

Derivada de una función en un punto

1.1. Tasa de variación de una función

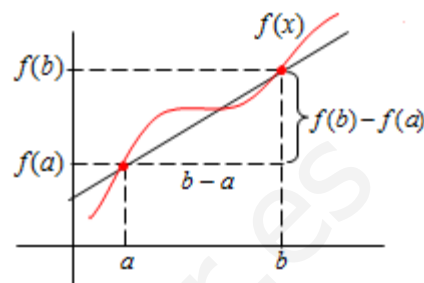
Se llama tasa de variación media de una función $f(x)$, en el intervalo $[a, b]$, al valor de la expresión:

$$Tvm[a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Este cociente da la media de cambio de $f(x)$ al pasar la variable x de a a b . (Puede llamarse también velocidad media de cambio o incremento medio,...).

- Si el intervalo $[a, b]$ se hace muy pequeño, lo que se consigue cuando $b \rightarrow a$, o haciendo $b = a + h$ con $h \rightarrow 0$, se habla de tasa de variación instantánea, que se define como sigue:

$$Tvi(a) = \lim_{h \rightarrow 0} (Tvm[a, a+h]) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



Ejemplo:

a) La tasa de variación media de la función $f(x) = x^2 - 2x$ en los intervalos $[-2, -1]$ y $[2, 4]$ vale:

$$Tvm[-2, -1] = \frac{f(-1) - f(-2)}{-1 - (-2)} = \frac{3 - 8}{1} = -5;$$

$$Tvm[2, 4] = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{8 - 0}{2} = 4$$

b) La tasa de variación media de la función $f(x) = x^2 - 2x$ en los intervalos $[2, 2+h]$ vale:

$$Tvm[2, 2+h] = \frac{f(2+h) - f(2)}{2+h-2} = \frac{(2+h)^2 - 2(2+h) - 0}{h} = \frac{2h + h^2}{h} = 2 + h$$

Si $h = 1$, $Tvm[2, 2+h] = Tvm[2, 3] = 2 + 1 = 3$;

Si $h = 0,2$, $Tvm[2, 2+h] = Tvm[2, 2,2] = 2 + 0,2 = 2,2$.

Si $h = 0,01$, $Tvm[2, 2+h] = Tvm[2, 2,01] = 2 + 0,01 = 2,01$.

Si $h \rightarrow 0$, $Tvm[2, 2+h] \rightarrow Tvi(2) = \lim_{h \rightarrow 0} (2+h) = 2$.

c) Entre Jaén y Cádiz hay 360 km por carretera. Si se viaja en automóvil, partiendo de Jaén a las 8 h y llegando a Cádiz a las 12 h, la velocidad media ha sido de 90 km/h. La velocidad media coincide con la tasa de variación media. (La gráfica adjunta indica la distancia recorrida en función del tiempo).

Aunque la velocidad media ha sido de 90 km/h en determinados momentos la velocidad ha sido mayor o menor; incluso ha habido una parada de media hora.

La mayor o menor pendiente de la curva indica la velocidad

aproximada en cada periodo de tiempo. (La velocidad media en las dos primeras horas ha sido de 110 km/h; en la primera hora se recorrieron 100 km; en la 2ª, 120 km)

La tasa de velocidad instantánea es la velocidad que marca el cuentakilómetros en cada instante.

