EXAMEN 1º BACHILLERATO CCSS – Polinomios

Ejercicio 1. (1 pto.)

Efectúa la suma y resta de los polinomios, calcula el valor numérico del polinomio resultado para las x dadas.

a) $(3x^4 + x^3 - 7x^2 + 6x + 3) + (4x^4 + 5x^2 - 3x - 8)$; para $x = 1$

b) $(6x^4 - 5x^2 + 7x + 4) - (3x^3 - 5x^2 + 2x + 9)$; para $x = -2$

a)

$A \Rightarrow$	$3x^4$	x^3	$-7x^2$	$+6x$	$+3$
$B \Rightarrow$	$4x^4$		$+5x^2$	$-3x$	-8
$A + B \Rightarrow$	$\mathbf{7x^4}$	$\mathbf{+x^3}$	$\mathbf{-2x^2}$	$\mathbf{+3x}$	$\mathbf{-5}$

Para $x = 1$;

$$7(1)^4 + (1)^3 - 2(1)^2 + 3(1) - 5 = 7 + 1 - 2 + 3 - 5 = \mathbf{4}$$

Para sumar dos polinomios, se colocan uno bajo el otro, haciendo coincidir, en la misma columna, los monomios de igual parte literal.

b)

$A \Rightarrow$	$6x^4$		$-5x^2$	$+7x$	$+4$
$-B \Rightarrow$		$-3x^3$	$+5x^2$	$-2x$	-9
$A - B \Rightarrow$	$\mathbf{6x^4}$	$\mathbf{-3x^3}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{5x}$	$\mathbf{-5}$

Para $x = -2$;

$$6(-2)^4 - 3(-2)^3 + 5(-2) - 5$$
$$= 6 \cdot 16 - 3 \cdot (-8) + 5 \cdot (-2) - 5$$
$$= 96 + 24 - 10 - 5 = \mathbf{105}$$

Para restar dos polinomios, se suma el primero con el opuesto del segundo. Es decir, se le cambia el signo al segundo y se suman.

Ejercicio 2. (1,5 ptos.)

Calcula:

a) $(2x^3 + 5x^2 + 3x + 4) \cdot (5x^2 - 3x + 1)$

b) $(6x^5 - 14x^4 + 15x^3 + 5x^2 - 3x + 6) : (3x^3 - 4x^2 + 2x + 5)$

a)

$$\begin{array}{lcccccccl}
A \Rightarrow & & & 2x^3 & +5x^2 & 3x & +4 & & \\
B \Rightarrow & & & & 5x^2 & -3x & +1 & & \\
\hline
 & & & 2x^3 & +5x^2 & 3x & +4 & & +1 \cdot A \\
 & & -6x^4 & -15x^3 & -9x^2 & -12x & & & -3x \cdot A \\
 & 10x^5 & +25x^4 & +15x^3 & +20x^2 & & & & +5x^2 \cdot A \\
\hline
A \cdot B \Rightarrow & \mathbf{10x^5} & \mathbf{+19x^4} & \mathbf{+2x^3} & \mathbf{+16x^2} & \mathbf{-9x} & \mathbf{+4} & &
\end{array}$$

Para multiplicar dos polinomios, se multiplica cada monomio de uno de los factores por todos y cada uno de los monomios del otro factor y, después, se suman los monomios de igual parte literal.

b)

$$\begin{array}{r r|l}
 & 6x^5 - 14x^4 + 15x^3 + 5x^2 - 3x + 6 & 3x^3 - 4x^2 + 2x + 5 \ \Rightarrow \boldsymbol{B} \\
\cline{3-3}
\textit{Restamos } 2x^2 \cdot B \Rightarrow & -(6x^5 - 8x^4 + 4x^3 + 10x^2) & \mathbf{2x^2 - 2x + 1} \\
\cline{2-2}
 & -6x^4 + 11x^3 - 5x^2 - 3x & \\
\textit{Restamos } -2x \cdot B \Rightarrow & -(-6x^4 + 8x^3 - 4x^2 - 10x) & \\
\cline{2-2}
 & 3x^3 - x^2 + 7x + 6 & \\
\textit{Restamos } 1 \cdot B \Rightarrow & -(3x^3 - 4x^2 + 2x + 5) & \\
\cline{2-2}
 & 3x^2 + 5x + 1 \ \textit{Resto} &
\end{array}$$

$6x^5 : 3x^3 = 2x^2$

$-6x^4 : 3x^3 = -2x$

$3x^3 : 3x^3 = 1$

$$6x^5 - 14x^4 + 15x^3 + 5x^2 - 3x + 6 =$$
$$= (\mathbf{3x^3 - 4x^2 + 2x + 5}) \cdot (\mathbf{2x^2 - 2x + 1}) + (\mathbf{3x^2 + 5x + 1})$$

La división de polinomios es similar a la división entera de números naturales: $dividendo = divisor \cdot cociente + resto$

Ejercicio 3. (1,5 ptos.)

Aplica la regla de Ruffini para hallar el resultado:

a) $(5x^4 + 6x^3 - 4x^2 + 3x - 10) : (x + 2)$

b) $(4x^3 + 2x^2 + 5x + 6) : (x - 1)$

a)

	5	6	-4	3	-10	
-2		-10 ($-2\cdot 5$)	8 ($-2\cdot(-4)$)	-8 ($-2\cdot 4$)	10 ($-2\cdot(-5)$)	
	5	-4	4	-5	$\boxed{0}$	***resto***

1) Se colocan los coeficientes del dividendo
2) Se "baja" el primer coeficiente del polinomio dividendo
3) Se multiplica este por coeficiente del divisor (para este caso -2) y se le suma al segundo coeficiente.
4) Así de forma sucesiva hasta obtener un resto, en caso de que sea una raíz del polinomio el resto es 0.

$$5x^4 + 6x^3 - 4x^2 + 3x - 10 = (\mathbf{x+2})\cdot(\mathbf{5x^3 - 4x^2 + 4x - 5})$$

La división de polinomios es similar a la división entera de números naturales: $dividendo = divisor \cdot cociente + resto$.

Al aplicar Ruffini a un polinomio se obtiene un resto. Si al efectuar la división del polinomio $p(x)$ por $(x - a)$ el resto resulta 0; la división es exacta, lo que permite escribir: $p(x) = (x - a)\,c(x)$, lo que se denomina el Teorema del factor.

b)

	4	2	5	6	
1		4 ($1\cdot 4$)	6 ($1\cdot 6$)	11 ($1\cdot 11$)	
	4	6	11	$\boxed{17}$	***resto***

$$4x^3 + 2x^2 + 5x + 6 = (\mathbf{x-1})\cdot(\mathbf{4x^2 + 6x + 11}) + \mathbf{17}$$

Al aplicar Ruffini a un polinomio se obtiene un resto si este es distinto de 0 entonces aplica el Teorema del resto que plantea que el resto de la división de un polinomio $P(x)$ entre $(x - a)$ es igual al valor numérico de dicho polinomio para $x = a$; es decir, $P(a) = r$.

Ejercicio 4. (2 ptos.)

Halla las raíces enteras del polinomio $P(x) = \mathrm{x}^3 - 2\mathrm{x}^2 - 5\mathrm{x} + 6$ y descompón el polinomio en producto de factores.

Las posibles raíces enteras del polinomio son los divisores enteros de $6 = \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6$

Se aplica la regla de Ruffini al polinomio y los sucesivos cocientes, en un proceso tanteando con los posibles divisores hasta hallar las raíces exactas del polinomio.

	1	-2	-5	6	
$\boxed{1}$		1	-1	-6	
	1	-1	-6	$\boxed{0}$	***resto***
$\boxed{-2}$		-2	6		
	1	-3	$\boxed{0}$		
$\boxed{3}$		3			
	1	$\boxed{0}$			

$$\mathbf{x^3 - 2x^2 - 5 + 6 = (x - 1)(x + 2)(x - 3)}$$

Si un polinomio es divisible por x - a, la raíz entera a se encuentra entre los divisores del término independiente.

Atención: Las raíces del polinomio pueden ser no enteras o incluso no pertenecer al conjunto de los números reales.

Ejercicio 5. (2 ptos.)

Calcula el M.C.D. y el m.c.m. de los polinomios: $P(x) = x^4 - x^3 - 9x^2 + 9x$ y $Q(x) = x^4 - x^3 - 6x^2$

Descomponer los polinomios en factores.

$$P(x) = x^4 - x^3 - 9x^2 + 9x = x(x^3 - x^2 - 9x + 9) = x(x^2 - 9)(x - 1) =$$
$$= x(x - 3)(x + 3)(x - 1)$$
$$Q(x) = x^4 - x^3 - 6x^2 = x^2(x^2 - x - 6) = x^2(x - 3)(x + 2)$$

Para calcular el máximo común divisor se toman los factores comunes con menor exponente; por ello: $M.C.D\ [P(x); Q(x)] = x(x - 3)$.

El mínimo común múltiplo es el producto de los factores comunes y no comunes con mayor exponente; es decir:

$$m.c.m.\ [P(x); Q(x)] = x^2(x - 3)(x + 3)(x - 1)(x + 2)$$

Recuerda que el máximo común divisor d(x) de dos polinomios P(x) y Q(x) es el polinomio de mayor grado que es divisor de ambos. $M.C.D\ [P(x);\ Q(x)] = d(x)$.

El mínimo común múltiplo m(x) de dos polinomios P(x) y Q(x) es el polinomio de menor grado que es múltiplo de ambos. $m.c.m.[P(x);\ Q(x)] = m(x)$

Ejercicio 6. (2 ptos.)

Resuelve:

a) $\dfrac{x+1}{x^2 + 5x + 6} + \dfrac{x-5}{x^2 - 4}$

b) $\dfrac{x+5}{x^2 - 9} \cdot \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 + 4x + 4}$

$m.c.m. = (x + 3)(x + 2)(x - 2)$

a) $\dfrac{x+1}{x^2 + 5x + 6} + \dfrac{x-5}{x^2 - 4} = \dfrac{x+1}{(x+3)(x+2)} + \dfrac{x-5}{(x+2)(x-2)} =$

Hallar fracciones equivalentes

$$= \frac{(x+1)(x+2)}{(x+3)(x+2)(x-2)} + \frac{(x-5)(x+3)}{(x+3)(x+2)(x-2)} =$$

$$= \frac{(x+1)(x+2) + (x-5)(x+3)}{(x+3)(x+2)(x-2)} = \frac{x^2+3x+2+x^2-2x-15}{(x+3)(x+2)(x-2)} =$$

$$= \frac{\mathbf{2x^2+x-13}}{\mathbf{(x+3)(x+2)(x-2)}}$$

b) $\dfrac{x+5}{x^2-9} \cdot \dfrac{x^2-x-6}{x^2+4x+4} = \dfrac{x+5}{\cancel{(x-3)}(x+3)} \cdot \dfrac{\cancel{(x-3)}\cancel{(x+2)}}{(x+2)\cancel{(x+2)}} =$ *Simplificando*

Multiplicando numeradores y denominadores $= \dfrac{x+5}{(x+2)(x+3)} = \dfrac{\mathbf{x+5}}{\mathbf{x^2+5x+6}}$

Recuerda Se llama fracción algebraica al cociente de dos polinomios:$\frac{P(x)}{Q(x)}$

Para sumar/restar fracciones algebraicas se transforman los sumandos en fracciones equivalentes con el mismo denominador (si es que eran diferentes); se deja el denominador común y se suman/restan los numeradores.

Para multiplicar dos fracciones se pone por numerador el producto de los numeradores y por denominador el producto de los denominadores.
Para dividir fracciones se multiplica la fracción dividendo por el inverso de la fracción divisor.