

EXAMEN 1º BACHILLERATO CCSS – Polinomios

Ejercicio 1. (1 pto.)

Efectúa la suma y resta de los polinomios, calcula el valor numérico del polinomio resultado para las x dadas.

a) $(3x^4 + x^3 - 7x^2 + 6x + 3) + (4x^4 + 5x^2 - 3x - 8)$; para $x = 1$

b) $(6x^4 - 5x^2 + 7x + 4) - (3x^3 - 5x^2 + 2x + 9)$; para $x = -2$

a)

$$\begin{array}{r} A \Rightarrow \quad 3x^4 \quad x^3 \quad -7x^2 \quad +6x \quad +3 \\ B \Rightarrow \quad 4x^4 \quad \quad \quad +5x^2 \quad -3x \quad -8 \\ \hline A + B \Rightarrow \quad 7x^4 \quad + x^3 \quad -2x^2 \quad +3x \quad -5 \end{array}$$

Para $x = 1$;

$$7(1)^4 + (1)^3 - 2(1)^2 + 3(1) - 5 = 7 + 1 - 2 + 3 - 5 = 4$$

Para sumar dos polinomios, se colocan uno bajo el otro, haciendo coincidir, en la misma columna, los monomios de igual parte literal.

b)

$$\begin{array}{r} A \Rightarrow \quad 6x^4 \quad \quad \quad -5x^2 \quad +7x \quad +4 \\ -B \Rightarrow \quad \quad \quad -3x^3 \quad +5x^2 \quad -2x \quad -9 \\ \hline A - B \Rightarrow \quad 6x^4 \quad -3x^3 \quad \quad 0 \quad 5x \quad -5 \end{array}$$

Para $x = -2$;

$$\begin{aligned} & 6(-2)^4 - 3(-2)^3 + 5(-2) - 5 \\ & = 6 \cdot 16 - 3 \cdot (-8) + 5 \cdot (-2) - 5 \\ & = 96 + 24 - 10 - 5 = 105 \end{aligned}$$

Para restar dos polinomios, se suma el primero con el opuesto del segundo. Es decir, se le cambia el signo al segundo y se suman.

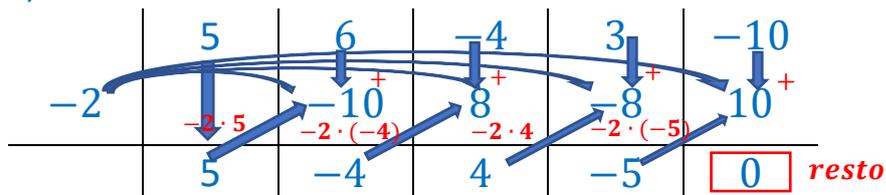
Ejercicio 3. (1,5 ptos.)

Aplica la regla de Ruffini para hallar el resultado:

a) $(5x^4 + 6x^3 - 4x^2 + 3x - 10) : (x + 2)$

b) $(4x^3 + 2x^2 + 5x + 6) : (x - 1)$

a)



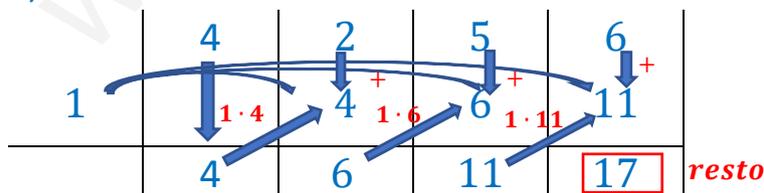
- 1) Se colocan los coeficientes del dividendo
- 2) Se “baja” el primer coeficiente del polinomio dividendo
- 3) Se multiplica este por coeficiente del divisor (para este caso -2) y se le suma al segundo coeficiente.
- 4) Así de forma sucesiva hasta obtener un resto, en caso de que sea una raíz del polinomio el resto es 0.

$$5x^4 + 6x^3 - 4x^2 + 3x - 10 = (x + 2) \cdot (5x^3 - 4x^2 + 4x - 5)$$

La división de polinomios es similar a la división entera de números naturales: $\text{dividendo} = \text{divisor} \cdot \text{cociente} + \text{resto}$.

Al aplicar Ruffini a un polinomio se obtiene un resto. Si al efectuar la división del polinomio $p(x)$ por $(x - a)$ el resto resulta 0; la división es exacta, lo que permite escribir: $p(x) = (x - a) c(x)$, lo que se denomina el Teorema del factor.

b)



$$4x^3 + 2x^2 + 5x + 6 = (x - 1) \cdot (4x^2 + 6x + 11) + 17$$

Al aplicar Ruffini a un polinomio se obtiene un resto si este es distinto de 0 entonces aplica el Teorema del resto que plantea que el resto de la división de un polinomio $P(x)$ entre $(x - a)$ es igual al valor numérico de dicho polinomio para $x = a$; es decir, $P(a) = r$.

Ejercicio 4. (2 ptos.)

Halla las raíces enteras del polinomio $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ y descompón el polinomio en producto de factores.

Las posibles raíces enteras del polinomio son los divisores enteros de 6 = $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6$

Se aplica la regla de Ruffini al polinomio y los sucesivos cocientes, en un proceso tanteando con los posibles divisores hasta hallar las raíces exactas del polinomio.

The diagram illustrates the Ruffini division process for the polynomial $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$. It shows three rows of division by the possible integer roots 1, -2, and 3. The coefficients of the polynomial are 1, -2, -5, and 6. The process involves multiplying the root by the leading coefficient and subtracting the result from the next coefficient, repeating this for all coefficients. The final result is the factored form $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$.

	1	-2	-5	6	
1	↓	↓	↓	↓	
	1	1	-1	-6	
		1	-1	-6	0
-2	↓	↓	↓	↓	
	1	-2	-3	0	
		-2	-3	0	
3	↓	↓	↓	↓	
	1	3	0	0	
		3	0	0	

$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$

Si un polinomio es divisible por $x - a$, la raíz entera a se encuentra entre los divisores del término independiente.

Atención: Las raíces del polinomio pueden ser no enteras o incluso no pertenecer al conjunto de los números reales.

Ejercicio 5. (2 ptos.)

Calcula el M.C.D. y el m.c.m. de los polinomios: $P(x) = x^4 - x^3 - 9x^2 + 9x$ y

$$Q(x) = x^4 - x^3 - 6x^2$$

Descomponer los polinomios en factores.

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 - x^3 - 9x^2 + 9x = x(x^3 - x^2 - 9x + 9) = x(x^2 - 9)(x - 1) = \\ &= x(x - 3)(x + 3)(x - 1) \end{aligned}$$

$$Q(x) = x^4 - x^3 - 6x^2 = x^2(x^2 - x - 6) = x^2(x - 3)(x + 2)$$

Para calcular el máximo común divisor se toman los factores comunes con menor exponente; por ello: $M. C. D [P(x); Q(x)] = x(x - 3)$.

El mínimo común múltiplo es el producto de los factores comunes y no comunes con mayor exponente; es decir:

$$m. c. m. [P(x); Q(x)] = x^2(x - 3)(x + 3)(x - 1)(x + 2)$$

Recuerda que el máximo común divisor $d(x)$ de dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ es el polinomio de mayor grado que es divisor de ambos. $M. C. D [P(x); Q(x)] = d(x)$.

El mínimo común múltiplo $m(x)$ de dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ es el polinomio de menor grado que es múltiplo de ambos. $m. c. m. [P(x); Q(x)] = m(x)$

Ejercicio 6. (2 ptos.)

Resuelve:

$$a) \frac{x + 1}{x^2 + 5x + 6} + \frac{x - 5}{x^2 - 4}$$

$$b) \frac{x + 5}{x^2 - 9} \cdot \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 4x + 4}$$

$$m. c. m. = (x + 3)(x + 2)(x - 2)$$

$$a) \frac{x + 1}{x^2 + 5x + 6} + \frac{x - 5}{x^2 - 4} = \frac{x + 1}{(x + 3)(x + 2)} + \frac{x - 5}{(x + 2)(x - 2)} =$$

Hallar fracciones equivalentes

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(x+1)(x+2)}{(x+3)(x+2)(x-2)} + \frac{(x-5)(x+3)}{(x+3)(x+2)(x-2)} = \\
 &= \frac{(x+1)(x+2) + (x-5)(x+3)}{(x+3)(x+2)(x-2)} = \frac{x^2 + 3x + 2 + x^2 - 2x - 15}{(x+3)(x+2)(x-2)} = \\
 &= \frac{2x^2 + x - 13}{(x+3)(x+2)(x-2)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } &\frac{x+5}{x^2-9} \cdot \frac{x^2-x-6}{x^2+4x+4} = \frac{x+5}{\cancel{(x-3)}(x+3)} \cdot \frac{\cancel{(x-3)}\cancel{(x+2)}}{(x+2)\cancel{(x+2)}} = \text{Simplificando} \\
 &\text{Multiplicando numeradores} \\
 &\text{y denominadores} = \frac{x+5}{(x+2)(x+3)} = \frac{x+5}{x^2+5x+6}
 \end{aligned}$$

Recuerda Se llama fracción algebraica al cociente de dos polinomios: $\frac{P(x)}{Q(x)}$

Para sumar/restar fracciones algebraicas se transforman los sumandos en fracciones equivalentes con el mismo denominador (si es que eran diferentes); se deja el denominador común y se suman/restan los numeradores.

Para multiplicar dos fracciones se pone por numerador el producto de los numeradores y por denominador el producto de los denominadores.
Para dividir fracciones se multiplica la fracción dividendo por el inverso de la fracción divisor.