Para factorizar un polinomio hay distintos métodos y, frecuentemente, hay que emplear más de uno pero, en general, trabajarás menos y lo harás más rápidamente si sigues el orden en que se te han expuesto.

Veamos qué puede ocurrir conforme el polinomio tiene mayor grado:

Grado 1: Un polinomio de primer grado, $Ax + B$, no se puede descomponer en producto de polinomios de grado menor que el suyo, lo más que puede ocurrir es que se pueda sacar algún factor común de los coeficientes.

Ejemplo 7: $4x + 6 = 2\cdot(2x + 3)$.

Siempre que se pueda se debe dejar el polinomio con coeficientes enteros. En el ejemplo anterior, es mejor dejar $2x + 3$ que, el producto, $2\cdot(x + 3/2)$.

Grado 2: Lo primero, si se puede, es sacar factor común; esto hará más fácil e incluso innecesario los pasos siguientes.

Ejemplo 8: $5x^2 + 10x = 5x\cdot(x + 2)$

Ejemplo 9: $18x^2 - 50 = 2\cdot(9x^2 - 25)$ *Continúa en el ejemplo 10*

A continuación, si se da alguna de las circunstancias contempladas en los pasos 2º (diferencia de cuadrados), 3º (trinomio cuadrado perfecto) y 4º (el coeficiente de x^2 es 1) ahorrarás tiempo si te das cuenta de ello; si no, tienes dos posibilidades, aplicar el paso 5º, o el 6º. La ventaja del 5º es que se va a lo seguro.

Ejemplo 10:	$2\cdot(9x^2 - 25)$	*Hay una diferencia de cuadrados*	$2\cdot(9x^2 - 25) = 2\cdot(3x + 5)\cdot(3x - 5)$
Ejemplo 11:	$9x^2 - 30x + 25$	*Es un trinomio cuadrado perfecto*	$9x^2 - 30x + 25 = (3x - 5)^2$
Ejemplo 12:	$x^2 + 2x - 15$	*Por tanteo*	$x^2 + 2x - 15 = (x + 5)\cdot(x - 3)$
Ejemplo 13:	$10x^2 + 7x - 12$	*Hallando sus raíces*	$10x^2 + 7x - 12 = (5x - 4)\cdot(2x + 3)$ VER →

Es importante tener presente que hay polinomios de segundo grado que son *irreducibles* a

Resumen:

Para factorizar un polinomio de segundo grado, $Ax^2 + Bx + C$, siendo $A \neq 0$:

1º) Sacar factor común:

$$a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b + c).$$

2º) Ver si es una diferencia de cuadrados:

$$a^2 - b^2 = (a + b)\cdot(a - b)$$

3º) Ver si es un trinomio cuadrado perfecto:

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

4º) Si el coeficiente de x^2 es 1 inténtalo por tanteo:

$$x^2 + Sx + P = (x + a)\cdot(x + b)$$

si $a\cdot b = P$ y $a + b = S$

5º) Si han fallado los métodos anteriores, halla las raíces x_1 x_2 (resolución de ecuación de 2º grado) y sustituye en: $Ax^2 + Bx + C = A\cdot(x - x_1)\cdot(x - x_2)$

ESTE MÉTODO ES EL MÁS SEGURO

6º) También puedes intentar encontrar divisores de la forma $(x \pm a)$ por la regla de Ruffini:

$$Ax^2 + Bx + C = (x \pm a)\cdot C(x)$$

Factorización de $10x^2 + 7x - 12$

Sus raíces son:

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4\cdot 10\cdot(-12)}}{2\cdot 10} = \begin{cases} x_1 = 4/5 \\ x_2 = -3/2 \end{cases}$$

Como $Ax^2 + Bx + C = A\cdot(x - x_1)\cdot(x - x_2)$

$$\begin{aligned} 10x^2 + 7x - 12 &= 10\cdot(x - 4/5)\cdot(x + 3/2) = \\ &= 5\cdot(x - 4/5)\cdot 2\cdot(x + 3/2) = \\ &= (5x - 4)\cdot(2x + 3) \end{aligned}$$

producto de polinomios de primer grado por no tener raíces reales.

Ejemplo 14: $x^2 + 3x + 4$ *1º tanteo y 2º hallando sus raíces* $x^2 + 3x + 4$ = *Es irreducible*

Grado 3 : Lo primero, como siempre si se puede, hay que sacar factor común; hará más fáciles los pasos siguientes.

Ejemplo 15: $5x^3 - 15x^2 = 5x^2\cdot(x - 3)$

Ejemplo 16: $2x^3 - 10x - 24 = 2\cdot(x^3 - 5x - 12)$ *Continúa en el ejemplo 17*

Para factorizar un polinomio de tercer grado, hay que acudir al paso 6º (Ruffini) y si tiene alguna raíz entera a, el polinomio quedaría como producto de $(x - a)$ por un polinomio de 2º grado, el cociente de haberlo dividido por $(x - a)$.

Ejemplo 17: $2\cdot(x^3 - 5x - 12) = 2\cdot(x - 3)\cdot(x^2 + 3x + 4)$ *No se puede factorizar más.*

Ejemplo 18: $9x^3 - 21x^2 - 5x + 25 = (x + 1)\cdot(9x^2 - 30x + 25) =$
$= (x + 1)\cdot(3x - 5)^2$

Grado 4, 5, …: Para factorizar un polinomio de grado mayor que 3 en el que no se pueda sacar factor común, actuamos como en el de tercer grado (Ruffini) pero ahora habría que hacerlo más veces.

Ejemplo 19: $5x^4 - 10x^3 + 10x - 5 = 5\cdot(x^4 - 2x^3 + 10x - 1) =$
$= 5\cdot(x - 1)\cdot(x^3 - x^2 - x + 1) =$
$= 5\cdot(x - 1)\cdot(x - 1)\cdot(x^2 - 1) =$
$= 5\cdot(x - 1)\cdot(x - 1)\cdot(x + 1)\cdot(x - 1) = 5\cdot(x - 1)^3\cdot(x + 1)$

Ejemplo 20: $2x^6 + 4x^5 - 38x^4 - 16x^3 + 120x^2 = 2x^2\cdot(x^4 + 2x^3 - 19x^2 - 8x + 60) = 2x^2\cdot(x - 2)\cdot(x^3 + 4x^2 - 11x - 30) =$
$= 2x^2\cdot(x - 2)\cdot(x + 2)\cdot(x^2 + 2x - 15) =$
$= 2x^2\cdot(x - 2)\cdot(x + 2)\cdot(x - 3)\cdot(x + 5)$

Si un polinomio de 4º grado no tuviese términos de grado impar se podrían utilizar los pasos 2º a 5º considerando que la indeterminada es x^2 (en vez de x) y así descomponerlo en producto de polinomios de 2º grado.

Ejemplo 21: $3x^4 - 12 = 3\cdot(x^4 - 4) = 3\cdot(x^2 + 2)\cdot(x^2 - 2) = 3\cdot(x^2 + 2)\cdot(x + \sqrt{2})\cdot(x - \sqrt{2})$

Ejemplo 22: $4x^4 - 20x^2 + 16 = 4\cdot(x^4 - 5x^2 + 4) = 4\cdot(x^2 - 1)\cdot(x^2 - 4) = 4\cdot(x + 1)\cdot(x - 1)\cdot(x + 2)\cdot(x - 2)$

OJO

Factorización de polinomios de Tercer grado grado, $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, siendo $A \neq 0$:

1º) Sacar factor común:
$a\cdot b + a\cdot c = a(b + c)$.

5º) Sabiendo sus raíces, x_1, x_2, x_3, no hay pega:

$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = A\cdot(x - x_1)\cdot(x - x_2)\cdot(x - x_3)$

El problema es que NO hay una fórmula sencilla para hallar las raíces de los polinomios de tercer grado.

6º) Por la regla de Ruffini (encontrar divisores $(x - a)$):
$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = (x - a)\cdot C(x)$ *y* $C(x)$ *es de segundo grado*

EJERCICIOS FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

Ejercicio 1:

a) $5x^5 - x^4 + 3x^2 = x^2 \cdot (5x^3 - x^2 + 3)$

b) $2x^3 + x = x \cdot (2x^2 + 1)$

c) $6x^3 - 15x^2 + 3x = 3x \cdot (2x^2 - 5x + 1)$

d) $2x^2 + 3x + 2$ *No tiene factores en común.*

Ejercicio 2:

a) $x^2 + 9$ = *No es una diferencia de cuadrados.*

b) $50x^2 - 8 = 2 \cdot (5x + 2) \cdot (5x - 2)$

c) $9x^2 - 2 = (3x + \sqrt{2}) \cdot (3x - \sqrt{2})$

d) $x^5 - x = x \cdot (x^2 + 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)$

Ejercicio 3:

a) $x^2 + 16 + 8x = (x + 4)^2$

b) $x^7 - 2x^4 + x = x \cdot (x^3 - 1)^2$

c) $9x^2 + 12x - 4$ = *No es el cuadrado de un binomio.*

d) $2x^4 + 2\sqrt{6}\, x^2 + 3 = (\sqrt{2}\, x^2 + \sqrt{3})^2$

Ejercicio 4:

a) $x^2 - 4x - 12 = (x + 2) \cdot (x - 6)$

b) $x^2 + 5 - 6x = (x - 1) \cdot (x - 5)$

c) $x^2 + 2x + 3$ = *No se puede.*

d) $x^2 - 2x - 35 = (x + 5) \cdot (x - 7)$

Ejercicio 5:

a) $6x^2 - x - 2 = 6 \cdot (x + 1/2) \cdot (x - 2/3) = (2x + 1) \cdot (3x - 1)$

b) $5x^2 - 6x + 5$ = *No se puede, es irreducible.*

c) $15x^2 + 2x - 8 = (3x - 2) \cdot (5x + 4)$

d) $P(x) = (x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x - 1/3) \cdot 3 = 3x^3 - x^2 - 3x + 1$

Ejercicio 6:

a) $x^3 - 1 = (x - 1) \cdot (x^2 + x + 1)$

b) $2x^3 - 5x^2 - 9 = (x - 3) \cdot (2x^2 + x + 3)$

c) $x^3 - 3x^2 + 4 = (x + 1) \cdot (x - 2)^2$

d) $x^4 + 2x^3 - 2x - 1 = (x - 1)^3 \cdot (x + 1)$