1. **[2 puntos]** Partiendo de que α y β son ángulos desconocidos, contesta a las siguientes cuestiones:

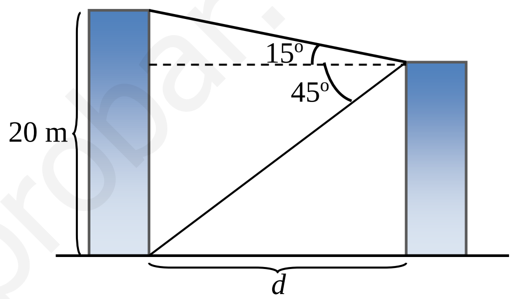
   a) Sabiendo que un ángulo α se encuentra en el cuarto cuadrante y que $\dfrac{1}{\cos\alpha}=3$, halla el <u>valor exacto</u> de $\operatorname{sen}\alpha$ y de $\operatorname{tg}\alpha$.

   b) Siendo $\operatorname{tg}\beta=-\dfrac{2}{5}$, con $90^\circ<\beta<180^\circ$, calcular el <u>valor exacto</u> de $\operatorname{sen}\beta$ y $\cos\beta$.

2. **[2 puntos]** Supongamos que α es un ángulo <u>desconocido</u> del primer cuadrante, tal que $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. Calcula, de manera razonada, el <u>valor exacto</u> de las siguientes razones trigonométricas.

   a) $\operatorname{sen}(180^\circ-\alpha)$; b) $\operatorname{tg}(90^\circ-\alpha)$

3. **[2 puntos]** La altura de una casa es de 20 metros. Desde la parte superior de otro edificio, el ángulo de elevación con el que se ve la parte superior de la primera casa es de 15° y el ángulo de depresión de su parte inferior es de 45°. Hallar la distancia d entre las dos casas. (Ver figura de la derecha).



4. **[2 puntos]** Un globo aerostático se encuentra sujeto al suelo, mediante dos cables de acero, en dos puntos que distan 60 m. El cable más corto mide 80 m y el ángulo que forma el otro cable con el suelo es de 37°. Calcula la medida del otro cable y la altura a la que se encuentra el globo. Realiza un dibujo de la situación.

5. **[2 puntos]** Halla la distancia que hay entre dos barcos C y D, sabiendo que hemos medido la distancia que hay entre dos puntos de la orilla, A y B, obteniendo 450 metros, y que con el teodolito hemos obtenido los siguientes ángulos: $CAD=48^\circ$, $BAD=57^\circ$, $ABC=42^\circ$ y $CBD=53^\circ$. Usa, obligatoriamente, la siguiente

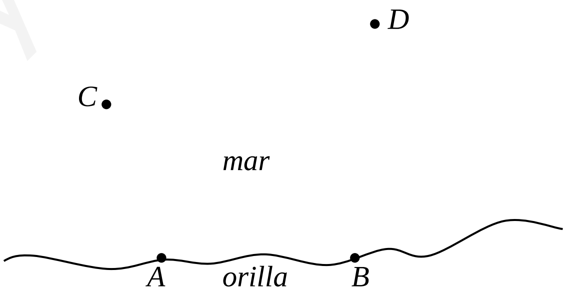


figura para finalizar el dibujo de la situación:

6. **[1 punto]** Demuestra que la identidad correspondiente es cierta:

   a) $\dfrac{\cos x+\operatorname{sen}x}{\cos x-\operatorname{sen}x}-\dfrac{\cos x-\operatorname{sen}x}{\cos x+\operatorname{sen}x}=2\operatorname{tg}2x$; b) $\dfrac{\operatorname{tg}x}{\cos^2 x}=\dfrac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{cotg}x}$

7. **[1 punto]** Simplifica todo lo que puedas la expresión correspondiente:

   a) $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{cotg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{cosec}\alpha}$; b) $2\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-\operatorname{sen}\alpha$

Soluciones

1. **[2 puntos]** Partiendo de que α y β son ángulos desconocidos, contesta a las siguientes cuestiones:

 a) Sabiendo que un ángulo α se encuentra en el cuarto cuadrante y que $\dfrac{1}{\cos\alpha}=3$, halla el <u>valor exacto</u> de $\operatorname{sen}\alpha$ y de $\operatorname{tg}\alpha$.

 De la igualdad conocida $\dfrac{1}{\cos\alpha}=3$, deducimos despejando que $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$. Sustituyendo este último valor en la igualdad fundamental de la trigonometría, $\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, tenemos:

$$\operatorname{sen}^2\alpha+\left(\frac{1}{3}\right)^2=1\Rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha+\frac{1}{9}=1\Rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha=1-\frac{1}{9}\Rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha=\frac{8}{9}\Rightarrow \operatorname{sen}\alpha=-\frac{\sqrt{8}}{3}\Rightarrow \operatorname{sen}\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

 Hemos tomado la solución negativa porque sabemos que el ángulo α se encuentra en el cuarto cuadrante y, en este cuadrante, el seno es negativo.

 Finalmente: $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=\dfrac{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}}\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=-\dfrac{6\sqrt{2}}{3}\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=-2\sqrt{2}$.

 b) Siendo $\operatorname{tg}\beta=-\dfrac{2}{5}$, con $90^{\circ}<\beta<180^{\circ}$, calcular el <u>valor exacto</u> de $\operatorname{sen}\beta$ y $\cos\beta$.

 Como $\operatorname{tg}\beta=-\dfrac{2}{5}$, entonces: $\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}=-\dfrac{2}{5}\Rightarrow \operatorname{sen}\beta=-\dfrac{2}{5}\cos\beta$. Usando otra vez la igualdad fundamental de la trigonometría: $\operatorname{sen}^2\beta+\cos^2\beta=1\Rightarrow\left(-\dfrac{2}{5}\cos\beta\right)^2+\cos^2\beta=1\Rightarrow\dfrac{4\cos^2\beta}{25}+\cos^2\beta=1\Rightarrow\dfrac{29\cos^2\beta}{25}=1\Rightarrow$

 $\Rightarrow 29\cos^2\beta=25\Rightarrow\cos^2\beta=\dfrac{25}{29}\Rightarrow\cos\beta=-\dfrac{5}{\sqrt{29}}\Rightarrow\cos\beta=-\dfrac{5\sqrt{29}}{29}$. Se ha tomado la solución negativa porque $90^{\circ}<\beta<180^{\circ}$ o, lo que es lo mismo, porque el ángulo β se encuentra en el segundo cuadrante, en el cual el coseno es negativo.

 Finalmente: $\operatorname{sen}\beta=-\dfrac{2}{5}\cos\beta\Rightarrow\operatorname{sen}\beta=-\dfrac{2}{\cancel{5}}\cdot\left(-\dfrac{\cancel{5}\sqrt{29}}{29}\right)\Rightarrow\operatorname{sen}\beta=\dfrac{2\sqrt{29}}{29}$.

2. **[2 puntos]** Supongamos que α es un ángulo <u>desconocido</u> del primer cuadrante, tal que $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. Calcula, de manera razonada, el <u>valor exacto</u> de las siguientes razones trigonométricas.

 Antes de nada, haciendo uso de la igualdad fundamental de la trigonometría, tenemos:

$$\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Rightarrow\operatorname{sen}^2\alpha+\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2=1\Rightarrow\operatorname{sen}^2\alpha+\frac{6}{16}=1\Rightarrow\operatorname{sen}^2\alpha+\frac{3}{8}=1\Rightarrow\operatorname{sen}^2\alpha=1-\frac{3}{8}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\operatorname{sen}^2\alpha=\frac{5}{8}\Rightarrow\operatorname{sen}\alpha=\sqrt{\frac{5}{8}}\Rightarrow\operatorname{sen}\alpha=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\Rightarrow\operatorname{sen}\alpha=\frac{\sqrt{5}\sqrt{2}}{2\cdot 2}\Rightarrow\operatorname{sen}\alpha=\frac{\sqrt{10}}{4}.$$

 Hemos tomado la solución positiva porque el ángulo α se encuentra en el primer cuadrante, donde el seno es siempre positivo.

Además, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{\sqrt{10}}{\cancel{4}}}{\frac{\sqrt{6}}{\cancel{4}}} = \dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{60}}{6} = \dfrac{2\sqrt{15}}{6} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{15}}{3}$

Ahora ya es sencillo contestar a los dos apartados que se nos proponen en este ejercicio.

a) $\operatorname{sen}(\pi-\alpha) = \operatorname{sen}(180^{o}-\alpha)$. Esto es porque el ángulo π, en radianes, se corresponde con el ángulo 180^{o} (en grados). Además, los ángulos $180^{o}-\alpha$ y α son suplementarios (suman 180^{o}), con lo que:

$$\operatorname{sen}(\pi-\alpha) = \operatorname{sen}(180^{o}-\alpha) = \operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

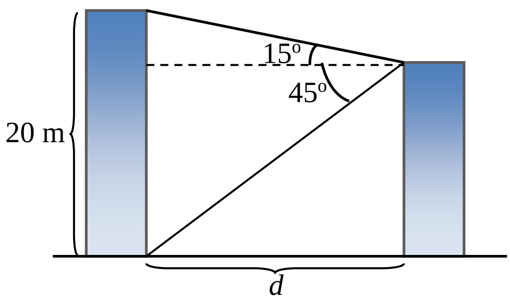
b) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) = \operatorname{tg}(90^{o}-\alpha)$. Esto es porque el ángulo $\dfrac{\pi}{2}$, en radianes, se corresponde con el ángulo 90^{o} (en grados). Además, los ángulos $90^{o}-\alpha$ y α son complementarios (suman 90^{o}), con lo que:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \operatorname{tg}(90^{o}-\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(90^{o}-\alpha)}{\cos(90^{o}-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{\frac{\sqrt{15}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{15}} = \frac{3\sqrt{15}}{15} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

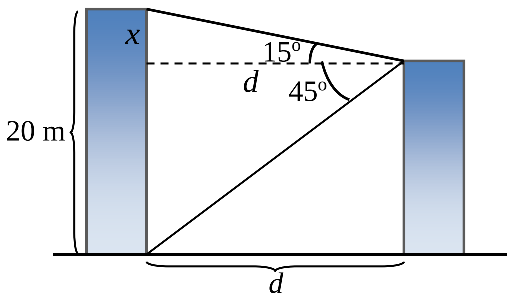
También se puede finalizar así:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \operatorname{tg}(90^{o}-\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(90^{o}-\alpha)}{\cos(90^{o}-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{\cancel{4}}}{\frac{\sqrt{10}}{\cancel{4}}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}\cdot\sqrt{6}}{10} = \frac{\sqrt{60}}{10} = \frac{2\sqrt{15}}{10} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

3. **[2 puntos]** La altura de una casa es de 20 metros. Desde la parte superior de otro edificio, el ángulo de elevación con el que se ve la parte superior de la primera casa es de 15^{o} y el ángulo de depresión de su parte inferior es de 45^{o}. Hallar la distancia d entre las dos casas. (Ver figura de la derecha).



Volvamos a hacer el dibujo añadiendo algunos detalles:



Hemos llamado x a la diferencia de altura entre los dos edificios. Además, la distancia d también es la longitud de la línea discontinua, que divide al triángulo central en dos triángulos rectángulos. Usando estos dos triángulos rectángulos podemos establecer y resolver el siguiente sistema de ecuaciones.

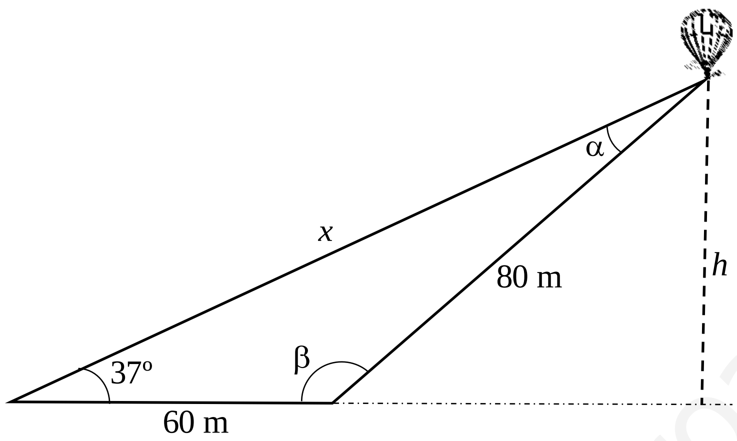
$$\begin{cases} \operatorname{tg}15^{o} = \dfrac{x}{d} \\ \operatorname{tg}45^{o} = \dfrac{20-x}{d} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = \dfrac{x}{\operatorname{tg}15^{o}} \\ d = \dfrac{20-x}{\operatorname{tg}45^{o}} = 20-x \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{\operatorname{tg}15^{o}} = 20-x \Rightarrow x = (20-x)\cdot\operatorname{tg}15^{o} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 20\,\text{tg}15^\circ - x\,\text{tg}15^\circ \Rightarrow x + x\,\text{tg}15^\circ = 20\,\text{tg}15^\circ \Rightarrow x\left(1+\text{tg}15^\circ\right) = 20\,\text{tg}15^\circ \Rightarrow x = \frac{20\,\text{tg}15^\circ}{1+\text{tg}15^\circ} \Rightarrow x \cong 4,23 \text{ m.}$$

Por tanto, $d = \dfrac{x}{\text{tg}15^\circ} \Rightarrow d = \dfrac{4,23}{\text{tg}15^\circ} \Rightarrow d = 15,79$ m.

4. **[2 puntos]** Un globo aerostático se encuentra sujeto al suelo, mediante dos cables de acero, en dos puntos que distan 60 m. El cable más corto mide 80 m y el ángulo que forma el otro cable con el suelo es de 37°. Calcula la medida del otro cable y la altura a la que se encuentra el globo. Realiza un dibujo de la situación.

Usando el dibujo y aplicando el teorema de los senos, tenemos:



$$\frac{80}{\text{sen}\,37^\circ} = \frac{60}{\text{sen}\,\alpha} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \frac{60\cdot\text{sen}\,37^\circ}{80} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen}\,\alpha = 0,45 \Rightarrow \alpha = 26,83^\circ.$$

Por tanto $\beta = 180^\circ - 37^\circ - 26,83^\circ = 116,17^\circ$.

Usando otra vez el teorema de los senos:

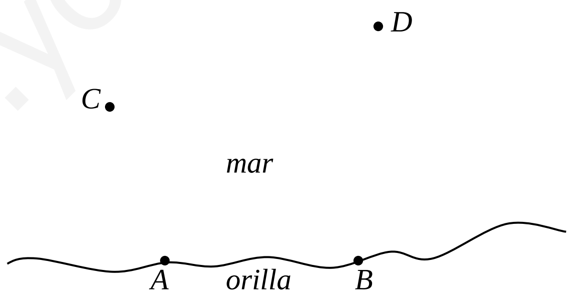
$$\frac{80}{\text{sen}\,37^\circ} = \frac{x}{\text{sen}\,116,17^\circ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{80\cdot\text{sen}\,116,17^\circ}{\text{sen}\,37^\circ} \Rightarrow x = 119,3 \text{ metros.}$$

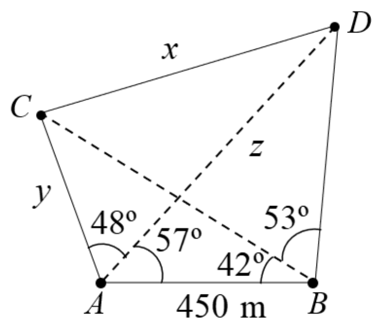
Además:

$$\text{sen}\,37^\circ = \frac{h}{x} \Rightarrow h = 119,3\cdot\text{sen}\,37^\circ = 71,8 \text{ m.}$$

5. **[2 puntos]** Halla la distancia que hay entre dos barcos C y D, sabiendo que hemos medido la distancia que hay entre dos puntos de la orilla, A y B, obteniendo 450 metros, y que con el teodolito hemos obtenido los siguientes ángulos: $CAD = 48^\circ$, $BAD = 57^\circ$, $ABC = 42^\circ$ y $CBD = 53^\circ$. Usa, obligatoriamente, la siguiente figura para finalizar el dibujo de la situación:



Con los datos que se dan en el enunciado, un dibujo esquemático de la situación sería el siguiente:



Obsérvese que hemos llamado x a la distancia entre los dos barcos, situados en C y D. También hemos llamado y a la longitud del segmento $\overline{AC}$ y z a la longitud del segmento AD. Sin duda habrá varias formas de hacer este problema. Una de ellas es aplicar el teorema de los senos en los triángulos ABC y ABD, con el objetivo de hallar, en primer lugar, la longitud de los segmentos $\overline{AC}=y$, y $\overline{AD}=z$. Vamos allá:

En el triángulo ABC: $\dfrac{y}{\operatorname{sen}42^{\circ}}=\dfrac{450}{\operatorname{sen}C}\Rightarrow y=\dfrac{450\operatorname{sen}42^{\circ}}{\operatorname{sen}33^{\circ}}\Rightarrow y\cong 552{,}86$ m.

En el triángulo ABD: $\dfrac{z}{\operatorname{sen}95^{\circ}}=\dfrac{450}{\operatorname{sen}D}\Rightarrow z=\dfrac{450\operatorname{sen}95^{\circ}}{\operatorname{sen}28^{\circ}}\Rightarrow z\cong 954{,}88$ m.

Finalmente, aplicaremos el teorema del coseno en el triángulo ACD para hallar la distancia entre los dos barcos: $x=\overline{CD}$, que es lo que se pide.

$$x^2=y^2+z^2-2yz\cos 48^{\circ}\Rightarrow x^2=552{,}86^2+954{,}88^2-2\cdot 552{,}86\cdot 954{,}88\cdot\cos 48^{\circ}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2=510961{,}88\Rightarrow x=714{,}82 \text{ m.}$$

6. **[1 punto]** Demuestra que la identidad correspondiente es cierta:

a) $\dfrac{\cos x+\operatorname{sen}x}{\cos x-\operatorname{sen}x}-\dfrac{\cos x-\operatorname{sen}x}{\cos x+\operatorname{sen}x}=2\operatorname{tg}2x$

$$\frac{\cos x+\operatorname{sen}x}{\cos x-\operatorname{sen}x}-\frac{\cos x-\operatorname{sen}x}{\cos x+\operatorname{sen}x}=\frac{(\cos x+\operatorname{sen}x)(\cos x+\operatorname{sen}x)}{(\cos x-\operatorname{sen}x)(\cos x+\operatorname{sen}x)}-\frac{(\cos x-\operatorname{sen}x)(\cos x-\operatorname{sen}x)}{(\cos x-\operatorname{sen}x)(\cos x+\operatorname{sen}x)}=$$
$$=\frac{\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x+2\operatorname{sen}x\cos x}{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}-\frac{\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x-2\operatorname{sen}x\cos x}{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}=\frac{4\operatorname{sen}x\cos x}{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}=\frac{2\cdot 2\operatorname{sen}x\cos x}{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}=$$
$$=\frac{2\operatorname{sen}2x}{\cos 2x}=2\frac{\operatorname{sen}2x}{\cos 2x}=2\operatorname{tg}2x.$$

b) $\dfrac{\operatorname{tg}x}{\cos^2 x}=\dfrac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{cotg}x}$

Este apartado se puede hacer de distintas formas.

Sabemos que, de la igualdad fundamental de la trigonometría, $\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1$, se deduce, dividiendo todos los términos por $\cos^2 x$, que $\operatorname{tg}^2 x+1=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ o, lo que es lo mismo, $1+\operatorname{tg}^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$. Entonces:

$$\frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{cotg}x}=\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}}=\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x\cdot\cos^2 x}=\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{\operatorname{tg}x}{\cos^2 x}$$, tal y como queríamos.

También podemos proceder del siguiente modo. La igualdad $\dfrac{\operatorname{tg}x}{\cos^2 x}=\dfrac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{cotg}x}$, multiplicando en cruz, es equivalente a $\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{cotg}x=\cos^2 x\cdot\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)$. Pero esto es obviamente cierto porque, por un lado, se tiene que $\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{cotg}x=\operatorname{tg}x\cdot\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}=\dfrac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}x}=1$ y, por otro, $\cos^2 x\cdot\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)=\cos^2 x\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}=\dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x}=1$, lo que demuestra que la identidad es cierta.

7. **[1 punto]** Simplifica todo lo que puedas la expresión correspondiente:

a) $$\frac{\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{cotg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{cosec}\alpha}=\frac{\operatorname{sen}\alpha+\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}}{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}+\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}}=\frac{\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}}{\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha}}=\frac{\frac{\operatorname{sen}^2\alpha+\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}}{\frac{\operatorname{sen}^2\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha}}=$$

$$=\frac{\cos\alpha\cdot\cancel{\operatorname{sen}\alpha}\,\cancel{\left(\operatorname{sen}^2\alpha+\cos\alpha\right)}}{\cancel{\operatorname{sen}\alpha}\cdot\cancel{\left(\operatorname{sen}^2\alpha+\cos\alpha\right)}}=\frac{\cos\alpha}{1}=\cos\alpha$$

b) $2\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{sen}\alpha$

Para simplificar esta expresión haremos uso del coseno del ángulo mitad: $\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$.

$$2\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{sen}\alpha=2\operatorname{tg}\alpha\cdot\left(\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\right)^2-\operatorname{sen}\alpha=\cancel{2}\cdot\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{1+\cos\alpha}{\cancel{2}}-\operatorname{sen}\alpha=$$

$$=\frac{\operatorname{sen}\alpha\left(1+\cos\alpha\right)}{\cos\alpha}-\operatorname{sen}\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha}=$$

$$=\frac{\operatorname{sen}\alpha+\cancel{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}-\cancel{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}}{\cos\alpha}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$$