

SISTEMAS DE ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Sistema de ecuación exponencial

Un sistema de ecuaciones exponenciales es aquel sistema en los que las incógnitas aparecen en los exponentes.

Resolución de sistemas de ecuaciones exponenciales

Caso 1

Igualar los exponentes si los dos miembros tienen potencias con la misma base.

Ejemplo

$$\begin{cases} 3^{2x+y} = 3^7 \\ 3^{x-2y} = 3 \end{cases}$$

Igualamos exponentes y resolvemos el sistema.

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \quad x = 3 \quad y = 1$$

Caso 2

Realizar un cambio de variable. Ejemplo

$$\begin{cases} 2^x + 5^y = 9 \\ 2^{x-1} + 5^{y+1} = 9 \end{cases}$$

En primer lugar aplicamos las propiedades de las potencias del producto o el cociente, para quitar las sumas o restas de los exponentes.

$$\begin{cases} 2^x + 5^y = 9 \\ \frac{1}{2} \cdot 2^x + 5 \cdot 5^y = 9 \end{cases}$$

Posteriormente realizamos el cambio de variable:

$$u = 2^x \quad v = 5^y$$

Resolvemos el sistema.

$$\begin{cases} u + v = 9 \\ \frac{u}{2} + 5v = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} u + v = 9 \\ u + 10v = 18 \end{cases}$$

$$u = 8 \quad v = 1$$

Deshacemos el cambio de variable

$$2^x = 8 \quad x = 3$$

$$5^y = 1 \quad y = 0$$

Sistemas de ecuaciones logarítmicas

Para resolver sistemas de ecuaciones logarítmicas actuaremos de modo similar a como lo hicimos con las ecuaciones logarítmicas, es decir basándonos en la definición y las propiedades de los logaritmos y teniendo en cuenta que la función logarítmica es inyectiva.

Veamos dos casos de resolución de sistemas de ecuaciones logarítmicas.

Caso 1

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 11 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$$

En la segunda ecuación aplicamos la propiedad del cociente de un logaritmo, en el primer miembro y en segundo tenemos en cuenta que el logaritmo decimal de 10 es 1.

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log 10$$

Resolvemos el sistema por sustitución y al final comprobamos las soluciones, un solo par de soluciones es válida.

$$\frac{x}{y} = 10 \quad x = 10y$$

$$100y^2 - y^2 = 11$$

$$y^2 = \frac{11}{99} = \frac{1}{9} \quad \begin{cases} y = \frac{1}{3} & x = \frac{10}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Caso 2

Algunos sistemas se pueden **resolver** directamente **por el método de reducción**.

$$\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = 1 \\ \hline 2\log x = 4 \end{cases}$$

$$\log x = 2 \quad x = 10^2 \quad x = 100$$

$$2 + \log y = 3$$

$$\log y = 1 \quad y = 10^1 \quad y = 10$$