1. **[1 punto]** El ángulo α es desconocido pero se sabe que se encuentra en el cuarto cuadrante y que $\frac{1}{\cos\alpha} = 3$, halla el valor exacto, racionalizado y simplificado de $\operatorname{sen}\alpha$ y de $\operatorname{tg}\alpha$.

2. **[2 puntos]** Un globo aerostático se encuentra sujeto al suelo, mediante dos cables de acero, en dos puntos que distan 60 m. El cable más corto mide 80 m y el ángulo que forma el otro cable con el suelo es de 37°. Calcula la medida del otro cable y la altura a la que se encuentra el globo. Realiza un dibujo de la situación.

3. **[2 puntos]** Resolver la siguiente ecuación trigonométrica y el siguiente sistema de ecuaciones trigonométricas, dando las soluciones que se encuentren en el intervalo $[0^\circ,\ 360^\circ)$ (las del sistema darlas solamente en el primer cuadrante).

$$\text{a) } \operatorname{tg} x + 2\operatorname{sen} x = 0 \ \ ; \ \text{b) } \begin{cases} \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \\ \cos x \cdot \operatorname{sen} y = \dfrac{\sqrt{6}}{4} \end{cases}$$

4. **[3 puntos]** Realiza las siguientes operaciones con números complejos y expresa el resultado en forma binómica:

$$\text{a) } (3-i)(-2+4i)-(6-2i) \ \ ; \ \text{b) } \frac{1-2i}{3-i} \ \ ; \ \text{c) } \left(\frac{2}{1-i}\right)^4$$

5. **[2 puntos]** Halla las cuatro raíces: $\sqrt[4]{4-3i}$

Soluciones

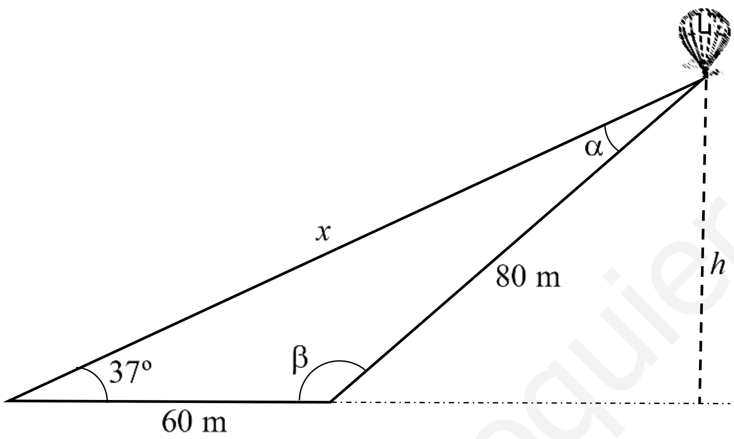
1. **[1 punto]** El ángulo α es desconocido pero se sabe que se encuentra en el cuarto cuadrante y que $\dfrac{1}{\cos\alpha}=3$, halla el valor exacto, racionalizado y simplificado de $\operatorname{sen}\alpha$ y de $\operatorname{tg}\alpha$.

$\dfrac{1}{\cos\alpha}=3 \Rightarrow \cos\alpha=\dfrac{1}{3} \Rightarrow \cos^2\alpha=\dfrac{1}{9}$. Como $\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, tenemos:

$\operatorname{sen}^2\alpha+\dfrac{1}{9}=1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha=1-\dfrac{1}{9} \Rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha=\dfrac{8}{9} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha=-\dfrac{\sqrt{8}}{3}=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ (el signo es negativo porque el ángulo se encuentra en el cuarto cuadrante). $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{-2\sqrt{2}/3}{1/3}=-2\sqrt{2}$

2. **[2 puntos]** Un globo aerostático se encuentra sujeto al suelo, mediante dos cables de acero, en dos puntos que distan 60 m. El cable más corto mide 80 m y el ángulo que forma el otro cable con el suelo es de 37°. Calcula la medida del otro cable y la altura a la que se encuentra el globo. Realiza un dibujo de la situación.

Usando el dibujo y aplicando el teorema de los senos, tenemos:



$\dfrac{80}{\operatorname{sen}37^\circ}=\dfrac{60}{\operatorname{sen}\alpha} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha=\dfrac{60\cdot\operatorname{sen}37^\circ}{80} \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{sen}\alpha=0,45 \Rightarrow \alpha=26,83^\circ$.

Por tanto $\beta=180^\circ-37^\circ-26,83^\circ=116,17^\circ$.

Usando otra vez el teorema de los senos:

$\dfrac{80}{\operatorname{sen}37^\circ}=\dfrac{x}{\operatorname{sen}116,17^\circ} \Rightarrow$

$\Rightarrow x=\dfrac{80\cdot\operatorname{sen}116,17^\circ}{\operatorname{sen}37^\circ} \Rightarrow x=119,3$ metros.

Además, $\operatorname{sen}37^\circ=\dfrac{h}{x} \Rightarrow h=119,3\cdot\operatorname{sen}37^\circ=71,8$ m.

3. **[2 puntos]** Resolver la siguiente ecuación trigonométrica y el siguiente sistema de ecuaciones trigonométricas, dando las soluciones que se encuentren en el intervalo $[0^\circ,\,360^\circ)$ (las del sistema darlas solamente en el primer cuadrante).

a) $\operatorname{tg}x+2\operatorname{sen}x=0 \Rightarrow \dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos x}+2\operatorname{sen}x=0 \Rightarrow \operatorname{sen}x+2\operatorname{sen}x\cos x=0 \Rightarrow \operatorname{sen}x\left(1+2\cos x\right)=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}x=0 \Rightarrow x=0^\circ\,;\,x=180^\circ \\ \cos x=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow x=120^\circ\,;\,x=240^\circ \end{cases}$$

b) $\begin{cases} \operatorname{sen}x\cdot\operatorname{sen}y=\dfrac{\sqrt{2}}{4} \\ \cos x\cdot\operatorname{sen}y=\dfrac{\sqrt{6}}{4} \end{cases}$. Dividiendo ambas ecuaciones tenemos: $\dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos x}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}}{4}} \Rightarrow \operatorname{tg}x=\dfrac{4\sqrt{2}}{4\sqrt{6}} \Rightarrow \operatorname{tg}x=\sqrt{\dfrac{2}{6}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{tg}x=\sqrt{\dfrac{1}{3}} \Rightarrow \operatorname{tg}x=\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x=30^\circ$. Sustituyendo en la primera ecuación:

$$\operatorname{sen}30^\circ\cdot\operatorname{sen}y=\dfrac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}y=\dfrac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \operatorname{sen}y=\dfrac{2\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \operatorname{sen}y=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y=45^\circ$$

4. **[3 puntos]** Realiza las siguientes operaciones con números complejos y expresa el resultado en forma binómica:

a) $$\frac{1+i}{(2+i)(3-i)}=\frac{1+i}{6-2i+3i+1}=\frac{1+i}{7+i}=\frac{(1+i)(7-i)}{(7+i)(7-i)}=\frac{7-i+7i+1}{7^2-i^2}=\frac{8+6i}{49+1}=\frac{8+6i}{50}=\frac{4}{25}+\frac{3}{25}i$$

b) $$\frac{1-2i}{3-i}=\frac{(1-2i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\frac{3+i-6i-2i^2}{3^2-i^2}=\frac{3-5i+2}{9+1}=\frac{5-5i}{10}=\frac{5}{10}-\frac{5}{10}i=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$$

c) $$\left(\frac{2}{1-i}\right)^2=\left(\frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right)^2=\left(\frac{2+2i}{1+1}\right)^2=\left(\frac{2+2i}{2}\right)^2=(1+i)^2=1^2+2i+i^2=1+2i-1=2i$$

5. **[2 puntos]** Halla las cuatro raíces: $\sqrt[4]{4-3i}$

Calcularemos primero el módulo y el argumento del número complejo que se encuentra en el interior de la raíz.

$$4-3i=\left[\begin{array}{l} r=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5 \\ \theta=\operatorname{arctg}\frac{-3}{4}=143{,}13^{\circ} \end{array}\right]=5_{143{,}13^{\circ}}.$$

Entonces $\sqrt[4]{4-3i}=\sqrt[4]{5_{143{,}13^{\circ}}}=\sqrt[4]{5}_{\alpha}$.

Los valores de α se obtienen mediante la fórmula $\alpha=\dfrac{143{,}13^{\circ}+360^{\circ}k}{4}$, donde k se mueve entre 0 y 3. Por tanto, las cuatro raíces que se piden son: $r_1=\sqrt[4]{5}_{35{,}78^{\circ}}$, $r_2=\sqrt[4]{5}_{125{,}78^{\circ}}$, $r_3=\sqrt[4]{5}_{215{,}78^{\circ}}$, $r_4=\sqrt[4]{5}_{305{,}78^{\circ}}$.