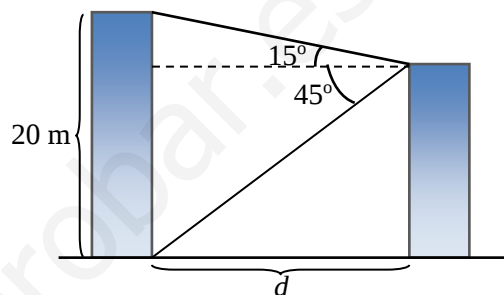


1. Contesta a las siguientes cuestiones:

a) [1 punto] El ángulo α es desconocido, pero se sabe $270^\circ < \alpha < 360^\circ$, y que $\frac{1}{\cos \alpha} = 3$, halla el **valor exacto**, **racionalizado y simplificado** de $\sin \alpha$ y de $\operatorname{tg} \alpha$.

b) [2 puntos] Sabiendo α y β son ángulos del primer cuadrante complementarios (o sea, que $\alpha + \beta = 90^\circ$), y que $\sin \alpha = \frac{2}{3}$, calcula de manera razonada y sin hallar previamente los ángulos α y β , las siguientes razones trigonométricas: $\cos \alpha$, $\cos(\alpha - \beta)$, $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$ y $\cos(-2\alpha)$ (**valores exactos, simplificados y racionalizados**).

2. [2 puntos] La altura de una casa es de 20 metros. Desde la parte superior de otro edificio, el ángulo de elevación con el que se ve la parte superior de la primera casa es de 15° y el ángulo de depresión de su parte inferior es de 45° . Hallar la distancia d entre las dos casas. (Ver figura de la derecha).



3. [2 puntos] Desde un avión que vuela a 3000 metros de altura, en un instante determinado, se ve un pueblo A bajo un ángulo de 40° con respecto a la horizontal de vuelo (ángulo de depresión) y otro pueblo B bajo un ángulo de 15° . ¿Qué distancia hay entre A y B ? Realiza un dibujo adecuado donde se represente esta situación.

4. [1 punto] Halla el **valor exacto** de la operación siguiente: $\sin \frac{2\pi}{3} - \cos \frac{7\pi}{6} + \operatorname{tg} \frac{4\pi}{3} + \operatorname{tg} \frac{11\pi}{6}$.

5. [1 punto] Demuestra la siguiente identidad trigonométrica: $\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} - \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = 2 \operatorname{tg} 2x$.

6. [1 punto] Simplifica todo lo que puedas la expresión siguiente: $\frac{\sin \alpha + \operatorname{cotg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cosec} \alpha}$ (recuerda que $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$).

Soluciones

1. Contesta a las siguientes cuestiones:

- a) **[1 punto]** El ángulo α es desconocido, pero se sabe $270^\circ < \alpha < 360^\circ$, y que $\frac{1}{\cos \alpha} = 3$, halla el **valor exacto**,

racionalizado y simplificado de $\sin \alpha$ y de $\operatorname{tg} \alpha$.

$$\frac{1}{\cos \alpha} = 3 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{9}. \text{ Como } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \text{ tenemos:}$$

$$\sin^2 \alpha + \frac{1}{9} = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{8}{9} \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{\sqrt{8}}{3} = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ (el signo es negativo porque el}$$

$$\text{ángulo se encuentra en el cuarto cuadrante). } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-2\sqrt{2}/3}{1/3} = -2\sqrt{2}$$

- b) **[2 puntos]** Sabiendo α y β son ángulos del primer cuadrante complementarios (o sea, que $\alpha + \beta = 90^\circ$), y que $\sin \alpha = \frac{2}{3}$, calcula de manera razonada y sin hallar previamente los ángulos α y β , las siguientes razones

trigonométricas: $\cos \alpha$, $\cos(\alpha - \beta)$, $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$ y $\cos(-2\alpha)$ (**valores exactos, simplificados y racionalizados**).

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{4}{9} + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{5}{9} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Para hallar $\cos(\alpha - \beta)$ hemos de hallar previamente $\cos \beta$ y $\sin \beta$. Pero como α y β son complementarios

se tiene que $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{2}{3}$, y que $\cos \alpha = \sin \beta = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Por tanto:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{2\sqrt{5}}{9} + \frac{2\sqrt{5}}{9} = \frac{4\sqrt{5}}{9}.$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \frac{\sqrt{5}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{\frac{3 - \sqrt{5}}{3}}{\frac{3 + \sqrt{5}}{3}} = \frac{3 - \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} = \frac{(3 - \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})}{(3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})} = \frac{9 - 6\sqrt{5} + 5}{9 - 5} = \frac{14 - 6\sqrt{5}}{4} = \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}$$

Finalmente, por ser 2α y -2α ángulos opuestos tenemos:

$$\cos(-2\alpha) = \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{5}{9} - \frac{4}{9} = \frac{1}{9}$$

2. **[2 puntos]** La altura de una casa es de 20 metros. Desde la parte superior de otro edificio, el ángulo de elevación con el que se ve la parte superior de la primera casa es de 15° y el ángulo de depresión de su parte inferior es de 45° . Hallar la distancia d entre las dos casas. (Ver figura de la derecha).

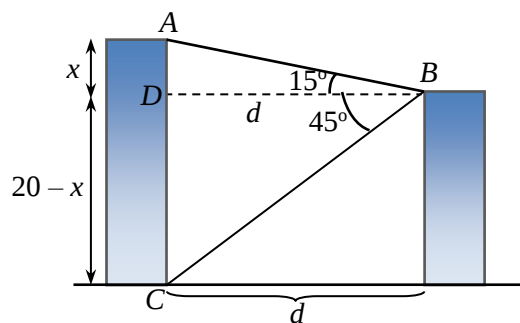
Usando los triángulos ABD y BDC podemos establecer el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 15^\circ = \frac{x}{d} \\ \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{20-x}{d} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = \frac{x}{\operatorname{tg} 15^\circ} \\ d = \frac{20-x}{\operatorname{tg} 45^\circ} \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{\operatorname{tg} 15^\circ} = \frac{20-x}{\operatorname{tg} 45^\circ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot \operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{tg} 15^\circ \cdot (20-x) \Rightarrow x = 0,27 \cdot (20-x) \Rightarrow$$

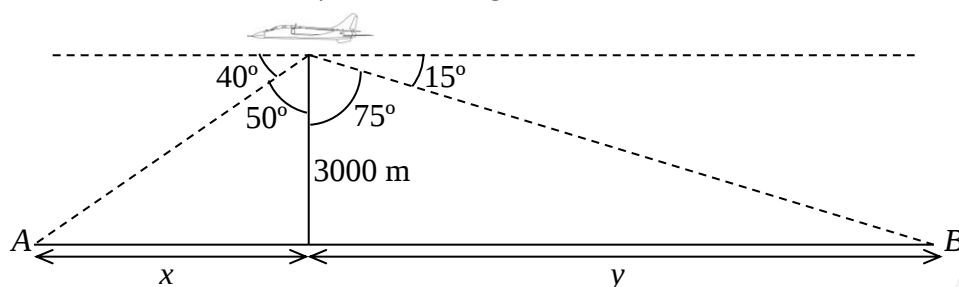
$$x = 5,4 - 0,27x \Rightarrow x + 0,27x = 5,4 \Rightarrow 1,27x = 5,4 \Rightarrow x = 4,25.$$

$$\text{Por tanto, } d = \frac{x}{\operatorname{tg} 15^\circ} \Rightarrow d = \frac{4,25}{0,27} \Rightarrow d = 15,74 \text{ metros.}$$



3. [2 puntos] Desde un avión que vuela a 3000 metros de altura, en un instante determinado, se ve un pueblo A bajo un ángulo de 40° con respecto a la horizontal de vuelo (ángulo de depresión) y otro pueblo B bajo un ángulo de 15° . ¿Qué distancia hay entre A y B ? Realiza un dibujo adecuado donde se represente esta situación.

Un dibujo representativo de la situación puede ser el siguiente:



Entonces:

$$\operatorname{tg} 50^\circ = \frac{x}{3000} \Rightarrow x = 3000 \cdot \operatorname{tg} 50^\circ \Rightarrow x \cong 3575,26 \text{ m} ; \operatorname{tg} 75^\circ = \frac{y}{3000} \Rightarrow y = 3000 \cdot \operatorname{tg} 75^\circ \Rightarrow y \cong 11196,15 \text{ m}$$

Por tanto, la distancia entre A y B es $x + y = 3575,26 + 11196,15 = 14771,41$ metros.

Nota: hay otra posible solución si los dos pueblos están situados “al mismo lado” del avión. En este caso, la distancia entre los dos pueblos es igual a la diferencia entre las dos cantidades anteriores: 7620,89 metros.

4. [1 punto] Halla el valor exacto de la operación siguiente: $\sin \frac{2\pi}{3} - \cos \frac{7\pi}{6} + \operatorname{tg} \frac{4\pi}{3} + \operatorname{tg} \frac{11\pi}{6}$.

Teniendo en cuenta que π rad son 180° es fácil obtener que $\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$, $\frac{7\pi}{6} = 210^\circ$, $\frac{4\pi}{3} = 240^\circ$, $\frac{11\pi}{6} = 330^\circ$

$$\text{Entonces } \sin \frac{2\pi}{3} - \cos \frac{7\pi}{6} + \operatorname{tg} \frac{4\pi}{3} + \operatorname{tg} \frac{11\pi}{6} = \sin 120^\circ - \cos 210^\circ + \operatorname{tg} 240^\circ + \operatorname{tg} 330^\circ =$$

$$= \sin 60^\circ - (-\cos 30^\circ) + \operatorname{tg} 60^\circ + (-\operatorname{tg} 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + 6\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{6} = \frac{10\sqrt{3}}{6} = \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

5. [1 punto] Demuestra la siguiente identidad trigonométrica: $\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} - \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = 2 \operatorname{tg} 2x$.

$$\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} - \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = \frac{(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + 2\sin x \cos x + \sin^2 x - \cos^2 x + 2\sin x \cos x - \sin^2 x}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} = \frac{\sin 2x + \sin 2x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{2\sin 2x}{\cos 2x} = 2 \operatorname{tg} 2x$$

6. [1 punto] Simplifica todo lo que puedas la expresión siguiente: $\frac{\sin \alpha + \operatorname{cotg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cosec} \alpha}$ (recuerda que $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$).

$$\frac{\sin \alpha + \operatorname{cotg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cosec} \alpha} = \frac{\sin \alpha + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{1}{\sin \alpha}} = \frac{\frac{\sin^2 \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha}}{\frac{\sin^2 \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha (\sin^2 \alpha + \cos \alpha)}{\sin \alpha (\sin^2 \alpha + \cos \alpha)} = \cos \alpha$$