 10 veces menor que el de la Tierra, pero su masa es 100 mayor que la Tierra. Calcule el peso de la astronauta en Z-1.

DATOS: G = 6,67 10^{-11} N·m^2·kg^2

Solución:

a) La gravedad en la superficie de un astro depende de su masa y su radio: $g = G\,\frac{M}{R^2}$

$$\left.\begin{aligned} g_T &= G\,\frac{M_T}{R_T^2} \\ g_{X-1} &= G\,\frac{M_{X-1}}{R_{x-1}^2} \end{aligned}\right\} \text{Como}: R_{X-1} = \frac{R_T}{10}\ \text{ y }\ M_{X-1} = \frac{M_T}{10};\ g_{X-1} = G\,\frac{\frac{M_T}{10}}{\left(\frac{R_T}{10}\right)^2} = 10\,G\,\frac{M_T}{R_T^2} = 10\,g_T$$

b)

$$\left.\begin{aligned} g_T &= G\,\frac{M_T}{R_T^2} \\ g_{Z-1} &= G\,\frac{M_{X-1}}{R_{x-1}^2} \end{aligned}\right\} \text{Como}: R_{Z-1} = \frac{R_T}{10}\ \text{y}\ M_{Z-1} = 100\,M_T;\ g_{Z-1} = G\,\frac{100\,M_T}{\left(\frac{R_T}{10}\right)^2} = 10^4\,G\,\frac{M_T}{R_T^2} = 10^4\,g_T$$

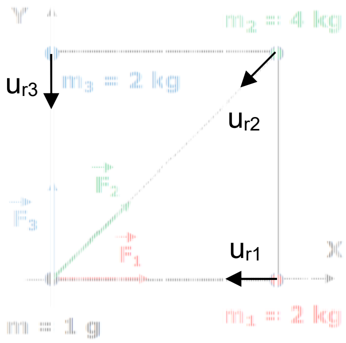
(Oviedo. 2020-2021. Julio.2)

Se colocan en los vértices de un cuadrado de 1 m de lado tres masas puntuales de 2, 4 y 2 kg, cuyas coordenadas son: (0,1); (1,1) y (1,0), respectivamente. Calcule:

a) La fuerza que ejercerán sobre una partícula de 1 g colocada en el cuarto vértice.
b) El trabajo realizado por el campo gravitatorio cuando la partícula se haya desplazado hasta el centro del cuadrado. Explique si este desplazamiento de la partícula es espontáneo o no.

Solución:

a)



Gráfica: **Uniovi**

$$\vec{F} = -\,G\,\frac{mM}{r^2}\,\vec{u_r}$$

$$\overrightarrow{u_{r1}} = -\,\vec{i};\ \overrightarrow{u_{r3}} = -\,\vec{j}$$

$$\overrightarrow{u_{r2}} = -\left(\cos 45^0\right)\vec{i} - \left(\mathrm{sen}\ 45^0\right)\vec{j} = -\,0{,}707\,\vec{i} - 0{,}707\,\vec{j}$$

$$\vec{F_1} = -\,G\,\frac{m m_1}{r_1^2}\,\overrightarrow{u_{r1}} = -\,G\,\frac{m m_1}{r_1^2}\left(-\vec{i}\right) = 6{,}67\,10^{-11}\,\frac{N\,\cancel{m^2}}{\cancel{kg^2}}\,\frac{10^{-3}\,\cancel{kg}\ \ 2\,\cancel{kg}}{1^2\,\cancel{m^2}}\,\vec{i} = \left(1{,}33\,10^{-13}\right)\vec{i}\ \ (N)$$

$$\vec{F_3} = -\,G\,\frac{m m_3}{r_3^2}\,\overrightarrow{u_{r3}} = -\,G\,\frac{m m_3}{r_3^2}\left(-\vec{j}\right) = 6{,}67\,10^{-11}\,\frac{N\,\cancel{m^2}}{\cancel{kg^2}}\,\frac{10^{-3}\,\cancel{kg}\ \ 2\,\cancel{kg}}{1^2\,\cancel{m^2}}\,\vec{j} = \left(1{,}33\,10^{-13}\right)\vec{j}\ \ (N)$$

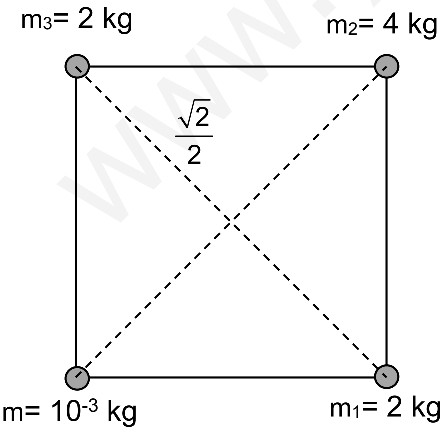
$$\vec{F_2} = -\,G\,\frac{m m_2}{r_2^2}\,\overrightarrow{u_{r2}} = -G\,\frac{m m_2}{r_2^2}\left(-0{,}707\,\vec{i} - 0{,}707\,\vec{j}\right) = 6{,}67\,10^{-11}\,\frac{N\,\cancel{m^2}}{\cancel{kg^2}}\,\frac{10^{-3}\,\cancel{kg}\ \ 4\,\cancel{kg}}{\left(\sqrt{2}\right)^2\,\cancel{m^2}}\left(0{,}707\,\vec{i} + 0{,}707\,\vec{j}\right)$$

$$\vec{F_2} = \left(9{,}43\,10^{-14}\right)\vec{i} + \left(9{,}43\,10^{-14}\right)\vec{j}\,(N)$$

$$\overrightarrow{F_{Tot}} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = \left(1{,}33\,10^{-13}\right)\vec{i} + \left[\left(9{,}43\,10^{-14}\right)\vec{i} + \left(9{,}43\,10^{-14}\right)\vec{j}\right] + \left(1{,}33\,10^{-13}\right)\vec{j}$$

$$\overrightarrow{F_{Tot}} = \left(2{,}27\,10^{-13}\right)\vec{i} + \left(2{,}27\,10^{-13}\right)\vec{j}\ \ (N);\ \ F_{Tot} = 3{,}21\ \ 10^{-13}(N)$$

b) $W = -\,\Delta Ep = Ep_1 - Ep_2$ Considerando que el punto 1 está en el origen de coordenadas y que el punto 2 es está situado en el centro del cuadrado:



$$Ep_{Tot} = Ep_1 + Ep_2 + Ep_3 = -G\,m\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3}\right)$$

$$Ep_{(1)} = -6{,}67\,10^{-11}\,\frac{N\,m^{\cancel{2}}}{\cancel{kg^2}}\,10^{-3}\,\cancel{kg}\left(\frac{2}{1} + \frac{4}{\sqrt{2}} + \frac{2}{1}\right)\frac{\cancel{kg}}{\cancel{m}} = -\,4{,}55\,10^{-13}\,J$$

$$Ep_{(2)} = -6{,}67\,10^{-11}\,\frac{N\,m^{\cancel{2}}}{\cancel{kg^2}}\,10^{-3}\,\cancel{kg}\left(\frac{2+4+2}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)\frac{\cancel{kg}}{\cancel{m}} = -7{,}55\,10^{-13}\,J$$

$$W = Ep_1 - Ep_2 = -\,4{,}55\,10^{-13}\,J - \left(-7{,}55\,10^{-13}\right)J = 3\,10^{-13}(J)$$

Las masas se desplazan de forma espontánea si su energía potencial disminuye.

Como en el origen la energía potencial es mayor ($-\,4{,}55\,10^{-13}$ J) que en el centro ($-7{,}55\,10^{-13}$ J), la masa se desplazará espontáneamente sin necesidad de aportar energía externa.

(Oviedo. 2019-2020. Junio.1)

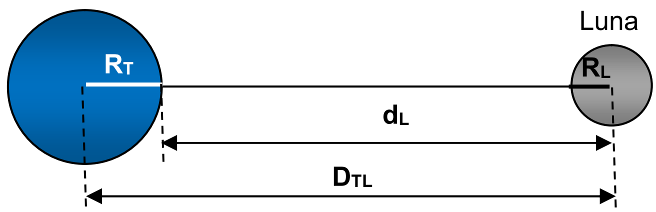
Suponiendo que la masa de una persona es de 75 kg y que la distancia Tierra - Luna es $D_{T\text{-}L}$ = 3,84 10^5 km, calcule:

a) La fuerza gravitatoria que ejerce la Luna sobre una persona situada sobre la superficie terrestre.
b) La relación entre dicha fuerza y la ejercida por la Tierra sobre la misma persona.
c) Compare los valores de la velocidad de escape en las superficies de la Tierra y de la Luna.

DATOS: G = 6,67 10^{-11} N·m²·kg²; M_L = 7,35 10^{22} kg; R_L = 1740 km; R_T = 6370 km; M_T = 5,98 10^{24} kg

Solución:

a)



$$d_L = D_{TL} - R_T = \left(3{,}84\,10^5 - 6370\right)\text{km} = 3{,}78\,10^5\ \text{km}$$

$$F_L = G\,\frac{M_L\,m}{d_L^2} = 6{,}67\,.10^{-11}\,\frac{\text{N}\,\cancel{\text{m}^2}}{\text{kg}\cancel{^2}}\,\frac{7{,}35\,.10^{22}\,\cancel{\text{kg}}\ 75\,\cancel{\text{kg}}}{(3{,}78\,10^8)^2\,\cancel{\text{m}^2}} = 2{,}57\,10^{-3}\text{N}$$

b)

$$\left.\begin{aligned} F_T &= G\,\frac{M_T\,m}{R_T^2}\\ F_L &= G\,\frac{M_L\,m}{d_L^2}\end{aligned}\right\}\ \frac{F_T}{F_L} = \frac{G\,\dfrac{M_T\,m}{R_T^2}}{F_L} = \frac{6{,}67\,.10^{-11}\,\dfrac{\cancel{\text{N}}\,\cancel{\text{m}^2}}{\text{kg}\cancel{^2}}\,\dfrac{5{,}98\,10^{24}\,\cancel{\text{kg}}\ 75\,\cancel{\text{kg}}}{(6{,}370\,10^6)^2\,\cancel{\text{m}^2}}}{2{,}57\,10^{-3}\,\cancel{\text{N}}} = 2{,}87\,10^5$$

$$\boxed{F_T \approx 300\,000\,F_L}$$

c)

$$v_e = \sqrt{2\,\frac{GM}{R}} = \sqrt{2\,G}\sqrt{\frac{M}{R}}\left\{\begin{aligned} v_L &= 1{,}15\,10^{-5}\sqrt{\frac{\text{N}\,\text{m}^2}{\text{kg}^2}}\sqrt{\frac{7{,}35\,10^{22}\text{kg}}{1{,}74\,10^6\text{m}}} = 2363{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 2{,}36\,\frac{\text{km}}{\text{s}}\\ v_T &= 1{,}15\,10^{-5}\sqrt{\frac{\text{N}\,\text{m}^2}{\text{kg}^2}}\sqrt{\frac{5{,}98\,10^{24}\text{kg}}{6{,}37\,10^6\text{m}}} = 11142\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 11{,}14\,\frac{\text{km}}{\text{s}}\end{aligned}\right.$$

$$\frac{v_T}{v_L} = \frac{11{,}14\,\cancel{\frac{\text{km}}{\text{s}}}}{2{,}36\,\cancel{\frac{\text{km}}{\text{s}}}} = 4{,}75\,;\ \boxed{v_T \approx 5 v_L}$$

(Oviedo. 2019-2020. Junio.2)

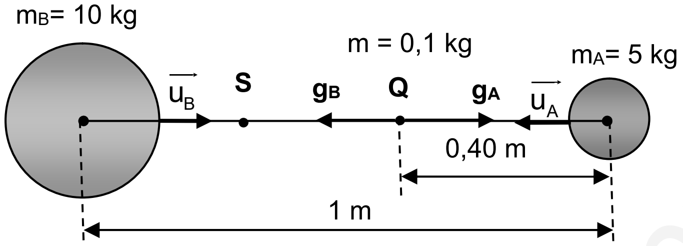
Dos esferas A y B, con masas respectivas m_A = 5 kg y m_B = 10 kg, se encuentran en reposo a una distancia entre sus centros de 1 m. Una pequeña bola, de masa m = 100 g, se deja en reposo en un punto Q del segmento que une A con B y a una distancia de 40 cm del centro de A. Asuma que las únicas fuerzas que actúan sobre la bola son las fuerzas gravitatorias debidas a las esferas A y B. Calcule:

a) La intensidad de campo gravitatorio en el punto Q en que se sitúa inicialmente la bola.
b) El trabajo realizado por el campo gravitatorio cuando la bola se haya desplazado hasta el punto S del mismo segmento y que dista 80 cm del centro de la esfera B. Razone si este desplazamiento de la bola será espontáneo.
c) Busque el punto de equilibrio entre ambas esferas para la pequeña bola de masa m.

DATOS: G = 6,67 10^{-11} N·m²·kg²

Solución:

a)

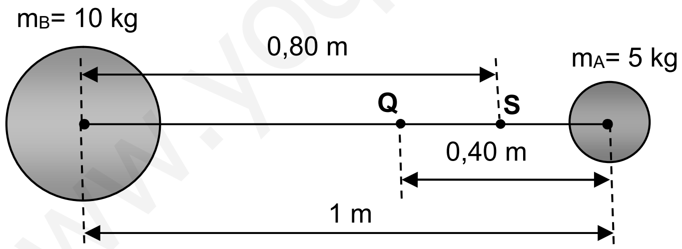


$$\vec{g}_A = -G\frac{m_A}{r_A^2}\,\overrightarrow{u_A} = -6,67\,.10^{-11}\frac{N\,\cancel{m^2}}{kg^{\cancel{2}}}\frac{5\,\cancel{kg}}{0,40^2\,\cancel{m^2}}\left(-\vec{i}\right) = 2,08\,10^{-9}\,\vec{i}\left(\frac{N}{m^2}\right)$$

$$\vec{g}_B = -G\frac{m_B}{r_B^2}\,\overrightarrow{u_B} = -6,67\,.10^{-11}\frac{N\,\cancel{m^2}}{kg^{\cancel{2}}}\frac{10\,\cancel{kg}}{0,60^2\,\cancel{m^2}}\left(\vec{i}\right) = -1,85\,10^{-9}\,\vec{i}\left(\frac{N}{m^2}\right)$$

$$\vec{g}_{Tot} = \vec{g}_A + \vec{g}_B = \left(2,08\,10^{-9}\,\vec{i} - 1,85\,10^{-9}\,\vec{i}\,\right)\frac{N}{m^2} = 0,23\,\vec{i}\,\frac{N}{m^2}$$

b)



$$W = -\Delta Ep = -(Ep_{(Q)} - Ep_{(S)}) = Ep_{(S)} - Ep_{(Q)}$$

Para calcular la energía potencial en cada punto deberemos calcular la energía potencial debida a cada masa y sumarlas:

$$\left.\begin{aligned} Ep_A &= -G\frac{m\,m_A}{r_A} \\ Ep_B &= -G\frac{m\,m_B}{r_B} \end{aligned}\right\} Ep_{Tot} = -G\,m\left(\frac{m_A}{r_A} + \frac{m_B}{r_B}\right)$$

Para el primer punto (Q):

$$Ep_{(Q)} = -G\,m\left(\frac{m_A}{r_{A(Q)}} + \frac{m_B}{r_{B(Q)}}\right) = -6,67\,10^{-11}\frac{N\,m^{\cancel{2}}}{\cancel{kg}^{\cancel{2}}}0,1\,\cancel{kg}\left(\frac{5}{0,40} + \frac{10}{0,60}\right)\frac{\cancel{kg}}{\cancel{m}} = -1,95\,.10^{-10}\ J$$

Para el segundo punto (S):

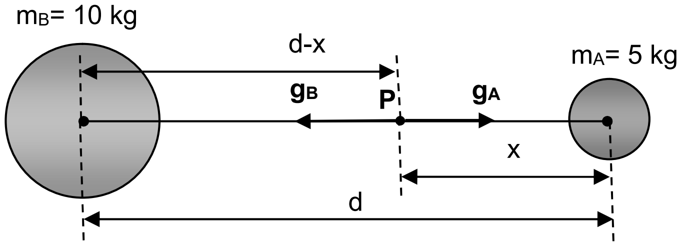
$$Ep_{(S)} = -G\,m\left(\frac{m_A}{r_{A(S)}} + \frac{m_B}{r_{B(S)}}\right) = -6,67\,10^{-11}\frac{N\,m^{\cancel{2}}}{\cancel{kg}^{\cancel{2}}}0,1\,\cancel{kg}\left(\frac{5}{0,20} + \frac{10}{0,80}\right)\frac{\cancel{kg}}{\cancel{m}} = -2,50\,.10^{-10}\ J$$

Luego el trabajo realizado será:

$$W = -\Delta Ep = -(Ep_{(s)} - Ep_{(Q)}) = Ep_{(Q)} - Ep_{(S)} = -1{,}95\,10^{-10}\,J + 2{,}50\,10^{-10}\,J = 5{,}5\,10^{-11}\,J$$

Como el trabajo es positivo la masa va desde un punto de mayor energía potencial a otro de menor energía, pierde energía potencial, por lo que irá espontáneamente.

c) Si imaginamos que el punto buscado está situado a una distancia x de la masa A:



$$\left.\begin{aligned} g_A &= G\,\frac{m_A}{x^2} \\ g_B &= G\,\frac{m_B}{(d-x)^2} \end{aligned}\right\} g_A = g_B;\ G\,\frac{m_A}{x^2} = G\,\frac{m_B}{(d-x)^2};\ \frac{x}{d-x} = \sqrt{\frac{m_A}{m_B}} = \sqrt{\frac{5\,\cancel{kg}}{10\,\cancel{kg}}} = 0{,}7071$$

$$\frac{x}{1-x} = 0{,}7071;\ x = 0{,}41\,m$$

(Oviedo. 2019-2020. Julio.1)

La aceleración de la gravedad en la superficie de Urano tiene un valor de 8.9 m/s^2. Calcule:

a) El radio medio de Urano.
b) El peso en Urano de un objeto cuyo peso en la superficie de la Tierra es 1100 N.
c) La velocidad de escape de la superficie de Urano.

DATOS: G = 6,67 10^{-11} N·m^2 kg^{-2}; R_T = 6370 km, M_T = 5,98 10^{24} kg; M_U = 8,68 10^{25} kg

Solución:

a) El valor de la aceleración de la gravedad en un planeta depende de la masa y radio del planeta y para Urano será:

$$g_U = G\frac{M_U}{R_U^2}$$

$$R_U = \sqrt{\frac{G\,M_U}{g_U}} = \sqrt{\frac{6{,}67\,10^{-11}\,\frac{N\,m^2}{kg^2}\,8{,}68\,10^{25}\,kg}{8{,}9\,\frac{m}{s^2}}} = 2{,}55\,10^7\,m = 25\,500\,km$$

b)

$$\left.\begin{aligned} P_U &= m\,g_U \\ P_T &= m\,g_T \end{aligned}\right\} \frac{P_U}{P_T} = \frac{g_U}{g_T};\ P_U = P_T\,\frac{g_U}{g_T} = 1100\,N\,\frac{8{,}9\,\frac{\cancel{m}}{\cancel{s^2}}}{9{,}8\,\frac{\cancel{m}}{\cancel{s^2}}} = 999\,N$$

NOTA: Se supone conocido el valor de la gravedad en la superficie terrestre, aunque podría calcularse (se dan los datos en el enunciado) a partir de: $g_T = G\dfrac{M_T}{R_T^2}$

c)

$$\left.\begin{aligned} v_e &= \sqrt{2\,\frac{GM_U}{R_U}} \\ g_U &= G\frac{M_U}{R_U^2};\ \frac{GM_U}{R_U} = g_U\,R_U \end{aligned}\right\} v_e = \sqrt{2\,g_U\,R_U} = \sqrt{2\,.\,8{,}9\,\frac{m}{s^2}\,2{,}55\,10^7 m} = 21\,305\,\frac{m}{s} = 21{,}3\,\frac{km}{s}$$

Oviedo. 2019-2020. Julio. 2)

Un satélite para comunicaciones se encuentra describiendo una órbita circular alrededor de la Tierra con una velocidad de 6000 m/s. Calcule:

a) ¿A qué distancia sobre la superficie de la Tierra se desplaza el satélite?
b) ¿A qué velocidad se desplazaría si estuviera moviéndose en torno a Venus describiendo una órbita circular a una distancia de 900 km sobre la superficie de dicho planeta?
c) La distancia entre los centros de Venus y la Tierra es de 0,27 UA. ¿En qué punto de la recta que los une la intensidad del campo gravitatorio terrestre anularía a la del venusiano? Dibuja ambos campos en dicho punto

DATOS: G = 6.67 10^{-11} N·m^2 kg^{-2}; R_T= 6370 km; M_T= 5,98 10^{24} kg; R_V = 6052 km; M_V= 4,87 10^{24} kg; 1 UA= 1,50 10^{11} m.

Solución:

a)

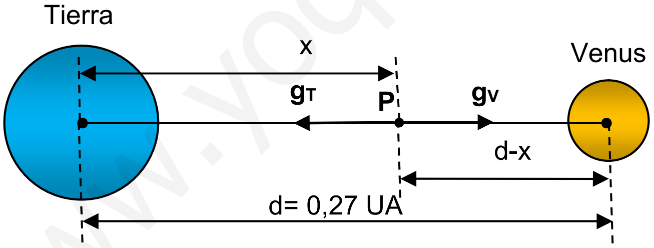
$$v_o = \sqrt{\frac{G\,M}{r}}\ ;\ r = \frac{G\,M}{V_0^2} = \frac{6,67\,10^{-11}\,\frac{N\,m^2}{kg^2}\,5,98\,10^{24}\,kg}{\left(6\,10^3\right)^2\,\frac{m^2}{s^2}} = 1,11\ 10^7\ m = 11\ 100\,km$$

$$d = r - R_T = (11\ 100 - 6370)\,km = 4730\,km$$

b)

$$v_o = \sqrt{\frac{G\,M_V}{r_V}} = \sqrt{\frac{6,67\,10^{-11}\,\frac{N\,m^2}{kg^2}\,4,87\,10^{24}\,kg}{6,952\,10^6\,m}} = 6836\,\frac{m}{s} = 6,84\,\frac{km}{s}$$

c)



$$\left.\begin{aligned} g_T &= G\,\frac{m_T}{x^2} \\ g_V &= G\,\frac{m_v}{(d-x)^2} \end{aligned}\right\} g_T = g_V;\ \cancel{G}\,\frac{m_T}{x^2} = \cancel{G}\,\frac{m_V}{(d-x)^2}\,;\,\frac{x}{d-x} = \sqrt{\frac{m_T}{m_V}} = \sqrt{\frac{5,98\,10^{24}\ \cancel{kg}}{4,87\,10^{24}\ \cancel{kg}}} = 1,228$$

$$\frac{x}{0,27-x} = 1,228;\ x = 0,1423\ UA\ ;\ 0,1423\ \cancel{UA}\ \frac{1,50\,10^6\,km}{1\ \cancel{UA}} = 2,14\,10^6\,km$$