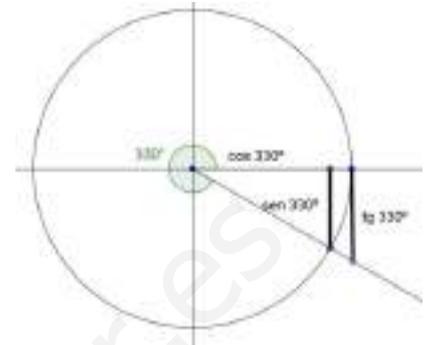
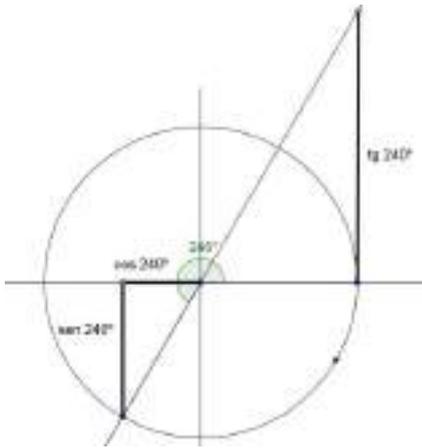


UNIDAD 4: Trigonometría I

ACTIVIDADES-PÁG. 88

1. El ángulo de 330° está situado en el 4º cuadrante y como observamos en el dibujo los signos de las razones trigonométricas son:

$$\text{sen } 330^\circ < 0 \quad \text{cos } 330^\circ > 0 \quad \text{tg } 330^\circ < 0$$



Como 960° es mayor que 360° , comenzamos por determinar a qué ángulo equivale en la circunferencia goniométrica. Dividimos 960° entre 360° y obtenemos:

$$960^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 240^\circ$$

es decir, dos vueltas de circunferencia, más 240° .

Las razones trigonométricas de 960° tendrán los signos:

$$\text{sen } 960^\circ = \text{sen } 240^\circ < 0$$

$$\text{cos } 960^\circ = \text{cos } 240^\circ < 0$$

$$\text{tg } 960^\circ = \text{tg } 240^\circ > 0$$

2. a) Basta dividir la relación fundamental por $\cos^2 \alpha$.

b) Basta dividir la relación fundamental por $\text{sen}^2 \alpha$.

Nota: Es conocido que la división no siempre puede realizarse. Siempre deberán tenerse en cuenta los casos en los que el divisor sea distinto de cero.

3. Según el esquema:



De los dos triángulos rectángulos de la figura, obtenemos:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 40^\circ = \frac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 25^\circ = \frac{h}{1500 - x} \end{cases} \Rightarrow h = \frac{1500 \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 25^\circ}{\operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 25^\circ} \Rightarrow h = 449,61 \text{ m}$$

4. Llamando α al ángulo que forman los rayos solares con el suelo y teniendo en cuenta el triángulo rectángulo del dibujo:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{h/2} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 2 \Rightarrow \alpha = 63^\circ 26' 6''$$



ACTIVIDADES-PÁG. 105

1. Hay que buscar un número que sea a la vez triangular y cuadrado.

Los números triangulares son: 1, 3, 6, 10, 15, 21, ..., $\frac{n^2 + n}{2}$

Los números cuadrados son: 1, 4, 9, 16, 25, ..., x^2 .

Deba cumplirse la igualdad $\frac{n^2 + n}{2} = x^2$.

El valor de n más pequeño que cumple la igualdad es $n = 8$, ya que $\frac{8^2 + 8}{2} = x^2 \Rightarrow 36 = x^2$.

El enunciado dice que hay más de 36 cajas, por tanto hay que buscar otra solución, y ésta es:

$n = 49$, pues $\frac{49^2 + 49}{2} = 1225 = 35^2$.

Tiene 1225 cajas.

2. Observamos que:

$$\frac{1}{(n-1) \cdot n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \quad \text{con } n \geq 2$$

Dando valores, obtenemos:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

... = ...

$$\frac{1}{998 \cdot 999} = \frac{1}{998} - \frac{1}{999}$$

$$\frac{1}{999 \cdot 1000} = \frac{1}{999} - \frac{1}{1000}$$

Sumando y simplificando:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{998 \cdot 999} + \frac{1}{999 \cdot 1000} = \frac{1}{1} - \frac{1}{1000} = 1 - 0,001 = 0,999$$

3. Sean A, B y C las tres rebanadas. Con A_1 indicamos que se tuesta la cara 1 y con A_2 indicamos que se tuesta la cara 2.

1° A_1B_1 tarda: 30 s en tostar cara A_1 y B_1
 5 s en colocar A_1
 5 s en colocar B_1
 5 s en sacar B_1

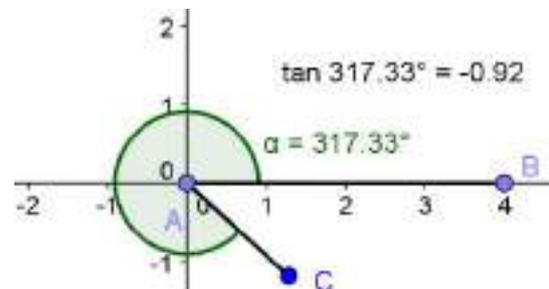
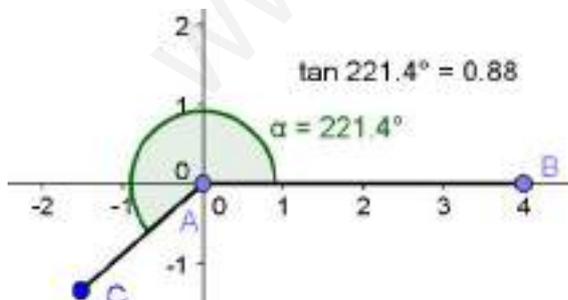
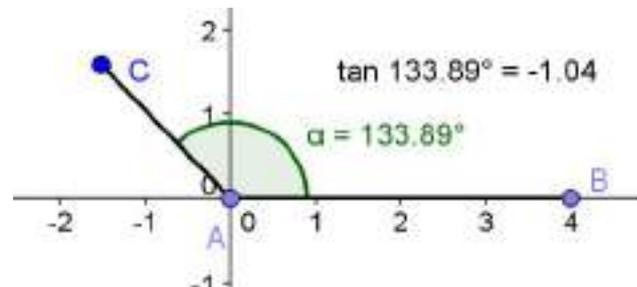
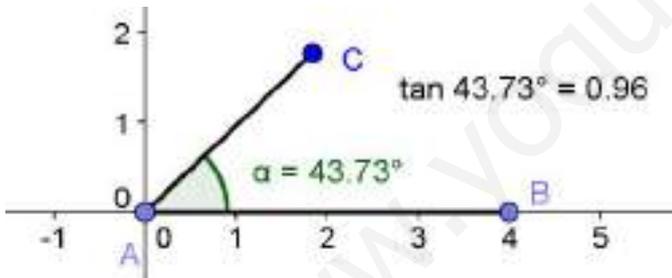
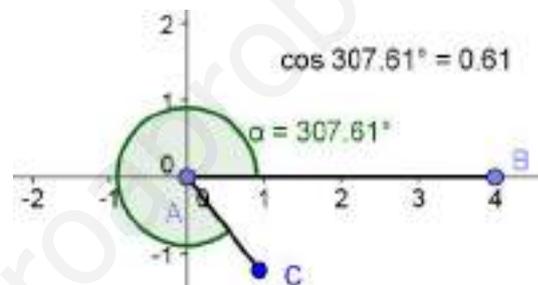
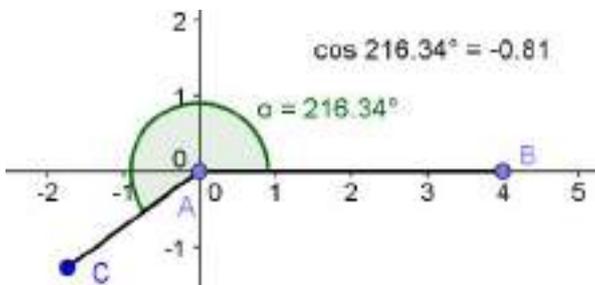
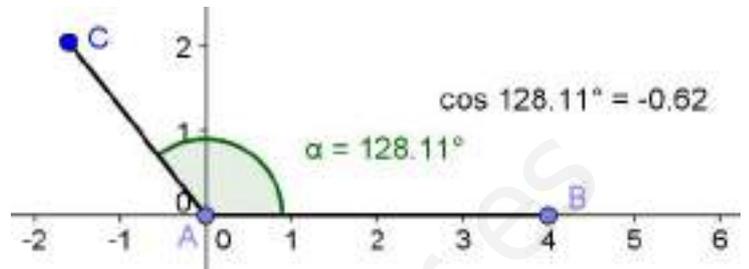
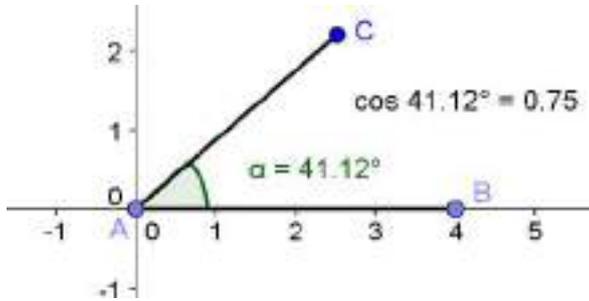
2° A_2C_1 tarda: 3 s en dar vuelta A_1
 5 s en meter C_1
 30 s en tostar cara A_2 y C_1
 3 s en dar la vuelta C_2

3° B_2C_2 tarda: 5 s en sacar A_2
 30 s en tostar cara B_2 y C_2
 5 s en sacar B_2
 5 s en sacar C_2

En total se necesitan 136 s en tostar 3 rebanadas.

ACTIVIDADES-PÁG. 107

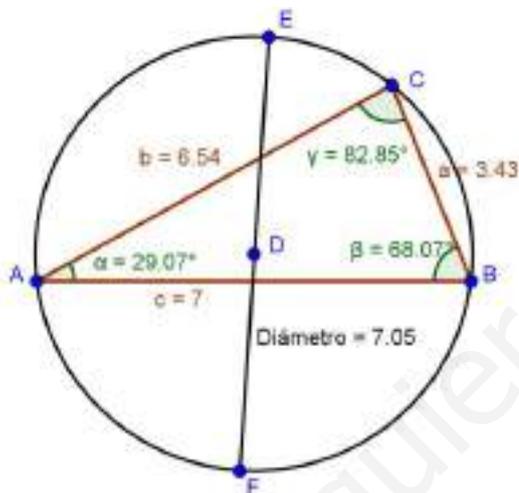
1. Procedemos como en el caso del seno y obtenemos para el coseno y la tangente los resultados que aparecen en los dibujos.



2. Dibujamos un triángulo cualquiera y mostramos la medida de sus lados y sus ángulos, como hemos hecho en el apartado **Teorema de los senos** de las páginas de **Nuevas tecnologías**.

Posteriormente dibujamos un diámetro de la circunferencia circunscrita, siguiendo los pasos:

- Elige **Mediatriz** y traza las mediatrices de los tres lados y marca el circuncentro. Dibuja la circunferencia circunscrita.
- Dibuja un diámetro y muestra su valor. Oculta las mediatrices.
- Arrastra* cualquiera de los vértices del triángulo y observa como cambia este: la medida de sus lados, la amplitud de sus ángulo pero se mantienen constantes las razones entre sus lados y el seno de los ángulos opuesto, además de coincidir el valor de estas razones con la medida del diámetro trazado.



El teorema de los senos afirma que los lados de un triángulo cualquiera son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos:

$$\begin{aligned} a/\text{sen}(\alpha) &= 3.43/0.49 = 7.05 \\ b/\text{sen}(\beta) &= 6.54/0.93 = 7.05 \\ c/\text{sen}(\gamma) &= 7/0.99 = 7.05 \end{aligned}$$

El valor de la razón coincide con la medida del diámetro de la circunferencia circunscrita

3. Seguimos los pasos que se describen a continuación:

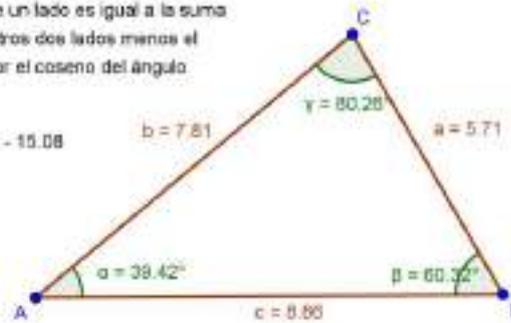
- Mediante la herramienta Polígono dibuja un triángulo cualquiera y en el menú contextual de los lados y ángulos elige **Propiedades** y en la ficha **Básico** escoge **Muestra rótulo: Nombre & valor**.
- Con **Inserta texto** introduce el texto estático del enunciado del teorema.
- Con **Inserta texto** y para cada uno de los tres lados introduce el texto:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 * a * b * \cos(\gamma).$$

d) *Arrastra* cualquiera de los vértices del triángulo y observa como cambia este: la medida de sus lados, la amplitud de sus ángulo pero se sigue cumpliendo la relación del enunciado.

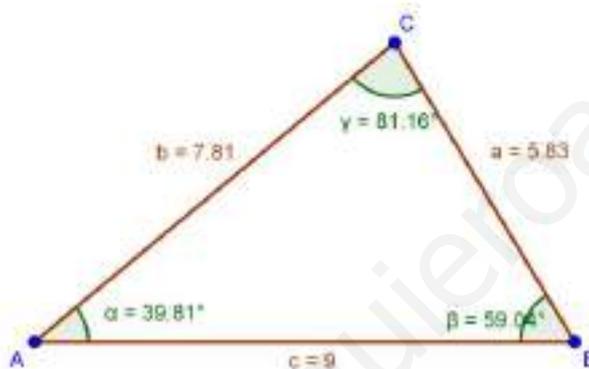
El teorema del coseno afirma que, en un triángulo cualquiera, el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de ellos por el coseno del ángulo que forman:

$$c^2 = 78,5 = 32,98 + 61 - 15,08$$



El teorema del coseno afirma que, en un triángulo cualquiera, el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de ellos por el coseno del ángulo que forman:

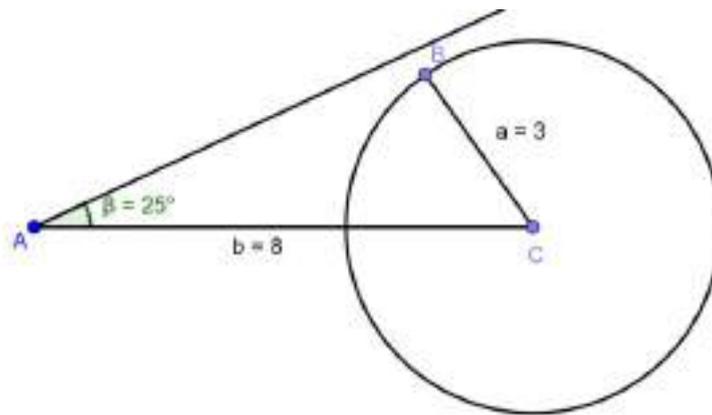
$$c^2 = 81 = 34 + 61 - 14$$



4. a) Construimos y resolvemos el triángulo $a = 3$ cm, $b = 8$ cm y $\alpha = 25^\circ$.

Los pasos a seguir son:

- En el **Campo de Entrada** introduce los valores $a = 3$, $b = 8$ y $\alpha = 25^\circ$.
- Dibuja un segmento de longitud $b = 8$. Renombra el vértice B por C.
- Dibuja un ángulo con un lado el segmento anterior y de amplitud $\alpha = 25^\circ$. Traza la semirrecta de origen A.
- Dibuja una circunferencia de centro el punto C y radio $a = 3$ cm.
- Con Intersección de dos objetos halla la intersección de la semirrecta y de la circunferencia. (Observa que no hay puntos de intersección)

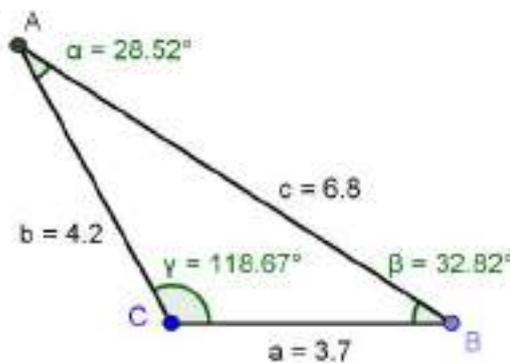


Concluimos que no existe un triángulo con los datos del enunciado.

b) Construimos y resolvemos el triángulo $a = 3,7$ cm, $b = 4,2$ cm y $c = 6,8$ cm.

Los pasos a seguir son:

- En el **Campo de Entrada** introduce los valores $a = 3.7$, $b = 4.2$ y $c = 6.8$.
- Dibuja un segmento AB de longitud a .
- En el *Menú Contextual* de la letra A, elige **Renombra** y cambia la letra A por C.
- Elige **Circunferencia dados su centro y su radio**, dibuja una circunferencia de centro C y radio b . Dibuja otra circunferencia de centro B y radio c .
- Elige **Intersección entre dos objetos** y halla la intersección de las dos circunferencias.
- Ocultas las dos circunferencias, el segmento BC y el punto D.
- Dibuja el triángulo ABC. Mide sus lados y determina la amplitud de sus ángulos.



h) Edita la medida de los lados (para ello, en la *Campo de entradas* introduce las nuevas medidas de los lados, es decir $a = 12.5$ y de igual forma para los lados b y c ; y conseguirás el triángulo que quieras:

$$a = 12.5 \text{ cm}, b = 10.5 \text{ cm}, \text{ y } c = 8.2 \text{ cm}.$$

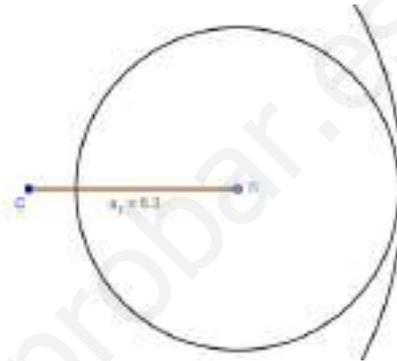
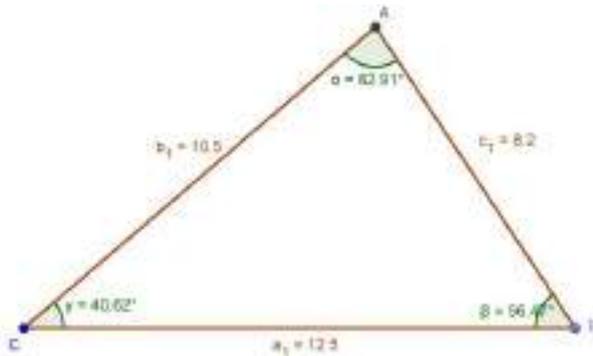
Observa lo que sucede en la *Ventana Gráfica*.

i) Edita los valores de los lados siguientes:

$$a = 5.3 \text{ cm}, b = 9.5 \text{ cm}, \text{ y } c = 4.1 \text{ cm}.$$

Muestra, con la **Ventana Algebraica**, las dos circunferencias para comprobar lo que sucede.

Nota: Conocidos los tres lados puede existir una o ninguna solución, ya que la medida de cada lado debe ser menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia



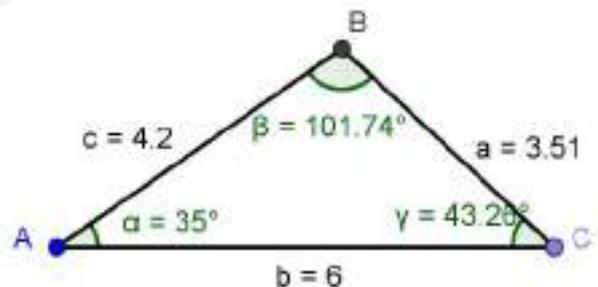
c) Construimos y resolvemos el triángulo $b = 6 \text{ cm}$, $c = 4.2 \text{ cm}$ y $\alpha = 3^\circ$.

Los pasos a seguir son:

a) En el **Campo de Entrada** introduce los valores $b = 6$, $c = 4.2$ y $\alpha = 35^\circ$.

b) Dibuja un ángulo α de amplitud 35° .

c) Dibuja un segmento de longitud $b = 6$.



d) Elige **Circunferencia dados su centro y su radio**, dibuja una circunferencia de centro A y radio $c = 4.2$.

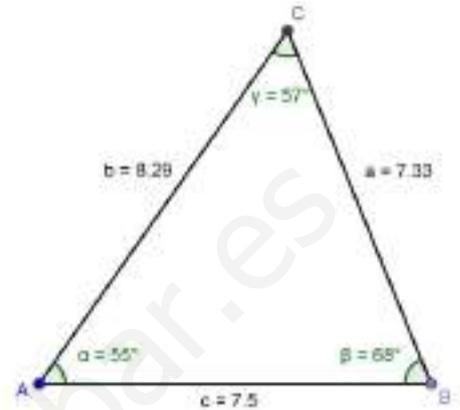
e) Elige **Intersección entre dos objetos** y halla la intersección de la semirrecta con la circunferencia.

f) Oculta los elementos sobrantes, dibuja el triángulo con todos sus elementos y renombra los elementos necesarios, de forma que queda el resultado como aparece en el dibujo.

d) Construimos y resolvemos el triángulo $a = 7,5$ cm, $\alpha = 55^\circ$ y $\beta = 68^\circ$.

Los pasos a seguir son:

- En el **Campo de Entrada** introduce los valores $a = 7.5$, $\alpha = 55^\circ$ y $\beta = 68^\circ$.
- Dibuja un segmento AB de longitud $a = 7.5$.
- Dibuja en el vértice A el ángulo $\alpha = 55^\circ$. Dibuja el lado del ángulo.
- Dibuja en el vértice B el ángulo $\beta = 68^\circ$. Dibuja el lado del ángulo.
- Elige **Intersección entre dos objetos** y halla la intersección de las semirrectas.



ACTIVIDADES-PÁG. 108

1. Las respuestas son:

a) Las medidas en radianes de los ángulos dados son:

$$\text{i) } \alpha = 120^\circ \equiv \frac{2\pi}{3} \text{ rad} \quad \text{ii) } \beta = 210^\circ \equiv \frac{7\pi}{6} \text{ rad} \quad \text{iii) } \gamma = 405^\circ \equiv \frac{9\pi}{4} \text{ rad}$$

b) Las medidas en grados sexagesimales de los ángulos dados son:

$$\text{i) } \alpha = \frac{5\pi}{3} \text{ rad} \equiv 300^\circ \quad \text{ii) } \beta = \frac{9\pi}{4} \text{ rad} \equiv 405^\circ \quad \text{iii) } \gamma = \frac{11\pi}{5} \text{ rad} = 396^\circ$$

c) Los ángulos que resultan de las operaciones son.

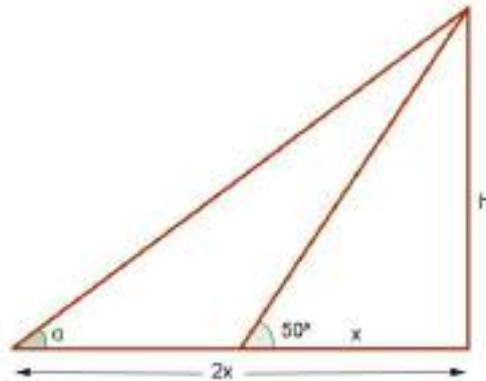
$$\text{i) } \alpha + \beta = 268^\circ 26' \quad \text{ii) } 2\alpha + 3\beta = 761^\circ 52' \quad \text{iii) } 6\alpha - \beta = 35^\circ 36'$$

2. La resolución de los triángulos queda:

a) $C = 28^\circ$	$a = 11,33\text{m}$	$c = 5,32 \text{ m}$
b) $C = 40^\circ$	$b = 11,49 \text{ m}$	$c = 9,64 \text{ m}$
c) $B = 41^\circ 45' 37''$	$C = 48^\circ 14' 23''$	$a = 18,77 \text{ m}$

3. Los ángulos agudos miden $26^\circ 33' 54''$ y $63^\circ 26' 6''$. Los catetos miden 1,34 y 2,68 m.

4. Teniendo en cuenta el dibujo obtenemos:



Si nos colocamos a distancia doble, el ángulo de visión será:

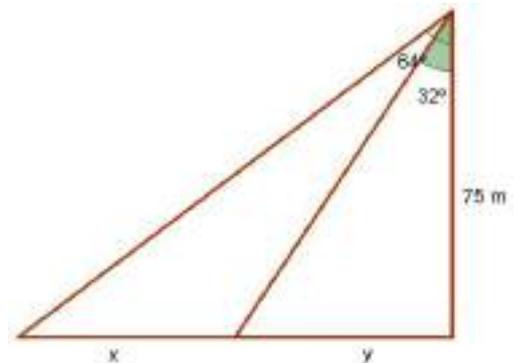
$$\begin{cases} \operatorname{tg} 50^\circ = \frac{h}{x} \\ \operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{2x} \end{cases} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 50^\circ = 0,5959 \Rightarrow \alpha = 30^\circ 47' 23''$$

Si nos colocamos a distancia triple, el ángulo de visión será:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 50^\circ = \frac{h}{x} \\ \operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{3x} \end{cases} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3} \operatorname{tg} 50^\circ = 0,3973 \Rightarrow \alpha = 21^\circ 39' 56''$$

5. Teniendo en cuenta el dibujo, el caminante recorre entre las dos observaciones x metros. Calculamos el valor de x resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 64^\circ = \frac{x+y}{75} \\ \operatorname{tg} 32^\circ = \frac{y}{75} \end{cases} \Rightarrow x = 106,91 \text{ m}$$



La velocidad del caminante es:

$$\frac{101,91 \text{ m}}{1 \text{ min}} = 1,78 \text{ m/s} = 6,41 \text{ km/h.}$$

6. La distancia del centro a la cuerda es 0,57 metros.

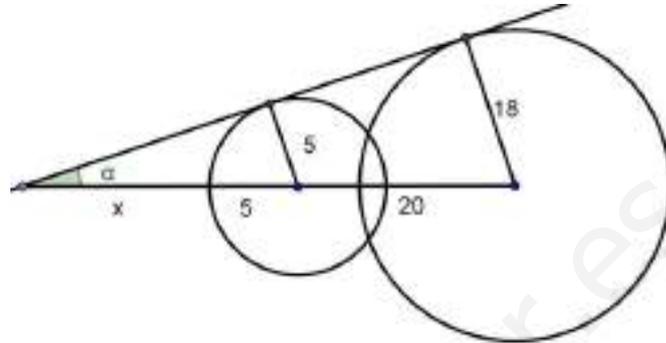
7. Los lados del rectángulo miden 5,26 y 10,79 m, respectivamente. La superficie del rectángulo es:

$$5,26 \times 10,79 = 56,76 \text{ m}^2.$$

8. El lado del pentágono mide 5,88 cm y su apotema 4,05 cm. El área será 59,54 cm².

9. Teniendo en cuenta los triángulos rectángulos del dibujo podemos formular el sistema que sigue.

$$\begin{cases} \operatorname{sen} \alpha = \frac{5}{x+5} \\ \operatorname{sen} \alpha = \frac{18}{x+25} \end{cases}$$



Resolviendo el sistema obtenemos el ángulo $\alpha = 40^\circ 32' 30''$.

10. Las razones son: $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{95}}{12} = -0,8122$ y $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7\sqrt{95}}{95} = 0,7182$

11. Las razones valen: $\cos \beta = -\frac{3}{5} = -0,6$ y $\operatorname{sen} \beta = -\frac{4}{5} = -0,8$

12. Si $\operatorname{tg} \gamma > 0$, el ángulo γ está en el primer o tercer cuadrante. Al ser el valor del coseno negativo, el ángulo pertenece al tercer cuadrante.

Las razones son: $\operatorname{sen} \gamma = -\frac{3}{5} = -0,6$ y $\operatorname{tg} \gamma = \frac{3}{4} = 0,75$

ACTIVIDADES-PÁG. 109

13. Las simplificaciones quedan:

a) $\frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha + \operatorname{tg}^3 \alpha \cdot \cos \alpha}{\sec^2 \alpha} = \operatorname{sen} \alpha$

b) $\frac{1 + \cot g^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \operatorname{ctg}^2 \alpha$

c) $\frac{\cos^2 \alpha \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)}{\cot g \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$

d) $\cot g^2 \alpha + \sec^2 \alpha - \operatorname{cosec}^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha$

e) $\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha} = 1$

$$f) \frac{1 + \cos \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{1}{1 - \cos \alpha}$$

$$g) \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{sec} \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha} = \operatorname{sec} \alpha$$

$$h) \cos^3 \alpha + \cos \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha = \cos \alpha$$

14. Los valores de las razones son:

$$\operatorname{sen} 330^\circ = -\operatorname{sen} 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 330^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 330^\circ = -\operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{sen} 1320^\circ = \operatorname{sen} 240^\circ = -\operatorname{sen} 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 1320^\circ = \cos 240^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 1320^\circ = \operatorname{tg} 240^\circ = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} = \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \frac{3\pi}{4} = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = -1$$

$$\operatorname{sen} -\frac{\pi}{3} = -\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos -\frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} -\frac{\pi}{3} = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

15. Determina, sin hacer uso de la calculadora, las siguientes razones trigonométricas:

$$a) \operatorname{sen} 210^\circ = -\operatorname{sen} 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$c) \operatorname{tg} 330^\circ = -\operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$b) \cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$d) \operatorname{cotg} (-60^\circ) = -\operatorname{cotg} (60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

16. Los valores de las razones son:

$$a) \operatorname{sen} (180^\circ - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha = 0,6$$

$$b) \cos (180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha = -0,8$$

$$c) \operatorname{tg} (90^\circ - \alpha) = \frac{\operatorname{sen} (90^\circ - \alpha)}{\cos (90^\circ - \alpha)} = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = 1,33$$

$$d) \operatorname{cotg} (360^\circ - \alpha) = \frac{\cos (360^\circ - \alpha)}{\operatorname{sen} (360^\circ - \alpha)} = \frac{\cos \alpha}{-\operatorname{sen} \alpha} = -1,33$$

17. Se comprueba del siguiente modo:

$$a) \quad (\sec \alpha - \operatorname{tg} \alpha)^2 = \left(\frac{1}{\cos \alpha} - \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \right)^2 = \frac{(1 - \operatorname{sen} \alpha)^2}{\cos^2 \alpha} = \frac{(1 - \operatorname{sen} \alpha)^2}{(1 - \operatorname{sen} \alpha)(1 + \operatorname{sen} \alpha)} = \frac{1 - \operatorname{sen} \alpha}{1 + \operatorname{sen} \alpha}$$

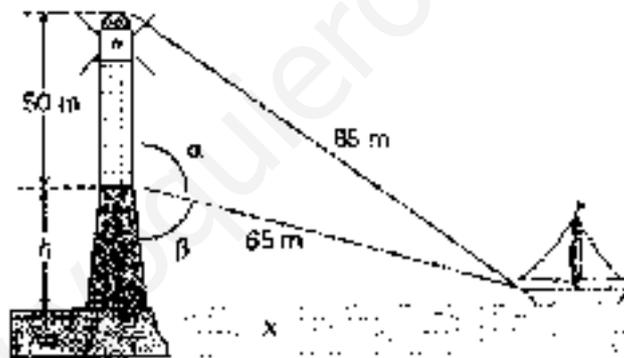
$$b) \quad \frac{\operatorname{tg} \alpha + \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} + \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha + \cos^2 \alpha}{\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \sec \alpha + \operatorname{ctg} \alpha$$

$$c) \quad \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cosec} \alpha - \operatorname{cot} g \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} = 1 + \cos \alpha$$

$$d) \quad \frac{(\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{2} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha - 1}{2} =$$

$$= \frac{2 \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha}{2} = \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha$$

18. Sea la representación del problema:



Por el teorema de Pitágoras obtenemos:

$$\begin{cases} 85^2 = x^2 + (50 + h)^2 \\ 65^2 = h^2 + x^2 \end{cases} \Rightarrow h = 5 \text{ m}$$

También podemos calcular el ángulo α por el teorema del coseno:

$$85^2 = 50^2 + 65^2 - 2 \cdot 65 \cdot 50 \cdot \cos \alpha \Rightarrow \alpha = 94^\circ 24' 42''$$

Por tanto,

$$\beta = 180^\circ - \alpha = 85^\circ 35' 18'' \Rightarrow \cos \beta = \frac{h}{65} \Rightarrow h = 65 \cdot \cos \beta = 5 \text{ m}$$

19. Teniendo en cuenta el teorema del coseno, obtenemos que la anchura, a , de la portería es:

$$a^2 = 16^2 + 10^2 - 2 \cdot 16 \cdot 10 \cdot \cos 65^\circ = 220,7622, \text{ es decir, } a = 14,86 \text{ metros.}$$

20. Los elementos que faltan en cada uno de los triángulos son:

- a) $A = 40^\circ$ $a = 7,42 \text{ m}$ $c = 3,95 \text{ m}$
- b) $A = 42^\circ 33' 20''$ $B = 59^\circ 47' 16''$ $C = 77^\circ 39' 24''$
- c) $B = 27^\circ 21' 47''$ $C = 102^\circ 38' 13''$ $c = 63,69 \text{ m}$
- d) $A = 86^\circ 42' 20''$ $B = 45^\circ 17' 40''$ $c = 23,82 \text{ m}$
- e) No existe ningún triángulo con los datos del enunciado.
- f) Existen dos soluciones:
 Si $A = 69^\circ 26' 7''$, entonces $C = 60^\circ 33' 53''$ y $c = 20,46 \text{ m}$
 Si $A = 110^\circ 33' 53''$, entonces $C = 19^\circ 26' 7''$ y $c = 7,82 \text{ m}$

21. Teniendo en cuenta el dibujo obtenemos:

La hipotenusa del triángulo rectángulo PAV mide:

$$a = \sqrt{1,75^2 + 4^2} = 4,37 \text{ m}$$

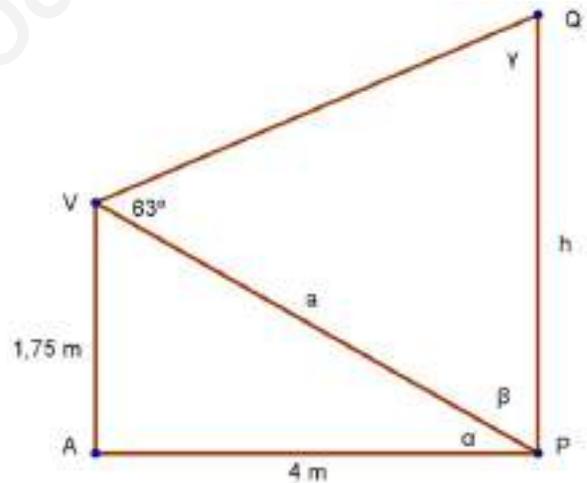
La amplitud del ángulo α es:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1,75}{4} = 0,4375 \Rightarrow \alpha = 23^\circ 27' 46''$$

El ángulo β mide: $\beta = 90^\circ - \alpha = 50^\circ 22' 14''$.

El ángulo γ mide: $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 50^\circ 37' 46''$.

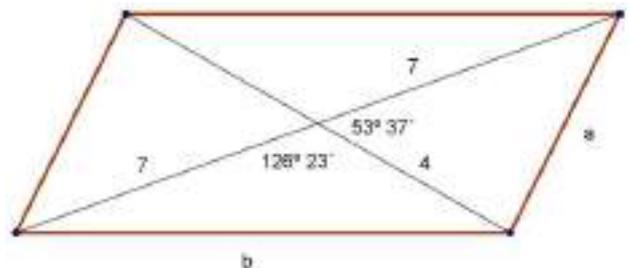
Utilizando el teorema de los senos en el triángulo PQV se obtiene $h = 5,04 \text{ m}$.



22. Teniendo en cuenta el dibujo, la medida de los lados a y b es:

$$a^2 = 7^2 + 4^2 - 2 \cdot 7 \cdot 4 \cdot \cos 53^\circ 37' \Rightarrow a = 5,64 \text{ cm.}$$

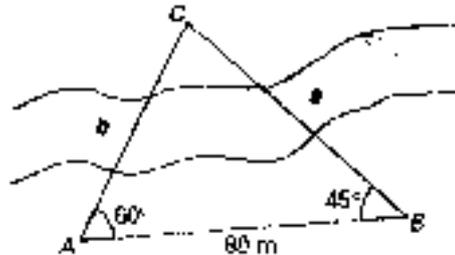
$$b^2 = 7^2 + 4^2 - 2 \cdot 7 \cdot 4 \cdot \cos 126^\circ 23' \Rightarrow b = 9,91 \text{ cm.}$$



23. Su contorno mide 141,54 metros y su superficie 175 metros cuadrados.

ACTIVIDADES-PÁG. 110

24. Un esquema del problema sería:



El ángulo $C = 75^\circ$. Utilizando el teorema de los senos obtenemos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} 60^\circ} = \frac{80}{\operatorname{sen} 75^\circ} \Rightarrow a = 71,73 \text{ m}$$

$$\frac{b}{\operatorname{sen} 45^\circ} = \frac{80}{\operatorname{sen} 75^\circ} \Rightarrow b = 58,56 \text{ m}$$

Las distancias pedidas son 71,73 m y 58,56 m.

25. Un esquema del problema es el siguiente:



El ángulo $C = 24^\circ$.

Determinamos la distancia BC (lado a) mediante el teorema de los senos:

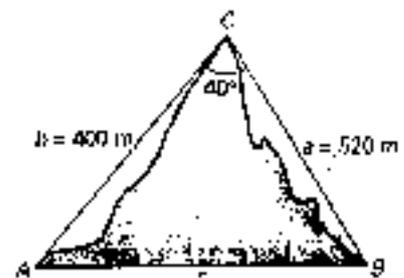
$$\frac{1500}{\operatorname{sen} 24^\circ} = \frac{BC}{\operatorname{sen} 46^\circ} \Rightarrow BC = 2652,85 \text{ m}$$

26. La figura queda:

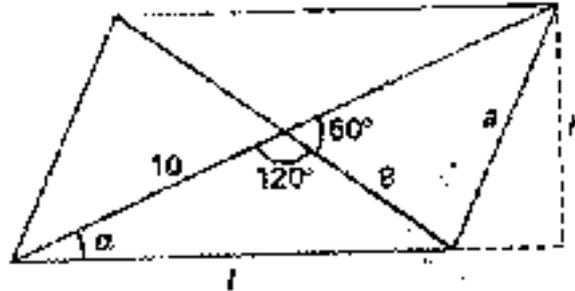
Mediante el teorema del coseno:

$$c^2 = 400^2 + 520^2 - 2 \cdot 400 \cdot 520 \cdot \cos 40^\circ \Rightarrow$$

$$c = AB = 334,25 \text{ m.}$$



27. La figura queda:



Los cálculos son:

$$l^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos 120^\circ \Rightarrow l = 15,62 \text{ cm.}$$

$$a^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow a = 9,17 \text{ cm.}$$

El perímetro mide $2 \cdot 15,62 + 2 \cdot 9,17 = 49,58 \text{ cm.}$

$$a^2 = 20^2 + l^2 - 2 \cdot 20 \cdot l \cdot \cos \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9,17^2 = 20^2 + 15,62^2 - 2 \cdot 20 \cdot 15,62 \cdot \cos \alpha \Rightarrow \alpha = 26^\circ 20' 50''.$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{h}{20} \Rightarrow \operatorname{sen} 26^\circ 20' 50'' = \frac{h}{20} \Rightarrow h = 8,88 \text{ cm.}$$

El área mide:

$$\text{Área} = \text{base} \cdot \text{altura} = l \cdot h = 15,62 \cdot 8,88 \Rightarrow \text{Área} = 138,71 \text{ cm}^2.$$

28. Las soluciones de cada uno de los casos:



El radio de la circunferencia inscrita es la apotema del dodecágono, por tanto:

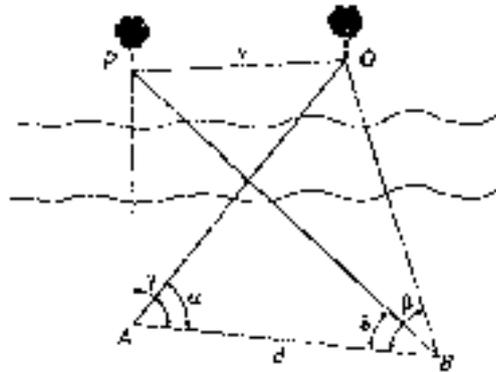
$$\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{3}{r} \Rightarrow r = 11,20 \text{ dm.}$$



El radio de la circunferencia circunscrita lo calculamos en el triángulo:

$$\operatorname{sen} 15^\circ = \frac{3}{R} \Rightarrow R = 11,59 \text{ dm.}$$

29. Según la figura:



Los cálculos quedan:

Sean P y Q los árboles. En el triángulo ABP hallamos PB:

$$\frac{PB}{\operatorname{sen} 110^\circ} = \frac{120}{\operatorname{sen} 130^\circ} \Rightarrow PB = 25,53 \text{ m.}$$

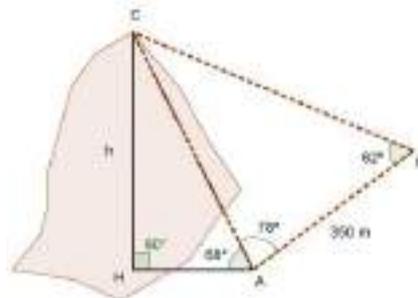
En el triángulo ABQ hallamos BQ:

$$\frac{BQ}{\operatorname{sen} 50^\circ} = \frac{120}{\operatorname{sen} 55^\circ} \Rightarrow BQ = 112,22 \text{ m.}$$

En el triángulo PBQ hallamos x:

$$x^2 = PB^2 + BQ^2 - 2 \cdot PB \cdot BQ \cdot \cos 35^\circ \Rightarrow x = 148,30 \text{ m.}$$

30. Tenemos en cuenta el dibujo adjunto.



En el triángulo ABC hallamos el ángulo en la cima C: $C = 180^\circ - (78^\circ + 62^\circ) \Rightarrow C = 40^\circ$.

Aplicamos el teorema de los senos en el triángulo ABC:

$$\frac{AC}{\operatorname{sen} 62^\circ} = \frac{350}{\operatorname{sen} 40^\circ} \Rightarrow AC = 350 \cdot \frac{\operatorname{sen} 62^\circ}{\operatorname{sen} 40^\circ} \Rightarrow AC = 480,77 \text{ m.}$$

Para calcular la altura h , en el triángulo AHC aplicamos la definición de seno:

$$\operatorname{sen} 68^\circ = \frac{h}{480,77} \Rightarrow h = 480,77 \cdot \operatorname{sen} 68^\circ \Rightarrow h = 445,76 \text{ m.}$$

La altura de la colina es 445,76 metros.

31. a) Dibujamos una circunferencia de radio 4 cm. En ella elegimos uno de sus puntos y con el como referencia dibujamos un ángulo central de 128° . Dibujamos otro ángulo central de 83° adyacente al anterior. Los ángulos anteriores proporcionan tres puntos sobre la circunferencia que permiten dibujar el triángulo ABC.

Como los tres arcos deben medir 360° , el otro arco medirá:
 $360^\circ - (128^\circ + 83^\circ) = 149^\circ$

b) Para calcular la medida de los ángulos del triángulo tenemos en cuenta que los triángulos OBC, OCA y OAB son isósceles.

Los ángulos en el vértice A miden $48,5^\circ$ y $15,5^\circ$; es decir, el ángulo A tiene una amplitud de 64° .

Los ángulos en el vértice B miden 26° y $15,5^\circ$; es decir, el ángulo B tiene una amplitud de $41,5^\circ$.

Los ángulos en el vértice C miden $48,5^\circ$ y 26° ; es decir, el ángulo C tiene una amplitud de $74,5^\circ$.

Para determinar la medida de los lados del triángulo utilizamos el teorema del coseno:

$$a^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos 128^\circ \Rightarrow a^2 = 51,70 \Rightarrow a = 7,19 \text{ cm.}$$

$$b^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos 83^\circ \Rightarrow b^2 = 28,10 \Rightarrow b = 5,30 \text{ cm.}$$

$$c^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos 149^\circ \Rightarrow c^2 = 59,43 \Rightarrow c = 7,71 \text{ cm.}$$

c) Para hallar el área del triángulo utilizamos la fórmula de Herón, siendo el semiperímetro:

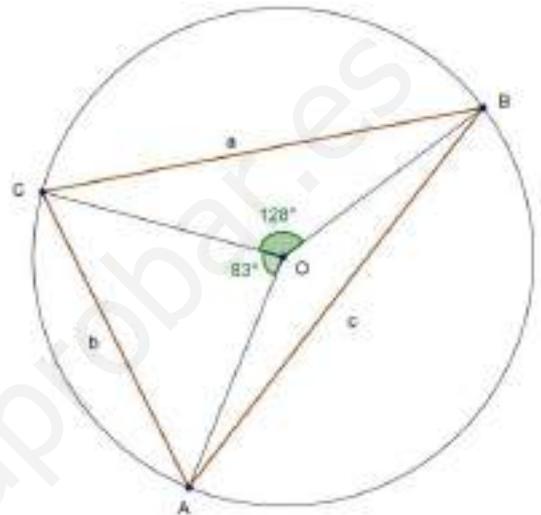
$$p = \frac{7,19 + 5,30 + 7,71}{2} = 10,1$$

El área vale:

$$\text{Área} = \sqrt{10,1 \cdot (10,1 - 7,19) \cdot (10,1 - 5,30) \cdot (10,1 - 7,71)} \Rightarrow \text{Área} = 18,36 \text{ cm}^2.$$

Obtenemos el mismo resultado con la expresión:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 5,30 \cdot 7,71 \cdot \operatorname{sen} 64^\circ \Rightarrow \text{Área} = 18,36 \text{ cm}^2.$$



ACTIVIDADES-PÁG. 111

En esta actividad no damos la solución al uso ya que sobre el número π existe muchísima información tanto bibliográfica como en Internet. Existen monografías dedicadas a este número como las que aparecen en la bibliografía que sigue.

ESTEBAN, M.; IBAÑES, M. y ORTEGA, T. (1998) *Trigonometría*. Editorial Síntesis. Madrid.

NAVARRO, Joaquín. (2010) *Los secretos del número π* . RBA. Barcelona

POSAMENTIER, Alfred. (2006) *La proporción trascendental. La historia de π , el número más misterioso del mundo*. Ariel. Barcelona.

TORIJA, R. (1999). *Arquímedes. Alrededor del círculo*. Nivela. Madrid.

La página web dedicada a π es <http://webs.adam.es/rllorens/pihome.htm>

La página web realizada por los amigos de π puedes encontrarla en <http://webs.adam.es/rllorens/pifriend.htm>