

1. **[1 punto]** Simplifica todo lo posible la siguiente expresión trigonométrica: $\frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$.
2. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas. Basta dar las soluciones en el intervalo $[0^\circ, 360^\circ)$.
- a) **[1 punto]** $6 \cos^2 x + \cos 2x = 1$.
- b) **[1 punto]** $\cos 2x = \cos(x + 90^\circ)$.
3. Contesta a los siguientes apartados sobre números complejos.
- a) **[1 punto]** Determinar el valor de a para que el módulo del número complejo $\frac{a+i}{2+i}$ sea igual a 2.
- b) **[1 punto]** Expresar el resultado de la siguiente operación en forma polar: $(-1+i)^5 \cdot (2+2i)$.
4. **[2 puntos]** Calcula las raíces cúbicas del siguiente número complejo: $\frac{1+i}{1-i}$. Escríbelas en forma polar y binómica.
Nota: para ello debes expresarlo primero en forma polar.
5. **[1 punto]** Halla el punto simétrico del punto $A(2, -2)$ respecto del punto $M(-3, 1)$. Representa gráficamente la situación propuesta.
6. **[2 puntos]** Dados los vectores $\vec{u} = (3, x)$, $\vec{v} = (y, -6)$, hallar los valores de x y de y para que los dos vectores sean perpendiculares y el módulo de $\vec{u}$ sea igual a $\sqrt{13}$.

Soluciones

1. [1 punto] Simplifica todo lo posible la siguiente expresión trigonométrica: $\frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$.

$$\frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}{1 + \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}{\frac{1 + \cos x + 1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}{\frac{2}{1 + \cos x}} = \frac{(1 - \cos x) \cancel{(1 + \cos x)}}{2 \cancel{(1 + \cos x)}} = \frac{1 - \cos x}{2}.$$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas. Basta dar las soluciones en el intervalo $[0^\circ, 360^\circ)$.

a) [1 punto] $6 \cos^2 x + \cos 2x = 1 \Rightarrow 6 \cos^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x = 1 \Rightarrow 6 \cos^2 x + \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 6 \cos^2 x + \cos^2 x - 1 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow 8 \cos^2 x = 2 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{1}{2}.$

Si $\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \arccos \frac{1}{2} \Rightarrow x = \begin{cases} x = 60^\circ \\ x = 300^\circ \end{cases}$. Si $\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \arccos \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 120^\circ \\ x = 240^\circ \end{cases}.$

b) [1 punto] $\cos 2x = \cos(x + 90^\circ) \Rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = \cos x \cdot \cos 90^\circ - \sin x \cdot \sin 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = -\sin x \Rightarrow 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = -\sin x \Rightarrow 2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$. Entonces:

$$\sin x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Si $\sin x = 1 \Rightarrow x = \arcsin 1 \Rightarrow x = 90^\circ$. Si $\sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \arcsin \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 210^\circ \\ x = 330^\circ \end{cases}.$

3. Contesta a los siguientes apartados sobre números complejos.

a) [1 punto] Determinar el valor de a para que el módulo del número complejo $\frac{a+i}{2+i}$ sea igual a 2.

$$\frac{a+i}{2+i} = \frac{(a+i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{2a - ai + 2i - i^2}{2^2 - i^2} = \frac{2a - ai + 2i + 1}{4 + 1} = \frac{(2a+1) + (2-a)i}{5} = \frac{2a+1}{5} + \frac{2-a}{5}i.$$

Entonces:

$$\sqrt{\left(\frac{2a+1}{5}\right)^2 + \left(\frac{2-a}{5}\right)^2} = 2 \Rightarrow \frac{4a^2 + 4a + 1}{25} + \frac{4 - 4a + a^2}{25} = 4 \Rightarrow \frac{5a^2 + 5}{25} = 4 \Rightarrow 5a^2 + 5 = 100 \Rightarrow$$

 $\Rightarrow 5a^2 = 95 \Rightarrow a^2 = 19 \Rightarrow a = \pm \sqrt{19}.$

b) [1 punto] Expresar el resultado de la siguiente operación en forma polar: $(-1+i)^5 \cdot (2+2i)$.

Halleemos el módulo y el argumento de $-1+i$: $r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{-1} = \operatorname{arctg}(-1) = 135^\circ$.

Entonces: $(-1+i)^5 = \left(\sqrt{2}_{135^\circ}\right)^5 = \sqrt{2^5}_{675^\circ} = 4\sqrt{2}_{675^\circ}.$

Halleemos ahora el módulo y el argumento de $2+2i$: $r = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{2}{2} = \operatorname{arctg} 1 = 45^\circ$

Finalmente: $(-1+i)^5 \cdot (2+2i) = \left(4\sqrt{2}_{675^\circ}\right) \cdot \left(2\sqrt{2}_{45^\circ}\right) = 16_{720^\circ} = 16_{360^\circ} = 16_{0^\circ}.$

4. [2 puntos] Calcula las raíces cúbicas del siguiente número complejo: $\frac{1+i}{1-i}$. Escríbelas en forma polar y binómica.

Es fácil ver que $1+i = \sqrt{2}_{45^\circ}$, $1-i = \sqrt{2}_{315^\circ}$. Por tanto: $\frac{1+i}{1-i} = \frac{\sqrt{2}_{45^\circ}}{\sqrt{2}_{315^\circ}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)_{-270^\circ} = 1_{90^\circ}$.

Entonces tenemos que $\sqrt[3]{\frac{1+i}{1-i}} = \sqrt[3]{1_{90^\circ}} = \sqrt[3]{1}_\beta = 1_\beta$. Los valores de β se obtienen por la fórmula

$\beta = \frac{90^\circ + 360^\circ k}{3}$ donde k se mueve entre 0 y 2. Así pues, las tres raíces que se piden son, en forma polar, 1_{30° , 1_{150° , 1_{270° .

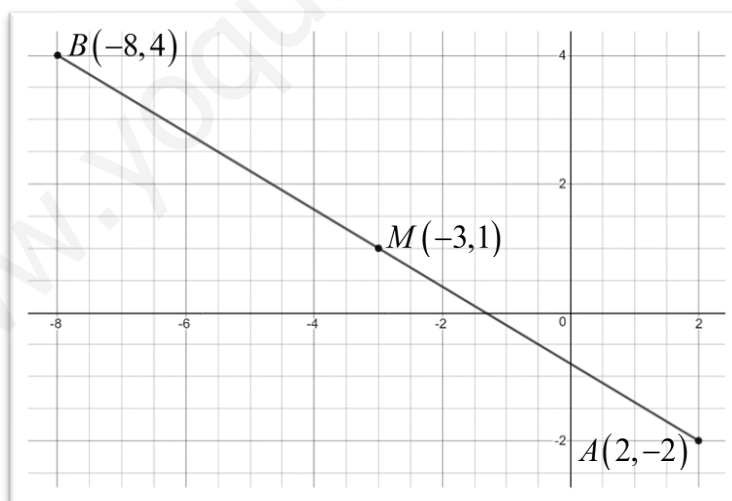
En forma binómica son: $1_{30^\circ} = 1 \cdot (\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $1_{150^\circ} = 1 \cdot (\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $1_{270^\circ} = 1 \cdot (\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ) = -i$.

5. [1 punto] Halla el punto simétrico del punto $A(2, -2)$ respecto del punto $M(-3, 1)$. Representa gráficamente la situación propuesta.

Llamemos $B(x, y)$ al punto simétrico del punto $A(2, -2)$ respecto del punto $M(-3, 1)$. Entonces $M(-3, 1)$ es

el punto medio del segmento que une A con B . Es decir:
$$\begin{cases} \frac{x+2}{2} = -3 \Rightarrow x+2 = -6 \Rightarrow x = -8 \\ \frac{y-2}{2} = 1 \Rightarrow y-2 = 2 \Rightarrow y = 4 \end{cases}$$
. Por tanto, el

punto simétrico del punto $A(2, -2)$ respecto del punto $M(-3, 1)$, es el punto $B(-8, 4)$.



6. [2 puntos] Dados los vectores $\vec{u} = (3, x)$, $\vec{v} = (y, -6)$, hallar los valores de x y de y para que los dos vectores sean perpendiculares y el módulo de $\vec{u}$ sea igual a $\sqrt{13}$.

Al ser perpendiculares, su producto escalar es igual a cero: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow 3y - 6x = 0$. Como el módulo de $\vec{u}$ es

igual a $\sqrt{13}$, tenemos que $\sqrt{3^2 + x^2} = \sqrt{13} \Rightarrow 9 + x^2 = 13 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$. Sustituyendo tenemos:

Si $x = -2 \Rightarrow 3y - 6(-2) = 0 \Rightarrow 3y + 12 = 0 \Rightarrow 3y = -12 \Rightarrow y = -4$.

Si $x = 2 \Rightarrow 3y - 6 \cdot 2 = 0 \Rightarrow 3y - 12 = 0 \Rightarrow 3y = 12 \Rightarrow y = 4$.