- **Tema 1: Límites y continuidad**
- **Tema 2: La derivada y sus aplicaciones**

EXAMEN

1. La función del nivel de rendimiento físico (en porcentaje) de un participante en una carrera de montaña, que tiene una duración de 5 horas, es:

$$R(x) = x^3 - 7{,}5x^2 + 12x + 13$$

siendo x el tiempo de la carrera en horas. Se pide, justificando la respuesta:

a) ¿Con qué nivel de rendimiento empieza?
b) ¿Con qué nivel de rendimiento acaba la carrera?
c) Indica en qué momentos crece y decrece el rendimiento del participante de forma razonada.
d) ¿Cuándo alcanza el máximo rendimiento?

2. En un periodo de 10 años, los espectadores de una determinada serie de una televisión autonómica, expresada en decenas de miles de personas, siguió la función:

$$E(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & si \quad 0 \leq x < 2 \\ \\ \frac{-3x+30}{4} & si \quad 2 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

donde x representa el número de años transcurridos desde la primera emisión. Justificando las respuestas:

a) ¿Es continua la función E(x)?
b) ¿Cuál fue la audiencia al principio de la emisión de la serie?
c) ¿Cuándo crece y cuándo decrece esta función?
d) Si se decide dejar de emitir cuando la audiencia sea de 15000 personas, ¿en qué momento se dejaría de emitir?

3. La ganancia, en miles de euros, que, para una empresa, produce un determinado puesto de trabajo, viene dada por la función:

$$g(x) = \begin{cases} 0{,}4x + 3 & si \quad 0 \leq x \leq 10 \\ \\ \frac{5x+27}{x+1} & si \quad x > 10 \end{cases}$$

donde x es el tiempo transcurrido, en años, desde la creación de dicho puesto.

a) ¿Es continua la función al llegar el décimo año? ¿Cuál es la ganancia en este año?
b) ¿Es derivable?
c) Estudia el crecimiento y decrecimiento de las ganancias.
d) ¿Cuándo se alcanza el máximo de las ganancias?
e) ¿Qué sucede con las ganancias a medida que transcurre el tiempo?

1. La función del nivel de rendimiento físico (en porcentaje) de un participante en una carrera de montaña, que tiene una duración de 5 horas, es:

$$R(x) = x^3 - 7{,}5x^2 + 12x + 13$$

siendo x el tiempo de la carrera en horas. Se pide, justificando la respuesta:

a) ¿Con qué nivel de rendimiento empieza?

b) ¿Con qué nivel de rendimiento acaba la carrera?

c) Indica en qué momentos crece y decrece el rendimiento del participante de forma razonada.

d) ¿Cuándo alcanza el máximo rendimiento?

Solución:

a) $R(0) = 0^3 - 7{,}5 \cdot 0^2 + 12 \cdot 0 + 13 = 13$, es decir, comienza con un 13 % de su rendimiento.

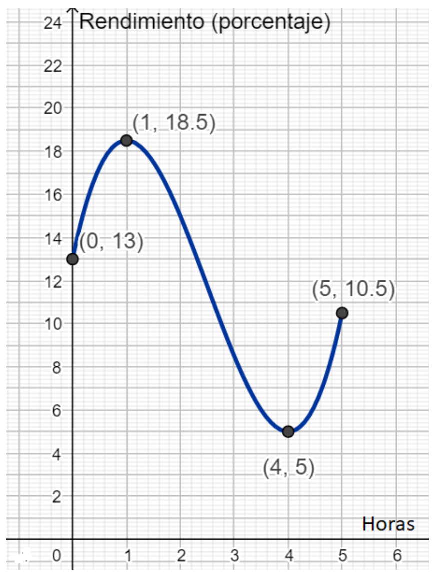
b) $R(5) = 5^3 - 7{,}5 \cdot 5^2 + 12 \cdot 5 + 13 = 10{,}5$, es decir, termina la carrera a un 10,5 % de su rendimiento.

c) Para analizar la monotonía (cuándo crece y decrece la función), se debe estudiar la derivada:

- Calculamos la primera derivada: $R´(x) = 3x^2 - 15x + 12$
- Igualamos la primera derivada a cero: $3x^2 - 15x + 12 = 0$ y resolviendo obtenemos $x = 1$, $x = 4$

Resumimos la información para poder analizar la derivada:

	$(0,1)$	$x = 1$	$(1,4)$	$x = 4$	$(4,5)$
1ª derivada	$R´(0{,}5) > 0$		$R´(3) < 0$		$R´(4{,}5) > 0$
$R(x)$ es ...	$\nearrow$ Creciente durante la 1ª hora $R(0) = 13\,\%$	Máximo rendimiento $R(1) = 18{,}5\,\%$	$\searrow$ Decreciente entre la 1ª y la 4ª hora	Mínimo rendimiento $R(4) = 5\,\%$	$\nearrow$ Creciente de la 4ª hora hasta el final $R(5) = 10{,}5\,\%$



2. En un periodo de 10 años, los espectadores de una determinada serie de una televisión autonómica, expresada en decenas de miles de personas, siguió la función:

$$E(x) = \begin{cases} x^2+2 & si \quad 0 \le x < 2 \\ \frac{-3x+30}{4} & si \quad 2 \le x \le 10 \end{cases}$$

donde x representa el número de años transcurridos desde la primera emisión. Justificando las respuestas:

a) ¿Es continua la función E(x)?

b) ¿Cuál fue la audiencia al principio de la emisión de la serie?

c) ¿Cuándo crece y cuándo decrece esta función?

d) Si se decide dejar de emitir cuando la audiencia sea de 15000 personas, ¿en qué momento se dejaría de emitir?

Solución:

a) Para demostrar si la función es continua, calculamos los límites laterales en $x = 2$

- $\lim\limits_{x\to 2^-} (x^2+2) = 6$
- $\lim\limits_{x\to 2^+} \left(\dfrac{-3x+30}{4}\right) = 6$
- $E(2) = \dfrac{-3\cdot 2+30}{4} = 6$

Como los dos límites laterales son iguales e iguales a $E(2)$, la función $E(x)$ es continua en $x = 2$.

b) $E(0) = 0^2 + 2 = 2$, es decir, hubo 20 000 espectadores al principio.

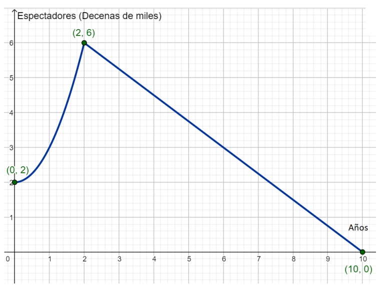
c) Para analizar cuándo crece y decrece, realizamos la derivada y analizamos su signo:

$$E(x) = \begin{cases} x^2+2 & si\ 0 \le x < 2 \\ \dfrac{-3x+30}{4} & si\ 2 \le x \le 10 \end{cases} \Longrightarrow E'(x) = \begin{cases} 2x & si\ 0 \le x < 2 \\ \dfrac{-3}{4} & si\ 2 < x \le 10 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} E'(2^-) = 2\cdot 2 = 4 \\ E'(2^+) = \dfrac{-3}{4} = -0{,}75 \end{cases}$$

Como las dos derivadas laterales no son iguales, $E(x)$ no es derivable en $x = 2$

Resumimos la información para poder analizar la derivada:

	$(0,2)$	$x=2$	$(2,10)$
1ª derivada	$E'(1) > 0$		$R'(3) = -6 < 0$
$R(x)$ es ...	$\nearrow$ Creciente durante los dos primeros años $E(0)=2$	Máximo número de espectadores $E(2)=6$	$\searrow$ Decreciente entre el 2º año y el 10º año $E(10)=0$



d) Si se decide dejar emitir cuando los espectadores son de 15000, $E(x) = 1{,}5$, sustituyendo en las dos expresiones obtenemos:

- $x^2 + 2 = 1{,}5 \Rightarrow x^2 = -0{,}5$, algo que no puede ser nunca cierto porque cualquier valor al cuadrado es siempre positivo.
- $\frac{-3x+30}{4} = 1{,}5 \Rightarrow -3x + 30 = 6 \Rightarrow x = 8$, es decir, al 8º año se debería deja de emitir.

3. La ganancia, en miles de euros, que, para una empresa, produce un determinado puesto de trabajo, viene dada por la función:

$$g(x) = \begin{cases} 0{,}4x + 3 & si \quad 0 \leq x \leq 10 \\ \frac{5x+27}{x+1} & si \quad x > 10 \end{cases}$$

donde x es el tiempo transcurrido, en años, desde la creación de dicho puesto.

a) ¿Es continua la función al llegar el décimo año? ¿Cuál es la ganancia en este año?

b) ¿Es derivable?

c) Estudia el crecimiento y decrecimiento de las ganancias.

d) ¿Cuándo se alcanza el máximo de las ganancias?

e) ¿Qué sucede con las ganancias a medida que transcurre el tiempo?

Solución:

a) Para demostrar si la función es continua, calculamos los límites laterales en $x = 10$

- $\lim\limits_{x \to 10^-} (0{,}4x + 3) = 7$
- $\lim\limits_{x \to 10^+} \left(\dfrac{5x+27}{x+1}\right) = 7$
- $g(10) = 0{,}4 \cdot 10 + 3 = 7$

Como los dos límites laterales son iguales e iguales a $g\,(10)$, la función $g(x)$ es continua en $x = 10$.

b) Para analizar cuándo crece y decrece, realizamos la derivada y analizamos su signo:

$$g(x) = \begin{cases} 0{,}4x + 3 & si\ 0 \leq x \leq 10 \\ \frac{5x+27}{x+1} & si\ x > 10 \end{cases} \Longrightarrow g\acute{}(x) = \begin{cases} 0{,}4 & si\ 0 \leq x < 10 \\ \dfrac{-22}{(x+1)^2} & si\ x > 10 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} g\acute{}\,(10^-) = 0{,}4 \\ g\acute{}\,(10^+) = \dfrac{-22}{(10+1)^2} = -0{,}18 \end{cases}$$

Como las dos derivadas laterales no son iguales, $g(x)$ no es derivable en $x = 10$

c) Resumimos la información para poder analizar la derivada:

	$(0, 10)$	$x = 10$	$(10, \infty)$
1ª derivada	$g\acute{}(5) > 0$		$g\acute{}(20) < 0$
$g(x)$ es ...	$\nearrow$ Creciente durante los dos primeros años $g(0) = 3$	Máximo de ganancias $g(10) = 7$	$\searrow$ Decreciente a partir del 10º año

d) El máximo de ganancias se alcanza el 10º año con 7 mil euros.

e) A medida que transcurre el tiempo: $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{5x+27}{x+1}\right) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\cong} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x}{x} = 5$, es decir, aunque pasen muchos años las ganancias se estabilizarán alrededor de los 5 mil euros.