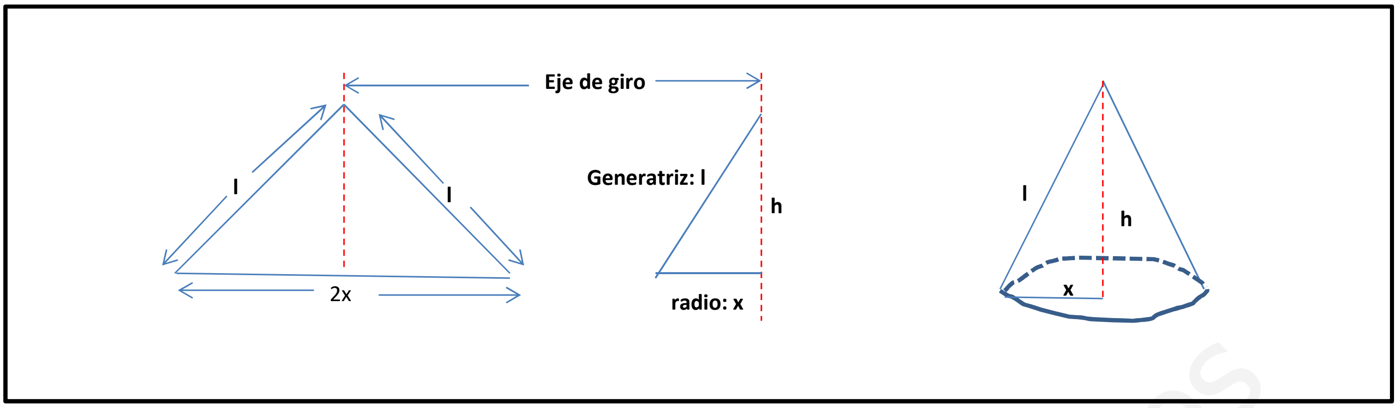
Un triángulo isósceles de perímetro 30 cm. Gira alrededor de su altura engendrando un cono. ¿Qué valor debe darse a la base del triángulo para que el volumen del cono sea máximo?

Solución



Triángulo isósceles: aquel que tiene dos lados de igual longitud.

Sean l la longitud de los dos lados iguales, y 2x la longitud de la base.

Sea h la altura y eje de giro que genera el cono; y "x" la mitad de la base, el radio

Sabemos que el perímetro es:

$$P_t = 2l + 2x$$

$$30 = 2l + 2x$$

Despejamos l:

$$2l = 30 - 2x$$

$$l = \frac{30 - 2x}{2} = 15 - x \; ecuación\ 1$$

Aplicando el teorema de Pitágoras, tenemos:

$$h^2 = l^2 - x^2$$

Sustituimos el valor de "l" en función de "x", de la ecuación 1:

$$h^2 = (15 - x)^2 - x^2$$

$$h^2 = 225 + x^2 - 30x - x^2$$

$$h^2 = 225 - 30x$$

$$h = \sqrt{225 - 30x}$$

Volumen del cono

$$V_c = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

En nuestro caso, el radio es igual a "x". Así tenemos la altura en función del radio:

$$V_c = \frac{1}{3}\pi x^2\sqrt{225 - 30x}$$

Como el enunciado nos pide hallar el valor de la base "2x" para que el volumen del cono sea máximo, significa que:

$V_c^{'} = 0$

Luego, calculamos la 1ª derivada de V_c: es la derivada de un producto:

$$V_c^{'} = \frac{2x\pi}{3}\sqrt{225-30x} + \frac{1}{3}\pi x^2 \cdot \frac{(-30)}{2\sqrt{225-30x}} = \frac{2x\pi}{3}\sqrt{225-30x} + \frac{(-5\pi x^2)}{\sqrt{225-30x}}$$

Como hemos dicho antes, para que el volumen del cono sea máximo:

$V_c^{'} = 0$

Luego

$$\frac{2x\pi}{3}\sqrt{225-30x} + \frac{(-5\pi x^2)}{\sqrt{225-30x}} = 0$$

$$\frac{2x\pi\left(\sqrt{225-30x}\right)\cdot\left(\sqrt{225-30x}\right) - 3\cdot 5\pi x^2}{3\sqrt{225-30x}} = 0$$

$$2x\pi\left(\sqrt{225-30x}\right)\cdot\left(\sqrt{225-30x}\right) - 15\pi x^2 = 0\cdot 3\sqrt{225-30x}$$

$$2x\pi\left(\sqrt{225-30x}\right)\cdot\left(\sqrt{225-30x}\right) - 15\pi x^2 = 0$$

$$2x\pi\left(\sqrt{225-30x}\right)\cdot\left(\sqrt{225-30x}\right) - 15\pi x^2 = 0$$

$$2x\pi\,(225-30x) - 15\pi x^2 = 0$$

Sacamos πx factor común:

$$x\pi\,[2\cdot(225-30x) - 15x] = 0$$

Luego:

$$x\pi = 0$$

$$x = \frac{0}{\pi} = 0 \; solución\ no\ válida$$

O

$$[2\cdot(225-30x) - 15x] = 0$$

$$[450 - 60x - 15x] = 0$$

$$450 - 75x = 0$$

$$75x = 450$$

$$x = \frac{450}{75} = 6 \;\; cm\ solución\ válida$$

La longitud de la base del triángulo isósceles será: 2x= 2·6 12 cm