

Debido a unas pésimas condiciones ambientales, una colonia de 1 millón de bacterias no comienza su reproducción hasta pasados dos meses. La función que representa la población de la colonia al variar el tiempo (expresado en meses) viene dada por:

$$f(t) = \begin{cases} 10^6 & 0 \leq t \leq 2 \\ 10^6 \cdot e^{t-2} & t > 2 \end{cases}$$

a) Calcula la tasa de variación media de la población en los intervalos $[0, 2]$ y $[0, 4]$.

b) Calcula la tasa de variación instantánea en $t = 4$, comparándola con la última tasa de variación media obtenida. Justificar los resultados obtenidos.

$$a) \text{ T.V.M.}[0, 2] = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{10^6 - 10^6}{2} = 0$$

$$\text{T.V.M.}[0, 4] = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{10^6 \cdot e^2 - 10^6}{4} = 1'59726 \cdot 10^6$$

b) La tasa de variación instantánea en $t = 4$ es:

$$f'(t) = 10^6 \cdot e^{t-2} \rightarrow f'(4) = 10^6 \cdot e^{4-2} = 7'3890561 \cdot 10^6$$

Se observa que en $[0, 2]$ no hubo variación, y así la tasa de variación es cero.

En $[0, 4]$ la tasa de variación es grande por aumentar la función exponencialmente. La tasa instantánea tiene también un crecimiento exponencial. Como se toma en el punto final de $[2, 4]$ es apreciablemente mayor que la tasa media $[0, 4]$.

Calcular b para que la tasa de variación media de la función $f(x) = \ln(x + b)$ en el intervalo $[0, 2]$ valga $\ln 2$. Calcular, a continuación, la tasa de variación instantánea en los extremos de dicho intervalo.

$$\text{T.V.M.}[0, 2] = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{\ln(2 + b) - \ln b}{2} = \ln 2 \Rightarrow \ln \frac{2 + b}{b} = \ln 2^2 \Rightarrow \frac{2 + b}{b} = 4 \rightarrow b = \frac{2}{3}$$

$$f(x) = \ln\left(x + \frac{2}{3}\right) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x + \frac{2}{3}} \rightarrow f'(0) = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \rightarrow f'(2) = \frac{1}{2 + \frac{2}{3}} = \frac{3}{8}$$

Si la demanda de cortes de pelo viene expresada por la función $c(p) = 100 - p^2$, donde p indica el precio en cientos de pesetas, calcula:

a) La tasa de variación media de la demanda cuando el precio pase de 700 pts a 900 pts.

b) La variación instantánea para el precio de 700 pts.

a)

$$T.V.M.[700,900] = \frac{c(900) - c(700)}{900 - 700} = \frac{100 - 900^2 - (100 - 700^2)}{200} = \frac{-320.000}{200} = -1.600$$

lo que indica que la demanda disminuirá en 16 cortes de pelo por cada incremento de 100 pts en el precio.

b) $c'(p) = -2p \rightarrow c'(700) = -1.400$

es decir que para un mínimo aumento desde 700 pts la disminución será de 14 cortes de pelo.

En el ministerio de Sanidad se ha calculado que tras la aparición de una determinada enfermedad contagiosa el número de personas atacadas cada día por dicha enfermedad viene expresado por la función $p(d) = 33d^2 - d^3$, siendo d el número de días, desde el primer caso.

a) ¿A qué velocidad de propagación se está extendiendo en el día 10º?

b) ¿Cuándo se estará propagando a razón de 120 personas por día?

c) ¿Cuánto tiempo tardará hasta que deje de propagarse?

a) $p'(d) = 66d - 3d^2 \rightarrow p'(10) = 660 - 300 = 360$ personas por día

b) $p'(d) = 66d - 3d^2 = 120 \rightarrow 3d^2 - 66d + 120 = 0 \Rightarrow \begin{cases} d = 2 \\ d = 20 \end{cases}$

La enfermedad se propaga a 120 personas por día en los días 2º y 20º

c) $p'(d) = 0 \rightarrow 3d^2 - 66d = 0 \rightarrow 3d(d - 22) = 0 \Rightarrow \begin{cases} d = 0 \\ d = 22 \end{cases}$

Es decir, a los 22 días dejará de propagarse. La enfermedad habrá desaparecido a los 33 días:
 $p(33) = 0$

Un objeto descende en caída libre desde una altura de 100 m, siendo su altura en el instante t , $s(t) = 100 - 5t^2$.

a) Halla su velocidad media entre $t = 1$ y $t = 2$ seg.

b) Determina la expresión que da su velocidad y su aceleración en el instante t . ¿Cuánto valen para $t = 1$ y $t = 2$ seg?

$$a) v_{\text{media}} = \frac{s(2) - s(1)}{2 - 1} = \frac{80 - 95}{1} = -15 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$$

$$b) v(t) = s'(t) = -10t \quad a(t) = v'(t) = s''(t) = -10 \frac{\text{m}}{\text{sg}^2}$$

$$v(1) = -10 \quad v(2) = -20 \quad a(1) = -10 \quad a(2) = -10$$

La temperatura de un alimento, (en °C), dentro de un frigorífico, viene dada por la fórmula

$$T(t) = 8 \cdot \left(\frac{2t^2 + t + 2}{5t^2 + 2t + 1} \right) \quad \text{donde } t \text{ mide el tiempo en horas. Halla:}$$

a) La temperatura en el momento de meterlo en el frigorífico.

b) La tasa de variación media entre la 1ª y 3ª horas.

c) La variación instantánea en $t = 1$ y $t = 3$.

$$a) T(0) = 16^\circ \text{C}$$

$$b) \text{TVM}[1,3] = \frac{T(3) - T(1)}{3 - 1} = \frac{3'54 - 5}{3 - 1} = -0'73$$

Significa que se enfría $0'73^\circ \text{C}$ cada hora (entre la 1ª y 3ª horas).

$$c) T'(t) = 8 \cdot \left(\frac{-t^2 - 16t - 3}{(5t^2 + 2t + 1)^2} \right) \quad \text{Si } \begin{cases} t = 1 \Rightarrow T'(1) = -2'5 \\ t = 3 \Rightarrow T'(3) = -0'178 \end{cases}$$

Esto significa que en el instante $t = 1$ se está enfriando a razón de $2'5^\circ \text{C/h}$; y a razón de $0'178^\circ \text{C/h}$ en el instante $t = 3$. Observa que a medida que está más frío la tasa de enfriamiento decrece, teniendo a $16/5 = 3'2^\circ \text{C}$ cuando el tiempo de permanencia en el frigorífico se hace muy grande.

Una población de 300 bacterias se introduce en un cultivo. Si su número crece según la expresión $n(t) = 300 \cdot (1 + \ln(t^2 + 1))$, siendo t el tiempo en horas. Calcula:

a) El número y la tasa de crecimiento de las bacterias al cabo de 5 horas.

b) El instante en el que la velocidad de crecimiento es de 300 bacterias/hora.

$$a) n(5) = 300 \cdot (1 + \ln 26) = 1.277$$

$$\text{La tasa de crecimiento es } n'(t) = \frac{600t}{t^2 + 1} \rightarrow n'(5) = 115'38 \text{ bac./hora}$$

$$b) \text{ Si } n'(t) = 300 \Rightarrow \frac{600t}{t^2 + 1} = 300 \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow t = 1$$

Un líquido caliente sigue una ley exponencial, con exponente negativo, cuando se enfría hasta la temperatura ambiente. Es la ley de enfriamiento de Newton. Supongamos que en un cierto caso un líquido inicialmente a 70° se enfría hasta los 20° según la función: $T(t) = 20 + 50 \cdot e^{-0.1t}$ donde T es la temperatura del líquido al cabo de t minutos de enfriamiento.

a) Calcula la velocidad de enfriamiento, a los 12 minutos de iniciarse éste.

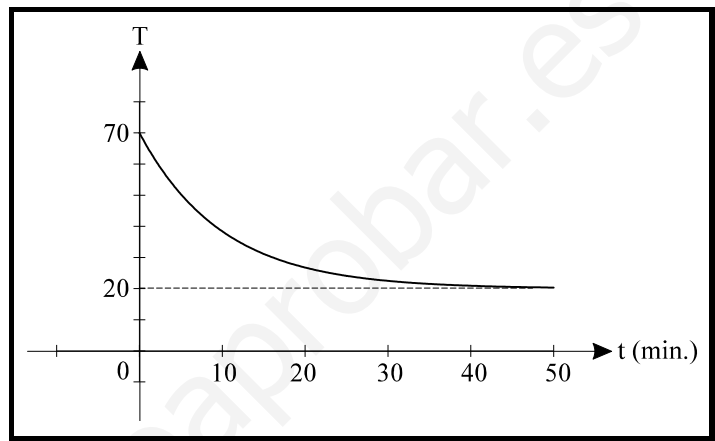
b) ¿En qué momento el líquido perderá temperatura a razón de medio grado por minuto?

a) En este caso concreto, la derivada mide la variación de temperatura por unidad de tiempo, es decir, la velocidad a la que el líquido cambia su temperatura.

Si derivamos tenemos:

$$T'(t) = -5e^{-0.1t}$$

El signo negativo de la derivada confirma que la temperatura es siempre decreciente, como corresponde a un líquido enfriándose.



$$T'(12) = -5 \cdot e^{-1.2} = -1.50^\circ / \text{min.}$$

En el instante $t = 12$ min., el líquido está bajando su temperatura a razón de grado y medio por minuto.

$$b) -0.5 = -5 \cdot e^{-0.1t} \rightarrow e^{-0.1t} = \frac{0.5}{5} = 0.1 \rightarrow -0.1t \cdot \ln e = \ln 0.1 \rightarrow t = \frac{\ln 0.1}{-0.1} = 23 \text{ min.}$$

Hay que advertir que el valor del coeficiente de t , que nosotros hemos supuesto 0.1 , depende de la naturaleza del líquido, forma y material del recipiente, etc.