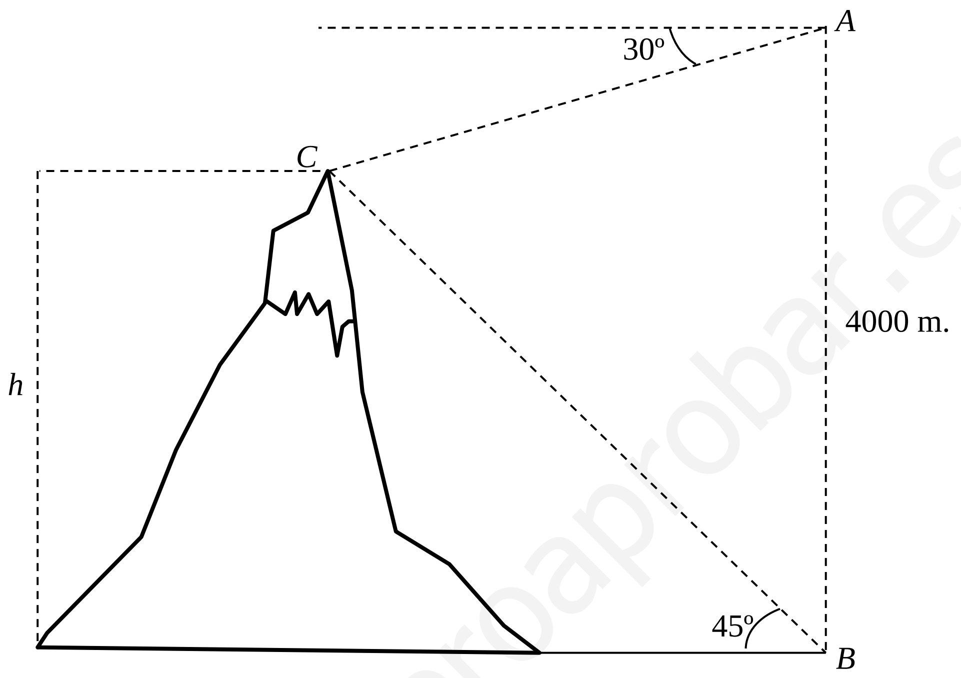
1. **[1 punto]** El ángulo x es desconocido, pero se sabe que se encuentra en el primer cuadrante. Se sabe además que $\dfrac{4}{\mathrm{tg}^2 x} = 5$. Hallar el <u>valor exacto, racionalizado y simplificado</u> de $\operatorname{sen} x$ y de $\cos x$.

2. **[1 punto]** Utilizando las medidas del siguiente dibujo, halla la altura h de la montaña.



3. **[1,5 puntos]** Un avión que vuela a 3000 metros de altura, en un instante determinado, ve un pueblo A bajo un ángulo de 40° con respecto a la horizontal de vuelo (ángulo de depresión) y otro pueblo B bajo un ángulo de 15°. ¿Qué distancia hay entre A y B? Realiza un dibujo adecuado donde se represente esta situación.

4. **[1 punto]** Demuestra que es cierta la siguiente identidad: $\dfrac{1-\cos 2x}{\operatorname{sen}^2 x + \cos 2x} = 2\,\mathrm{tg}^2 x$

5. **[1 punto]** Simplifica de manera razonada, paso a paso, la expresión siguiente: $\dfrac{2\cos\left(45^{\circ}+\alpha\right)\cdot\cos\left(45^{\circ}-\alpha\right)}{\cos 2\alpha}$

6. **[2 puntos]** Resolver la siguiente ecuación trigonométrica y el siguiente sistema de ecuaciones trigonométricas, dando las soluciones que se encuentren en el intervalo $\left[0^{\circ}, 360^{\circ}\right)$ (las del sistema darlas solamente en el primer cuadrante).

a) $\cos 2x + \cos x \operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x + 1$; b) $\begin{cases} \operatorname{sen} x + \cos y = 1 \\ \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

7. **[1,5 puntos]** Realiza las siguientes operaciones con números complejos. Expresa el resultado en forma binómica (el resultado del apartado a) exprésalo también en forma polar).

a) $3-6i-\left(2+4i\right)\left(-2+3i\right)$; b) $\dfrac{-3-i}{i\left(2+i\right)}$; c) $\left(i-\dfrac{1}{i}\right)^3$

8. **[1 punto]** Las soluciones de la ecuación $x-2+\dfrac{2}{x}=0$ son complejas. Hállalas y simplifícalas al máximo.

Soluciones

1. El ángulo x es desconocido, pero se sabe que se encuentra en el primer cuadrante. Se sabe además que $\dfrac{4}{\text{tg}^2 x}=5$ Hallar el <u>valor exacto, racionalizado y simplificado</u> de $\text{sen}\, x$ y de $\cos x$.

$$\frac{4}{\text{tg}^2 x}=5 \Rightarrow \text{tg}^2 x=\frac{4}{5} \Rightarrow \text{tg}\, x=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$. Además, $1+\text{tg}^2 x=1+\dfrac{4}{5}=\dfrac{9}{5}$.

Como $1+\text{tg}^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \dfrac{9}{5}=\dfrac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x=\dfrac{5}{9} \Rightarrow \cos x=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

Finalmente $\text{tg}\, x=\dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x} \Rightarrow \text{sen}\, x=\text{tg}\, x \cos x=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{3}=\dfrac{2\cdot 5}{5\cdot 3} \Rightarrow \text{sen}\, x=\dfrac{2}{3}$

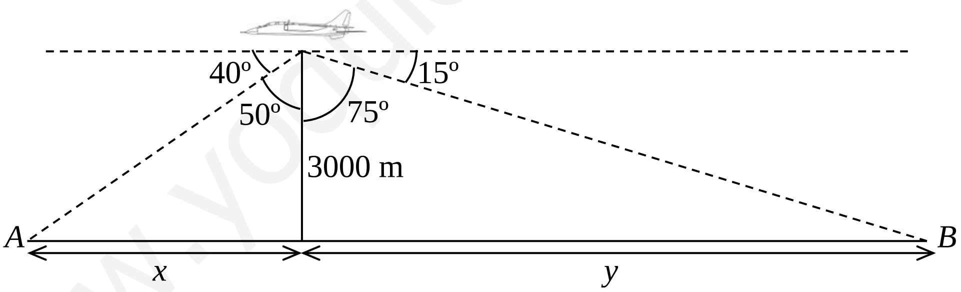
2. Observando el dibujo es claro que $\alpha=BAC=90^{\circ}-30^{\circ}=60^{\circ}$, y que $\beta=ABC=90^{\circ}-45^{\circ}=45^{\circ}$. Por tanto $\gamma=ACB=180^{\circ}-60^{\circ}-45^{\circ}=75^{\circ}$. Usando el teorema de los senos en el triángulo ABC tenemos:

$$\frac{4000}{\text{sen}\,\gamma}=\frac{\overline{BC}}{\text{sen}\,\alpha} \Rightarrow \overline{BC}=\frac{4000\cdot\text{sen}\,60^{\circ}}{\text{sen}\,75^{\circ}} \cong 3586{,}3 \text{ metros.}$$

Entonces, en el triángulo rectángulo formado por el pico de la montaña, $\overline{BC}$ y la horizontal podemos hallar h:

$$\text{sen}\,45^{\circ}=\frac{h}{\overline{BC}} \Rightarrow h=\overline{BC}\cdot sen45^{\circ} \Rightarrow h=2535{,}9 \text{ metros.}$$

3. Un dibujo representativo de la situación puede ser el siguiente:



Entonces:

$$\text{tg}\,50^{\circ}=\frac{x}{3000} \Rightarrow x=3000\cdot\text{tg}\,50^{\circ} \Rightarrow x \cong 3575{,}26\text{ m} \;;\; \text{tg}\,75^{\circ}=\frac{y}{3000} \Rightarrow y=3000\cdot\text{tg}\,75^{\circ} \Rightarrow x \cong 11196{,}15\text{ m}$$

Por tanto, la distancia entre A y B es $x+y=3575{,}26+11196{,}15=14771{,}15$ metros.

Nota: hay otra posible solución si los dos pueblos están situados "al mismo lado" del avión. En este caso, la distancia entre los dos pueblos es igual a la diferencia entre las dos cantidades anteriores: $7620{,}89$ metros.

4. Demuestra que es cierta la siguiente identidad: $\dfrac{1-\cos 2x}{\text{sen}^2 x+\cos 2x}=2\,\text{tg}^2 x$

$$\frac{1-\cos 2x}{\text{sen}^2 x+\cos 2x}=\frac{1-\left(\cos^2 x-\text{sen}^2 x\right)}{\text{sen}^2 x+\cos^2 x-\text{sen}^2 x}=\frac{1-\cos^2 x+\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}=\frac{\text{sen}^2 x+\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}=\frac{2\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}=2\text{tg}^2 x$$

5. $$\frac{2\cos(45^o+\alpha)\cdot\cos(45^o-\alpha)}{\cos 2\alpha}=\frac{2(\cos 45^o\cos\alpha-\operatorname{sen}45^o\operatorname{sen}\alpha)\cdot(\cos 45^o\cos\alpha+\operatorname{sen}45^o\operatorname{sen}\alpha)}{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}=$$

$$=\frac{2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\alpha\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\alpha\right)}{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}=\frac{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha)\cdot(\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha)}{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}=$$

$$=\frac{2\cdot\frac{2}{4}\cdot(\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha)}{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}=2\cdot\frac{2}{4}=\frac{4}{4}=1$$

6. a) $\cos 2x+\cos x\operatorname{sen}2x=2\operatorname{sen}x+1\Rightarrow\cos^2x-\operatorname{sen}^2x+\cos x\cdot 2\operatorname{sen}x\cos x=2\operatorname{sen}x+1\Rightarrow$

$\Rightarrow\cos^2x-\operatorname{sen}^2x+2\operatorname{sen}x\cos^2x=2\operatorname{sen}x+1\Rightarrow 1-\operatorname{sen}^2x-\operatorname{sen}^2x+2\operatorname{sen}x\left(1-\operatorname{sen}^2x\right)=2\operatorname{sen}x+1\Rightarrow$

$\Rightarrow -2\operatorname{sen}^2x+2\operatorname{sen}x-2\operatorname{sen}^3x=2\operatorname{sen}x\Rightarrow 2\operatorname{sen}^3x+2\operatorname{sen}^2x=0\Rightarrow 2\operatorname{sen}^2x(\operatorname{sen}x+1)=0\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases}2\operatorname{sen}^2x=0\Rightarrow\operatorname{sen}x=0\Rightarrow x=0^o\ ;\ x=180^o\\ \operatorname{sen}x+1=0\Rightarrow\operatorname{sen}x=-1\Rightarrow x=270^o\end{cases}$$

b) $\begin{cases}\operatorname{sen}x+\cos y=1\\ \operatorname{sen}^2x+\cos^2y=\frac{1}{2}\end{cases}$. Despejando de la primera ecuación: $\operatorname{sen}x=1-\cos y$. Sustituyendo en la segunda:

$$(1-\cos y)^2+\cos^2y=\frac{1}{2}\Rightarrow 1-2\cos y+\cos^2y+\cos^2y=\frac{1}{2}\Rightarrow 2-4\cos y+2\cos^2y+2\cos^2y=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cos^2y-4\cos y+1=0\Rightarrow\cos y=\frac{4\pm\sqrt{16-4\cdot4\cdot1}}{2\cdot4}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

Por tanto, como $\cos y=\frac{1}{2}$, entonces $y=60^o$.

Como $\operatorname{sen}x=1-\cos y\Rightarrow\operatorname{sen}x=1-\frac{1}{2}\Rightarrow\operatorname{sen}x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=30^o$.

7. a) $3-6i-(2+4i)(-2+3i)=3-6i-(-4+6i-8i-12)=3-6i+4+2i+12=19-4i$

Módulo: $r=\sqrt{19^2+(-4)^2}=\sqrt{377}$. Argumento: $\theta=\operatorname{arctg}\frac{-4}{19}=360^o-11{,}89^o=348{,}11^o$.

Forma polar: $\sqrt{377}_{348{,}11^o}$

b) $\frac{-3-i}{i(2+i)}=\frac{-3-i}{2i-1}=\frac{-3-i}{-1+2i}=\frac{(-3-i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)}=\frac{3+6i+i-2}{(-1)^2-(2i)^2}=\frac{1+7i}{1+4}=\frac{1+7i}{5}=\frac{1}{5}+\frac{7}{5}i$

c) $\left(i-\frac{1}{i}\right)^3=\left(i-\frac{-i}{i(-i)}\right)^3=\left(i-\frac{-i}{-i^2}\right)^3=\left(i-\frac{-i}{1}\right)^3=(i+i)^3=(2i)^3=8i^3=8(-i)=-8i$

8. $x-2+\frac{2}{x}=0\Rightarrow x^2-2x+2=0$. El discriminante de la ecuación de segundo grado es:

$\Delta=(-2)^2-4\cdot1\cdot2=4-8=-4$. Por tanto, las soluciones de la ecuación son las siguientes:

$$x=\frac{2\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{4}\sqrt{-1}}{2}=\frac{2\pm2\sqrt{-1}}{2}=\frac{2\pm2i}{2}=\frac{2}{2}\pm\frac{2i}{2}=\begin{cases}x_1=1+i\\ x_2=1-i\end{cases}$$