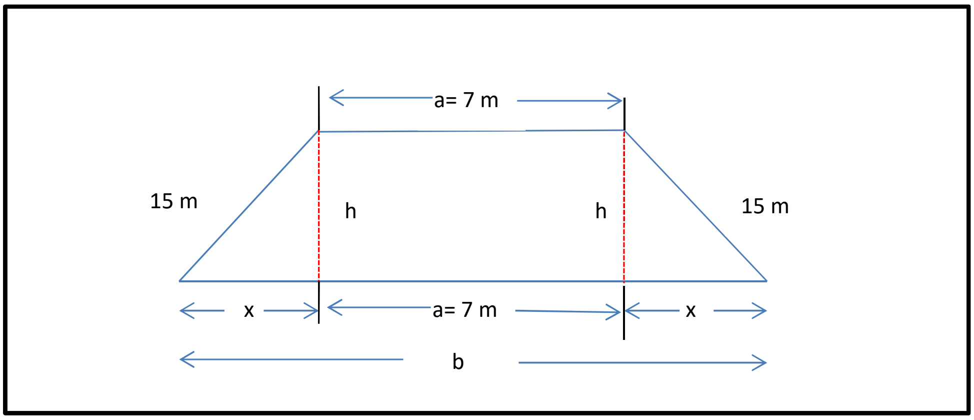
La base menor de un trapecio isósceles mide 7 m. y cada uno de los lados oblicuos 15 m. Hallar la longitud de la base mayor para que el área del trapecio sea máxima.

Solución



Área del trapecio:

$$A_t = h \cdot \frac{(a+b)}{2}\ ecuación\ 1$$

De la figura arriba representada, sabemos que:

$$b = 2x + a$$

Luego:

$$2x = b - a$$

$$x = \frac{b-a}{2}$$

Sustituyendo a por su valor:

$$x = \frac{b-7}{2}\ \ ecuación\ 2$$

Por el teorema de Pitágoras sabemos que:

$$h^2 = 15^2 - x^2\ ecuación\ 3$$

Sustituyendo el valor de x de la ecuación 2, en la ecuación 3:

$$h^2 = 15^2 - x^2\ ecuación\ 3$$

$$h^2 = 15^2 - (\frac{b-7}{2})^2$$

Luego, la altura será:

$$7\ h = \sqrt{15^2 - \frac{(b-7)^2}{4}}\ ecuación$$

Sustituyendo el valor de h en la ecuación 1, tendremos:

$A_t = h \cdot \frac{(a+b)}{2}$ *ecuación* 1

$$A_t = \sqrt{15^2 - (\frac{b-7}{2})^2} \cdot \frac{(7+b)}{2}$$

Como el enunciado nos pide hallar el valor de la base mayor "b" para que el área del trapecio sea máxima, significa que:

$A_t^{\prime} = 0$

$$A_t = \sqrt{225 - \frac{(b-7)^2}{4}} \cdot \frac{(7+b)}{2}$$

Luego, calculamos la 1ª derivada de A_t: es la derivada de un producto:

$$A_t^{\prime} = \frac{0 - \frac{[2\cdot(b-7)\cdot(1-0)\cdot 4]-[0.(b-7)]}{4^2}}{2\cdot\sqrt{\frac{900-(b-7)^2}{4}}} \cdot \frac{(b+7)}{2} + \frac{(1+0)\cdot 2}{2^2}\cdot\sqrt{\frac{900-(b-7)^2}{4}} =$$

$$= \frac{\frac{-2\cdot(b-7)\cdot 4}{4^2}}{\frac{2}{2}\cdot\sqrt{900-(b-7)^2}} \cdot \frac{(b+7)}{2} + \frac{2}{4}\cdot\sqrt{\frac{900-(b-7)^2}{4}} = \frac{-(b-7)\cdot(b+7)}{2\cdot\sqrt{900-(b-7)^2}}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{900-(b-7)^2} =$$

$$= \frac{-(b^2-49)}{4\cdot\sqrt{900-(b-7)^2}} + \frac{1}{4}\sqrt{900-(b-7)^2}$$

Como hemos dicho antes, para que el área del trapecio sea máxima:

$A_t^{\prime} = 0$

Luego:

$$\frac{-(b^2-49)}{4\cdot\sqrt{900-(b-7)^2}} + \frac{1}{4}\sqrt{900-(b-7)^2} = 0$$

$$\frac{-(b^2-49) + (\sqrt{900-(b-7)^2})\cdot(\sqrt{900-(b-7)^2})}{4\cdot\sqrt{900-(b-7)^2}} = 0$$

$$-(b^2-49) + (\sqrt{900-(b-7)^2})\cdot(\sqrt{900-(b-7)^2}) = 0\cdot(4\cdot\sqrt{900-(b-7)^2})$$

$$-(b^2-49) + (\sqrt{900-(b-7)^2})\cdot(\sqrt{900-(b-7)^2}) = 0$$

$$-(b^2-49) + (\sqrt{900-(b-7)^2})^2 = 0$$

$$-(b^2-49) + [900-(b-7)^2] = 0$$

$$-b^2 + 49 + [900 - (b^2 + 49 - 14b)] = 0$$

$$-b^2 + 49 + 900 - b^2 - 49 + 14b = 0$$

$$-2b^2 + 14b + 900 = 0$$

$$2b^2 - 14b - 900 = 0$$

$$b^2 - 7b - 450 = 0$$

$$b=\frac{7\pm\sqrt{49+1800}}{2}=\frac{7\pm\sqrt{1849}}{2}=\frac{7\pm 43}{2}$$

$$b_1=\frac{7+43}{2}=\frac{50}{2}=25\,metros.Solución\ válida$$

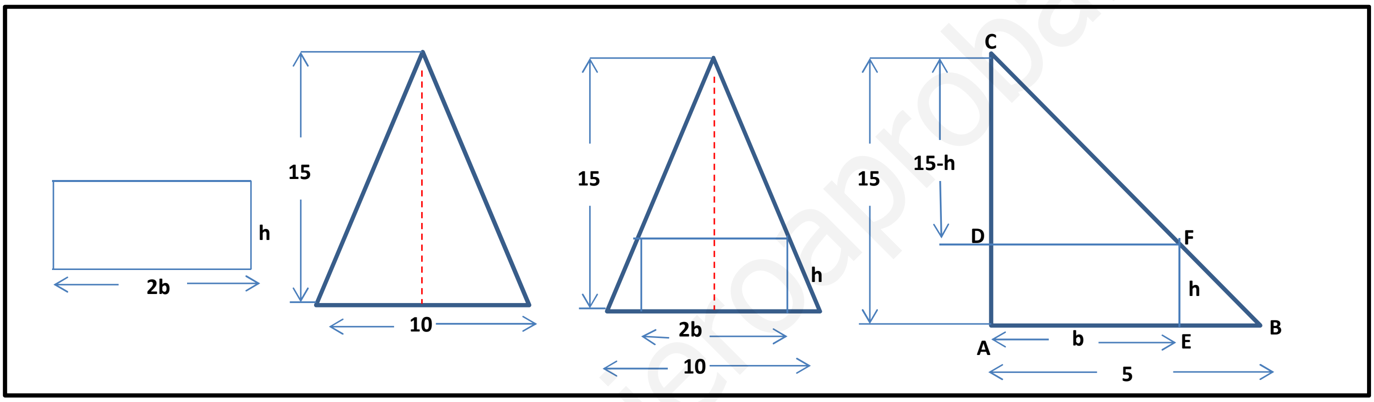
$$b_2=\frac{7-43}{2}=\frac{-36}{2}=-18\ \ Solución\ \ no\ válida$$

Luego, la base mayor "b" medirá: 25 metros.

Problema 95

Hallar las dimensiones del mayor rectángulo inscrito en un triángulo isósceles, que tiene por base 10 cm y por altura 15 cm.

Solución



Sean 2b y h la base y altura respectivamente del rectángulo.

Sean 10 cm la base del triángulo isósceles y 15 cm su altura.

En este caso, al ser un triángulo isósceles, queda como la figura de la derecha:

El triángulo ABC es semejante al triángulo DFC, por tanto:

$$\frac{15}{5}=\frac{15-h}{b}$$

$$3=\frac{15-h}{b}$$

$$b=\frac{15-h}{3}\ \ ecuación\ 1$$

Área del rectángulo:

$$A_r=2b\cdot h\ \ ecuación\ 2$$

Sustituimos el valor de b de la ecuación 1 en la 2:

$$A_r=2\cdot\left(\frac{15-h}{3}\right)\cdot h=\frac{30h-2h^2}{3}$$

El enunciado nos pide, hallar las dimensiones del mayor rectángulo, por lo tanto:

$A_r^{\prime} = 0$

Luego, calculamos la 1ª derivada de A_r: es la derivada de un producto:

$$A_r^{\prime} = \frac{(30-4h)\cdot 3 - 0 \cdot (30h - 2h^2)}{3^2} = \frac{(30-4h)\cdot \cancel{3}}{3^{\cancel{2}}} = \frac{30-4h}{3}$$

Luego:

$A_r^{\prime} = 0$

$$\frac{30-4h}{3} = 0$$

$30 - 4h = 0$

$-4h = -30$

$$h = \frac{30}{4} = \frac{15}{2} = 7{,}5\ cm$$

Sustituimos el valor de h en la ecuación 1:

$$b = \frac{15-h}{3} = \frac{15-7{,}5}{3} = \frac{7{,}5}{3} = 2{,}5\ cm$$

La dimensión de la base será: 2b= 2·2,5 = 5 cm

Las dimensiones del rectángulo serán:

Base: 2b= 5 cm

Altura: h= 7,5 cm