Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2022-2023

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

## Elija tres de los seis ejercicios siguientes

**EJERCICIO 1:**

Considere las matrices $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

i) Razone qué dimensión debe tener una matriz $D$, para que $\left(B^t \cdot D\right)$ sea una matriz columna.
(2 puntos)
ii) Calcule $A \cdot B$ (2 puntos)
iii) Despeje y calcule la matriz $X$ que verifica la ecuación $ABX - C = I$, siendo $I$ la matriz identidad.
(6 puntos)

**EJERCICIO 2:**

Una empresa produce un tipo de pintura que vende en el mercado nacional, con un beneficio unitario de 10.000 euros/tonelada. Esta empresa se está planteando introducir su producto en el mercado internacional, ya que el beneficio unitario se duplica en dicho mercado. La empresa no se plantea aumentar su capacidad actual de producción de 80 toneladas mensuales.
Por temor a perder la clientela nacional, la empresa ha decidido destinar mensualmente a este mercado al menos el 75% de la producción total. Además, un cliente del mercado internacional ha solicitado a la empresa un pedido de 10 toneladas mensuales, por lo que se ha decidido destinar mensualmente al mercado internacional al menos dicha cantidad.
Determine la cantidad mensual que se deberá destinar a cada uno de los dos mercados, si la empresa desea maximizar el beneficio mensual.
i) Plantee el problema. (4 puntos)
ii) Resuélvalo gráficamente e interprete la solución en el contexto del problema. (4 puntos)
iii) Analice gráficamente qué ocurriría si el beneficio de la pintura en el mercado nacional se incrementa a 20.000 euros/tonelada. (2 puntos)

**EJERCICIO 3:**

Considere la función $f(x)=\sqrt{5+x^2}$.

i) Calcule la ecuación de la recta tangente a la función *f(x)* en el punto *x = –2.* (4 puntos)
ii) Calcule $\int x \cdot f(x)\,dx$. (3 puntos)
iii) Calcule la derivada de la función $g(x)=6\ln(5-3x)+3x^2 sen(7x-5)$. (3 puntos)

**EJERCICIO 4:**
Considere la función $f(x)=-x^2+2x+3$.

i) Calcule los puntos de corte con los ejes. (1 puto)

ii) Calcule los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (3 putos)
iii) Dibuje el recinto limitado por la función *f(x)*, el eje OX y las rectas $x = -2$ y $x = 2$. (2 puntos)
iv) Calcule el área de dicho recinto. (4 puntos)

**EJERCICIO 5:**

En una prueba de evaluación sorpresa para 50 estudiantes, 20 de ellos hacen una prueba tipo test y 30 de ellos resuelven un problema. El 90% de los estudiantes que hacen la prueba tipo test han aprobado y 24 estudiantes que resuelven un problema han aprobado.
i) Se elige al azar un estudiante. Calcule la probabilidad de que no haya aprobado. (2 puntos)
ii) Se elige al azar un estudiante. Si el estudiante ha aprobado, ¿qué es más probable, que haya hecho un examen tipo test o un problema? Calcule dicha probabilidad. (4 puntos)
iii) Se elige un estudiante de examen tipo test y otro estudiante de examen con problema. Calcule la probabilidad de que los dos hayan aprobado. (4 puntos)

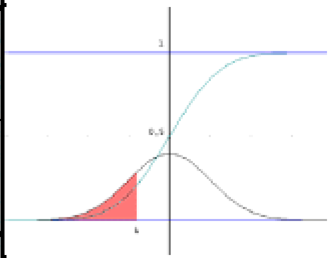
**EJERCICIO 6:**

A partir de una muestra de 200 jóvenes entre 18 y 25 años, se observó que 50 no usan transporte público.
i) Calcule un intervalo de confianza para la proporción de jóvenes que usan transporte público, con un nivel de confianza del 96%. Interprete la solución en el contexto del problema. (5 puntos)
ii) Calcule el tamaño muestral para que la amplitud del intervalo se reduzca a la tercera parte, con un nivel de confianza del 98%. (5 puntos).
(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

www.yoquieroaprobar.es

| k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -3,5 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 |
| -3,4 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0002 |
| -3,3 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0003 |
| -3,2 | 0,0007 | 0,0007 | 0,0006 | 0,0006 | 0,0006 | 0,0006 | 0,0006 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 |
| -3,1 | 0,0010 | 0,0009 | 0,0009 | 0,0009 | 0,0008 | 0,0008 | 0,0008 | 0,0008 | 0,0007 | 0,0007 |
| -3,0 | 0,0013 | 0,0013 | 0,0013 | 0,0012 | 0,0012 | 0,0011 | 0,0011 | 0,0011 | 0,0010 | 0,0010 |
| -2,9 | 0,0019 | 0,0018 | 0,0018 | 0,0017 | 0,0016 | 0,0016 | 0,0015 | 0,0015 | 0,0014 | 0,0014 |
| -2,8 | 0,0026 | 0,0025 | 0,0024 | 0,0023 | 0,0023 | 0,0022 | 0,0021 | 0,0021 | 0,0020 | 0,0019 |
| -2,7 | 0,0035 | 0,0034 | 0,0033 | 0,0032 | 0,0031 | 0,0030 | 0,0029 | 0,0028 | 0,0027 | 0,0026 |
| -2,6 | 0,0047 | 0,0045 | 0,0044 | 0,0043 | 0,0041 | 0,0040 | 0,0039 | 0,0038 | 0,0037 | 0,0036 |
| -2,5 | 0,0062 | 0,0060 | 0,0059 | 0,0057 | 0,0055 | 0,0054 | 0,0052 | 0,0051 | 0,0049 | 0,0048 |
| -2,4 | 0,0082 | 0,0080 | 0,0078 | 0,0075 | 0,0073 | 0,0071 | 0,0069 | 0,0068 | 0,0066 | 0,0064 |
| -2,3 | 0,0107 | 0,0104 | 0,0102 | 0,0099 | 0,0096 | 0,0094 | 0,0091 | 0,0089 | 0,0087 | 0,0084 |
| -2,2 | 0,0139 | 0,0136 | 0,0132 | 0,0129 | 0,0125 | 0,0122 | 0,0119 | 0,0116 | 0,0113 | 0,0110 |
| -2,1 | 0,0179 | 0,0174 | 0,0170 | 0,0166 | 0,0162 | 0,0158 | 0,0154 | 0,0150 | 0,0146 | 0,0143 |
| -2,0 | 0,0228 | 0,0222 | 0,0217 | 0,0212 | 0,0207 | 0,0202 | 0,0197 | 0,0192 | 0,0188 | 0,0183 |
| -1,9 | 0,0287 | 0,0281 | 0,0274 | 0,0268 | 0,0262 | 0,0256 | 0,0250 | 0,0244 | 0,0239 | 0,0233 |
| -1,8 | 0,0359 | 0,0351 | 0,0344 | 0,0336 | 0,0329 | 0,0322 | 0,0314 | 0,0307 | 0,0301 | 0,0294 |
| -1,7 | 0,0446 | 0,0436 | 0,0427 | 0,0418 | 0,0409 | 0,0401 | 0,0392 | 0,0384 | 0,0375 | 0,0367 |
| -1,6 | 0,0548 | 0,0537 | 0,0526 | 0,0516 | 0,0505 | 0,0495 | 0,0485 | 0,0475 | 0,0465 | 0,0455 |
| -1,5 | 0,0668 | 0,0655 | 0,0643 | 0,0630 | 0,0618 | 0,0606 | 0,0594 | 0,0582 | 0,0571 | 0,0559 |
| -1,4 | 0,0808 | 0,0793 | 0,0778 | 0,0764 | 0,0749 | 0,0735 | 0,0721 | 0,0708 | 0,0694 | 0,0681 |
| -1,3 | 0,0968 | 0,0951 | 0,0934 | 0,0918 | 0,0901 | 0,0885 | 0,0869 | 0,0853 | 0,0838 | 0,0823 |
| -1,2 | 0,1151 | 0,1131 | 0,1112 | 0,1093 | 0,1075 | 0,1056 | 0,1038 | 0,1020 | 0,1003 | 0,0985 |
| -1,1 | 0,1357 | 0,1335 | 0,1314 | 0,1292 | 0,1271 | 0,1251 | 0,1230 | 0,1210 | 0,1190 | 0,1170 |
| -1,0 | 0,1587 | 0,1562 | 0,1539 | 0,1515 | 0,1492 | 0,1469 | 0,1446 | 0,1423 | 0,1401 | 0,1379 |
| -0,9 | 0,1841 | 0,1814 | 0,1788 | 0,1762 | 0,1736 | 0,1711 | 0,1685 | 0,1660 | 0,1635 | 0,1611 |
| -0,8 | 0,2119 | 0,2090 | 0,2061 | 0,2033 | 0,2005 | 0,1977 | 0,1949 | 0,1922 | 0,1894 | 0,1867 |
| -0,7 | 0,2420 | 0,2389 | 0,2358 | 0,2327 | 0,2296 | 0,2266 | 0,2236 | 0,2206 | 0,2177 | 0,2148 |
| -0,6 | 0,2743 | 0,2709 | 0,2676 | 0,2643 | 0,2611 | 0,2578 | 0,2546 | 0,2514 | 0,2483 | 0,2451 |
| -0,5 | 0,3085 | 0,3050 | 0,3015 | 0,2981 | 0,2946 | 0,2912 | 0,2877 | 0,2843 | 0,2810 | 0,2776 |
| -0,4 | 0,3446 | 0,3409 | 0,3372 | 0,3336 | 0,3300 | 0,3264 | 0,3228 | 0,3192 | 0,3156 | 0,3121 |
| -0,3 | 0,3821 | 0,3783 | 0,3745 | 0,3707 | 0,3669 | 0,3632 | 0,3594 | 0,3557 | 0,3520 | 0,3483 |
| -0,2 | 0,4207 | 0,4168 | 0,4129 | 0,4090 | 0,4052 | 0,4013 | 0,3974 | 0,3936 | 0,3897 | 0,3859 |
| -0,1 | 0,4602 | 0,4562 | 0,4522 | 0,4483 | 0,4443 | 0,4404 | 0,4364 | 0,4325 | 0,4286 | 0,4247 |
| -0,0 | 0,5000 | 0,4960 | 0,4920 | 0,4880 | 0,4840 | 0,4801 | 0,4761 | 0,4721 | 0,4681 | 0,4641 |
| k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 0,0 | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 | 0,5279 | 0,5319 | 0,5359 |
| 0,1 | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 | 0,5675 | 0,5714 | 0,5753 |
| 0,2 | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 | 0,6064 | 0,6103 | 0,6141 |
| 0,3 | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 | 0,6443 | 0,6480 | 0,6517 |
| 0,4 | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 | 0,6808 | 0,6844 | 0,6879 |
| 0,5 | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | 0,7054 | 0,7088 | 0,7123 | 0,7157 | 0,7190 | 0,7224 |
| 0,6 | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | 0,7357 | 0,7389 | 0,7422 | 0,7454 | 0,7486 | 0,7517 | 0,7549 |
| 0,7 | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 | 0,7704 | 0,7734 | 0,7764 | 0,7794 | 0,7823 | 0,7852 |
| 0,8 | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 | 0,7995 | 0,8023 | 0,8051 | 0,8078 | 0,8106 | 0,8133 |
| 0,9 | 0,8159 | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238 | 0,8264 | 0,8289 | 0,8315 | 0,8340 | 0,8365 | 0,8389 |
| 1,0 | 0,8413 | 0,8438 | 0,8461 | 0,8485 | 0,8508 | 0,8531 | 0,8554 | 0,8577 | 0,8599 | 0,8621 |
| 1,1 | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 | 0,8749 | 0,8770 | 0,8790 | 0,8810 | 0,8830 |
| 1,2 | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8907 | 0,8925 | 0,8944 | 0,8962 | 0,8980 | 0,8997 | 0,9015 |
| 1,3 | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082 | 0,9099 | 0,9115 | 0,9131 | 0,9147 | 0,9162 | 0,9177 |
| 1,4 | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236 | 0,9251 | 0,9265 | 0,9279 | 0,9292 | 0,9306 | 0,9319 |
| 1,5 | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 | 0,9394 | 0,9406 | 0,9418 | 0,9429 | 0,9441 |
| 1,6 | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | 0,9484 | 0,9495 | 0,9505 | 0,9515 | 0,9525 | 0,9535 | 0,9545 |
| 1,7 | 0,9554 | 0,9564 | 0,9573 | 0,9582 | 0,9591 | 0,9599 | 0,9608 | 0,9616 | 0,9625 | 0,9633 |
| 1,8 | 0,9641 | 0,9649 | 0,9656 | 0,9664 | 0,9671 | 0,9678 | 0,9686 | 0,9693 | 0,9699 | 0,9706 |
| 1,9 | 0,9713 | 0,9719 | 0,9726 | 0,9732 | 0,9738 | 0,9744 | 0,9750 | 0,9756 | 0,9761 | 0,9767 |
| 2,0 | 0,9772 | 0,9778 | 0,9783 | 0,9788 | 0,9793 | 0,9798 | 0,9803 | 0,9808 | 0,9812 | 0,9817 |
| 2,1 | 0,9821 | 0,9826 | 0,9830 | 0,9834 | 0,9838 | 0,9842 | 0,9846 | 0,9850 | 0,9854 | 0,9857 |
| 2,2 | 0,9861 | 0,9864 | 0,9868 | 0,9871 | 0,9875 | 0,9878 | 0,9881 | 0,9884 | 0,9887 | 0,9890 |
| 2,3 | 0,9893 | 0,9896 | 0,9898 | 0,9901 | 0,9904 | 0,9906 | 0,9909 | 0,9911 | 0,9913 | 0,9916 |
| 2,4 | 0,9918 | 0,9920 | 0,9922 | 0,9925 | 0,9927 | 0,9929 | 0,9931 | 0,9932 | 0,9934 | 0,9936 |
| 2,5 | 0,9938 | 0,9940 | 0,9941 | 0,9943 | 0,9945 | 0,9946 | 0,9948 | 0,9949 | 0,9951 | 0,9952 |
| 2,6 | 0,9953 | 0,9955 | 0,9956 | 0,9957 | 0,9959 | 0,9960 | 0,9961 | 0,9962 | 0,9963 | 0,9964 |
| 2,7 | 0,9965 | 0,9966 | 0,9967 | 0,9968 | 0,9969 | 0,9970 | 0,9971 | 0,9972 | 0,9973 | 0,9974 |
| 2,8 | 0,9974 | 0,9975 | 0,9976 | 0,9977 | 0,9977 | 0,9978 | 0,9979 | 0,9979 | 0,9980 | 0,9981 |
| 2,9 | 0,9981 | 0,9982 | 0,9982 | 0,9983 | 0,9984 | 0,9984 | 0,9985 | 0,9985 | 0,9986 | 0,9986 |
| 3,0 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9988 | 0,9988 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9990 | 0,9990 |
| 3,1 | 0,9990 | 0,9991 | 0,9991 | 0,9991 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9993 | 0,9993 |
| 3,2 | 0,9993 | 0,9993 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9995 |
| 3,3 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9997 |
| 3,4 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9998 |
| 3,5 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 |

$$P(Z < k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{k} e^{-t^2/2}\, dt$$



www.yoquieroaprobar.es

# SOLUCIONES

**EJERCICIO 1:**

Considere las matrices $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ $y$ $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

i) Razone qué dimensión debe tener una matriz $D$, para que $\left(B^t \cdot D\right)$ sea una matriz columna.
(2 puntos)
ii) Calcule $A \cdot B$ (2 puntos)
iii) Despeje y calcule la matriz $X$ que verifica la ecuación $ABX - C = I$, siendo $I$ la matriz identidad.
(6 puntos)

i) La matriz D es de dimensiones $m \times n$.

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B^t \cdot D \quad = \quad E$$
$$2\times\boxed{3\cdot m}\times n \to 2\times n$$

Para que sea posible el producto debe ser $m = 3$ y el resultado del producto tiene dimensiones $2\times n$ y para que sea una matriz columna debe ser $n = 1$.

La matriz D debe ser de dimensiones $3\times 1$.

ii) Obtenemos la expresión de $A \cdot B$.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6-2-1 & 3+0-1 \\ 0+2+1 & 0+0+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

iii) Despejamos X de la ecuación.

$$ABX - C = I \Rightarrow ABX = I + C \Rightarrow (AB)^{-1}\cdot ABX = (AB)^{-1}\cdot(I+C) \Rightarrow X = (AB)^{-1}\cdot(I+C)$$

Hallamos la inversa de AB.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A\cdot B)^T=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^{-1}=\frac{Adj\left((AB)^T\right)}{|AB|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}{3-6}=\frac{1}{-3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

www.yoquieroaprobar.es

Hallamos la expresión de X.

$$X=(AB)^{-1}\cdot(I+C)=\begin{pmatrix}-1/3 & 2/3\\ 1 & -1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & -1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}-1/3 & 2/3\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ -2 & 0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}-2/3-4/3 & 0\\ 2+2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 4 & 0\end{pmatrix}}$$

www.yoquieroaprobar.es

**EJERCICIO 2:**
Una empresa produce un tipo de pintura que vende en el mercado nacional, con un beneficio unitario de 10.000 euros/tonelada. Esta empresa se está planteando introducir su producto en el mercado internacional, ya que el beneficio unitario se duplica en dicho mercado. La empresa no se plantea aumentar su capacidad actual de producción de 80 toneladas mensuales.
Por temor a perder la clientela nacional, la empresa ha decidido destinar mensualmente a este mercado al menos el 75% de la producción total. Además, un cliente del mercado internacional ha solicitado a la empresa un pedido de 10 toneladas mensuales, por lo que se ha decidido destinar mensualmente al mercado internacional al menos dicha cantidad.
Determine la cantidad mensual que se deberá destinar a cada uno de los dos mercados, si la empresa desea maximizar el beneficio mensual.
i) Plantee el problema. (4 puntos)
ii) Resuélvalo gráficamente e interprete la solución en el contexto del problema. (4 puntos)
iii) Analice gráficamente qué ocurriría si el beneficio de la pintura en el mercado nacional se incrementa a 20.000 euros/tonelada. (2 puntos)

i) Es un problema de programación lineal.
Llamamos x = "Toneladas para el mercado nacional". y = "Toneladas para el mercado internacional".

Se desea maximizar el beneficio mensual. La función objetivo sería:

"vende en el mercado nacional, con un beneficio unitario de 10.000 euros/tonelada. El beneficio unitario se duplica en el mercado internacional" → $f(x,y)=10000x+20000y$

Las restricciones planteadas nos permiten establecer unas inecuaciones cuyas soluciones constituyen una región del plano que llamamos región factible.

"La empresa no se plantea aumentar su capacidad actual de producción de 80 toneladas mensuales" → $x+y\leq 80$

"La empresa ha decidido destinar mensualmente al mercado nacional al menos el 75% de la producción total" → $x\geq 0.75(x+y)$

"Un cliente del mercado internacional ha solicitado a la empresa un pedido de 10 toneladas mensuales" → $y\geq 10$

Además, las cantidades deben ser valores positivos → $x\geq 0;\quad y\geq 0$

Reunimos las inecuaciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+y\leq 80 \\ x\geq 0.75(x+y) \\ y\geq 10 \\ x\geq 0;\quad y\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y\leq 80 \\ x\geq 0.75x+0.75y\rightarrow 0.25x\geq 0.75y \\ y\geq 10 \\ x\geq 0;\quad y\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y\leq 80 \\ x\geq 3y \\ y\geq 10 \\ x\geq 0;\quad y\geq 0 \end{array}\right\}$$

ii) Para dibujar la región factible dibujamos primero las rectas que la delimitan.

$x + y = 80$

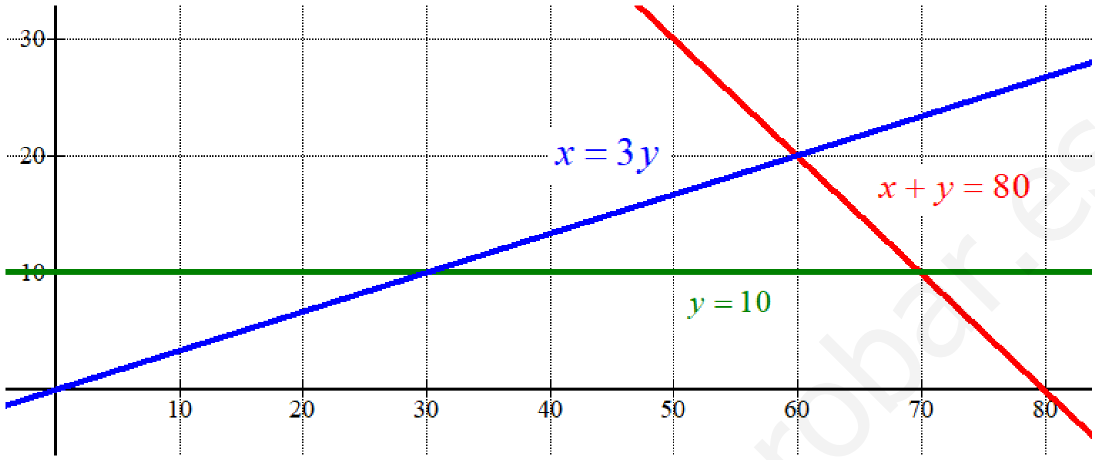
| $x$ | $y = 80 - x$ |
|---|---|
| 0 | 80 |
| 60 | 20 |
| 70 | 10 |

$x = 3y$

| $x$ | $y = \dfrac{x}{3}$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 30 | 10 |
| 60 | 20 |

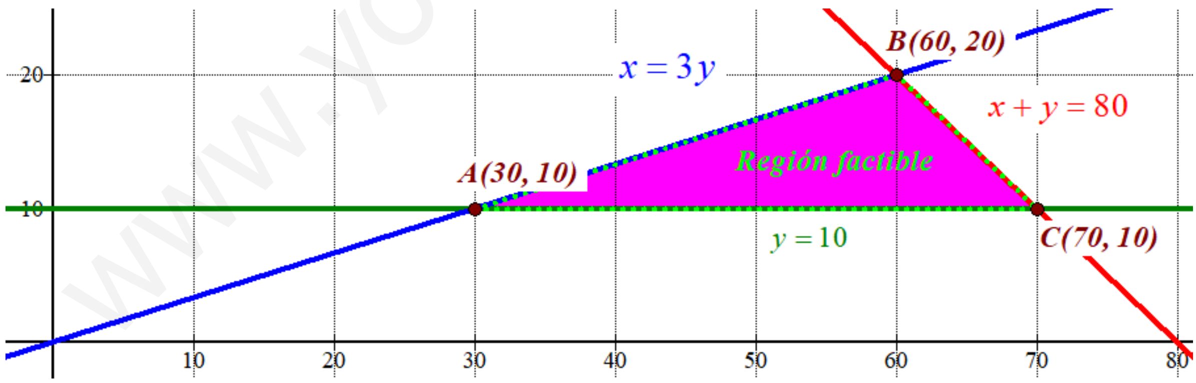
$y = 10$

| $x$ | $y = 10$ |
|---|---|
| 0 | 10 |
| 30 | 10 |
| 70 | 10 |




Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x + y \le 80 \\ x \ge 3y \\ y \ge 10 \\ x \ge 0; \quad y \ge 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del plano situada en el primer cuadrante por debajo de la recta azul y roja, y por encima de la recta horizontal verde.

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.




Valoramos la función beneficio $f(x, y) = 10000x + 20000y$ en cada uno de los vértices de la región factible en busca de un valor máximo de beneficio.

A(30,10) → $f(30,10) = 300000 + 200000 = 500000$
B(60, 20) → $f(60,20) = 600000 + 400000 = 1000000$ ¡Máximo!
C(70, 10) → $f(70,10) = 700000 + 200000 = 900000$

El máximo beneficio mensual es de 1000 000 € y se obtiene en el punto B(60, 20).

www.yoquieroaprobar.es

Enviando 60 toneladas al mercado nacional y 20 al internacional se satisfacen todas las restricciones y se obtiene un beneficio mensual máximo de 1000 000 €.

iii) Si el beneficio de la pintura en el mercado nacional se incrementa a 20.000 euros/tonelada tendríamos que utilizar una nueva función de beneficio mensual: $f(x,y)=20000x+20000y$

Si valoramos la función en los nuevos vértices tenemos que:

A(30,10) → $f(30,10)=600000+200000=800\,000$

B(60, 20) → $f(60,20)=1200000+400000=1600\,000$ ¡Máximo!

C(70, 10) → $f(70,10)=1400000+200000=1600\,000$ ¡Máximo!

El máximo beneficio mensual se alcanza en dos vértices: B y C.
Por lo que dicho beneficio máximo se alcanza en todos los puntos del segmento BC. Por ejemplo B(60, 20), D(61, 19), E(62, 18),…, C(70, 10)
obteniendo un beneficio mensual máximo de 1 600 000 €.

www.yoquieroaprobar.es

**EJERCICIO 3:**

Considere la función $f(x)=\sqrt{5+x^2}$.

i) Calcule la ecuación de la recta tangente a la función *f(x)* en el punto *x = –2.* (4 puntos)

ii) Calcule $\int x\cdot f(x)\,dx$. (3 puntos)

iii) Calcule la derivada de la función $g(x)=6\ln(5-3x)+3x^2 sen(7x-5)$. (3 puntos)

i) La ecuación de la recta tangente en *x = –2* es $y-f(-2)=f'(-2)(x-(-2))$

$$f(x)=\sqrt{5+x^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{5+x^2}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{5+x^2}}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(-2)=\sqrt{5+(-2)^2}=3 \\ f'(-2)=\dfrac{-2}{\sqrt{5+(-2)^2}}=\dfrac{-2}{3} \\ y-f(-2)=f'(-2)(x+2) \end{array}\right\} \Rightarrow y-3=-\frac{2}{3}(x+2) \Rightarrow y-3=-\frac{2x}{3}-\frac{4}{3} \Rightarrow \boxed{y=\frac{-2}{3}x+\frac{5}{3}}$$

ii)

$$\int xf(x)\,dx=\int x\sqrt{5+x^2}\,dx=\left\{\begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \sqrt{5+x^2}=t \to 5+x^2=t^2 \\ 2xdx=2tdt \to dx=\dfrac{t}{x}dt \end{array}\right\}=\int x\cdot t\cdot\frac{t}{x}dt=\int t^2dt=\frac{t^3}{3}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{5+x^2}\right)^3}{3}=\boxed{\frac{1}{3}\sqrt{\left(5+x^2\right)^3}+K}$$

iii)

$$g'(x)=6\frac{-3}{5-3x}+6xsen(7x-5)+3x^2(7)\cos(7x-5)$$

$$\boxed{g'(x)=\frac{-18}{5-3x}+6xsen(7x-5)+21x^2\cos(7x-5)}$$

**EJERCICIO 4:**

Considere la función $f(x)=-x^2+2x+3$.

i) Calcule los puntos de corte con los ejes. (1 puto)

ii) Calcule los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (3 putos)

iii) Dibuje el recinto limitado por la función *f(x)*, el eje OX y las rectas *x = –2* y *x = 2*. (2 puntos)

iv) Calcule el área de dicho recinto. (4 puntos)

**i)** $x=0 \Rightarrow f(0)=-0^2+2\cdot 0+3=3 \Rightarrow P(0,3)$

$$y=0 \Rightarrow -x^2+2x+3=0 \Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4(-1)(3)}}{2(-1)}=\frac{-2\pm 4}{-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-2+4}{-2}=-1=x \to Q(-1,0) \\ \dfrac{-2-4}{-2}=3=x \to R(3,0) \end{cases}$$

Los puntos de corte con los ejes son: P(0, 3); Q(–1, 0) y R(3, 0).

ii) Calculamos la derivada y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

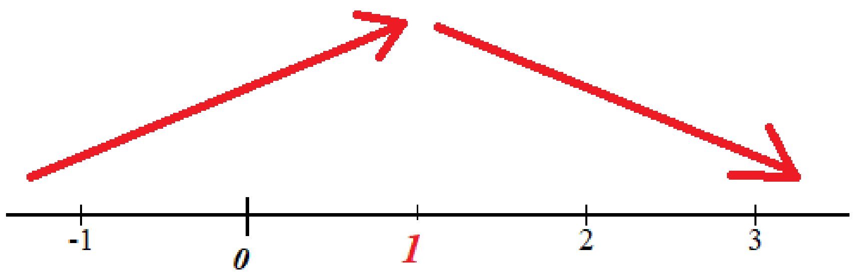
$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=-2x+2 \\ f'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -2x+2=0 \Rightarrow x=1$$

La función presenta un punto crítico. Comprobamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

En el intervalo $(-\infty,1)$ tomamos *x = 0* y la derivada vale $f'(0)=-2\cdot 0+2=2>0$. La función crece en $(-\infty,1)$.

En el intervalo $(1,+\infty)$ tomamos *x = 2* y la derivada vale $f'(2)=-2\cdot 2+2=-2<0$. La función decrece en $(1,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:




$f(1)=-1^2+2+3=4$. La función tiene un máximo relativo en el punto (1, 4).

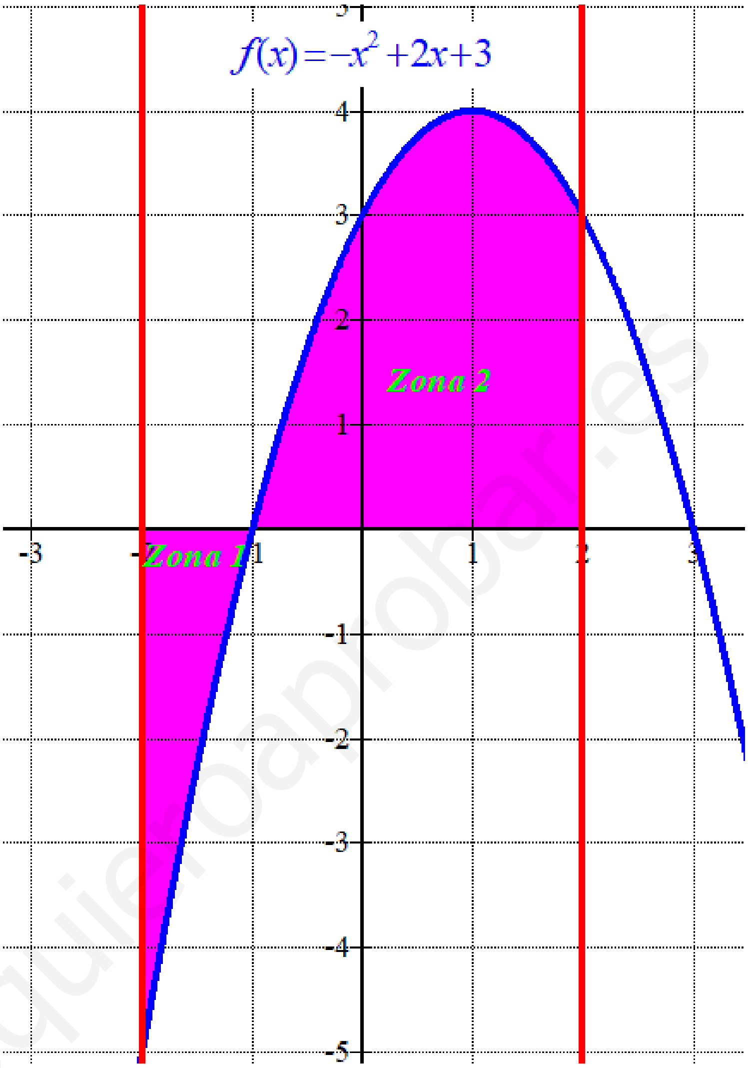
La función crece en $(-\infty,1)$ y decrece en $(1,+\infty)$.



www.yoquieroaprobar.es

iii) La función corta el eje OX en $x = -1$ y en $x = 3$.
Hacemos una tabla de valores y dibujamos la región del plano limitada por la gráfica y el eje OX.

| $x$ | $y=-x^2+2x+3$ |
|---|---|
| $-2$ | $-5$ |
| $-1$ | $0$ |
| $0$ | $3$ |
| $1$ | $4$ |
| $2$ | $3$ |
| $3$ | $0$ |




iv) El área del recinto la calculamos como la suma del área de la zona 1 más el área de la zona 2.

$$\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx = \int_{-2}^{-1} -x^2+2x+3\,dx = \left[-\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right]_{-2}^{-1} =$$

$$=\left[-\frac{(-1)^3}{3}+(-1)^2+3(-1)\right]-\left[-\frac{(-2)^3}{3}+(-2)^2+3(-2)\right]=\frac{1}{3}+1-3-\frac{8}{3}-4+6=\frac{-7}{3}$$

$$Área1 = \boxed{\frac{7}{3}\,u^2}$$

$$\acute{A}rea\,2=\int_{-1}^{2} f\left(x\right)dx=\int_{-1}^{2} -x^2+2x+3dx=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right]_{-1}^{2}=$$

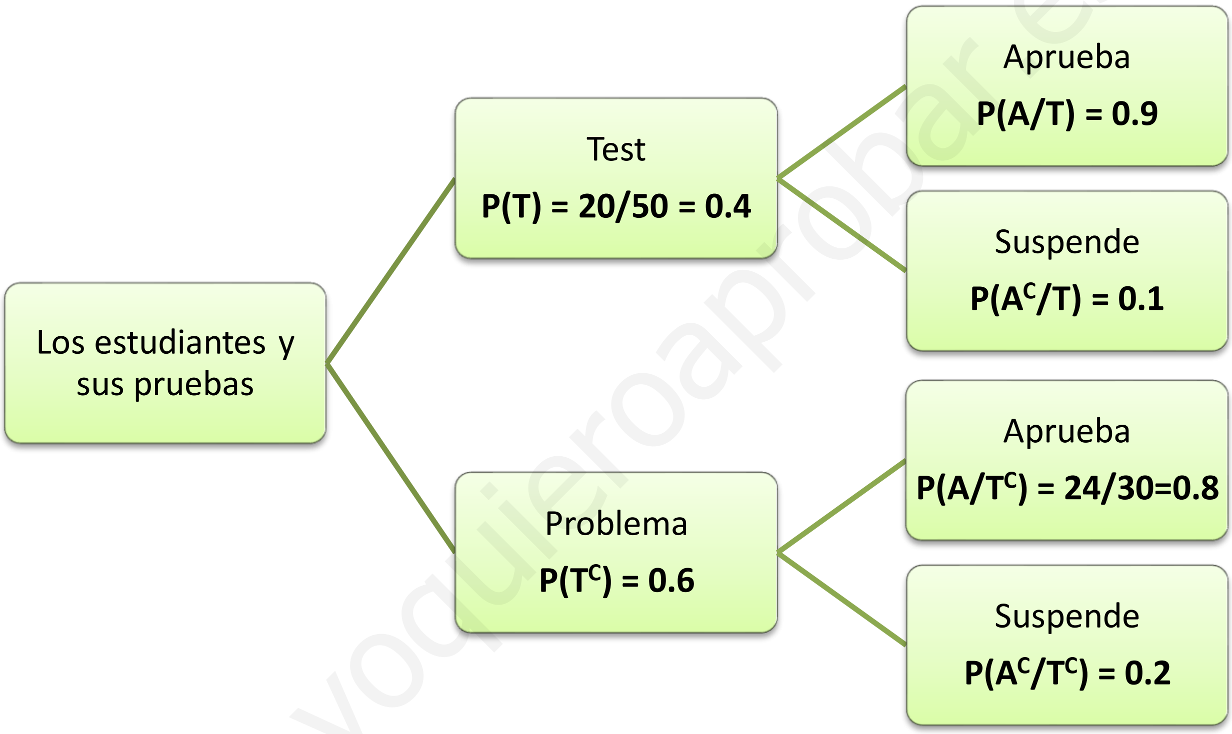
$$=\left[-\frac{2^3}{3}+2^2+3\left(2\right)\right]-\left[-\frac{\left(-1\right)^3}{3}+\left(-1\right)^2+3\left(-1\right)\right]=-\frac{8}{3}+4+6-\frac{1}{3}-1+3=\boxed{9u^2}$$

El área total del recinto es de $\frac{7}{3}+9=\frac{34}{3}\simeq 11.33$ unidades cuadradas.

www.yoquieroaprobar.es

**EJERCICIO 5:**
En una prueba de evaluación sorpresa para 50 estudiantes, 20 de ellos hacen una prueba tipo test y 30 de ellos resuelven un problema. El 90% de los estudiantes que hacen la prueba tipo test han aprobado y 24 estudiantes que resuelven un problema han aprobado.
i) Se elige al azar un estudiante. Calcule la probabilidad de que no haya aprobado. (2 puntos)
ii) Se elige al azar un estudiante. Si el estudiante ha aprobado, ¿qué es más probable, que haya hecho un examen tipo test o un problema? Calcule dicha probabilidad. (4 puntos)
iii) Se elige un estudiante de examen tipo test y otro estudiante de examen con problema. Calcule la probabilidad de que los dos hayan aprobado. (4 puntos)

Llamamos T = “Hacer un test”, $T^C$= “Hacer un problema”, A = “Aprobar”
Realizamos un diagrama de árbol.




www.yoquieroaprobar.es

i) Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$P\left(A^C\right)=P\left(T\cap A^C\right)+P\left(T^C\cap A^C\right)=P\left(T\right)P\left(A^C/T\right)+P\left(T^C\right)P\left(A^C/T^C\right)=$$

$$=0.4\cdot 0.1+0.6\cdot 0.2=\boxed{0.16}$$

ii) Calculamos la probabilidad de las dos opciones.
Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P\left(T/A\right)=\frac{P\left(T\cap A\right)}{P\left(A\right)}=\frac{P\left(T\right)P\left(A/T\right)}{1-0.16}=\frac{0.4\cdot 0.9}{0.84}=\boxed{\frac{3}{7}\simeq 0.4286}$$

$$P\left(T^C/A\right)=\frac{P\left(T^C\cap A\right)}{P\left(A\right)}=\frac{P\left(T^C\right)P\left(A/T^C\right)}{1-0.16}=\frac{0.6\cdot 0.8}{0.84}=\boxed{\frac{4}{7}\simeq 0.5714}$$

Como $P(T/A)=0.4286<0.5714=P(T^C/A)$ es más probable que haya hecho un problema.

iii) Son sucesos independientes y la probabilidad de que pasen los dos es el producto de sus probabilidades.

$$P(los\ dos\ hayan\ aprobado)=P(A/T)\cdot P(A/T^C)=0.9\cdot 0.8=\boxed{0.72}$$

www.yoquieroaprobar.es

**EJERCICIO 6:**
A partir de una muestra de 200 jóvenes entre 18 y 25 años, se observó que 50 no usan transporte público.
i) Calcule un intervalo de confianza para la proporción de jóvenes que usan transporte público, con un nivel de confianza del 96%. Interprete la solución en el contexto del problema. (5 puntos)
ii) Calcule el tamaño muestral para que la amplitud del intervalo se reduzca a la tercera parte, con un nivel de confianza del 98%. (5 puntos).
(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

X = Número de jóvenes que usan el transporte público de un grupo de 200.

La proporción de estudiantes que usan el transporte público es $p=\frac{150}{200}=0.75$

i) Los datos son $p=0.75; \quad n=200$.
Para un nivel de confianza del 96%

$$1-\propto = 0{,}96 \rightarrow \propto = 0{,}04 \rightarrow \propto/2 = 0'02 \rightarrow 1-\propto/2 = 0{,}98 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2{,}055}$$

Calculamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}} = 2.055\cdot\sqrt{\frac{0.75\cdot 0.25}{200}} = 0.063$$

El intervalo de confianza para la proporción de estudiantes que usan el transporte público es:

$$\left(p-Error,\ p+Error\right) = (0.75-0.063,\ 0.75+0.063) = \boxed{(0.687, 0.813)}$$

La proporción de jóvenes que usan el transporte público está comprendido entre el 68.7% y el 81.3 % con un nivel de confianza del 96 %.

ii) La amplitud del intervalo de confianza es el doble de error. Si se reduce a la tercera parte, se reduce en la misma proporción el error, que debe ser 0.063 /3 = 0.021.
Para un nivel de confianza del 98%

$$1-\propto = 0{,}98 \rightarrow \propto = 0{,}02 \rightarrow \propto/2 = 0'01 \rightarrow 1-\propto/2 = 0{,}99 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2{,}33}$$

Determinamos el tamaño de la muestra a partir de la fórmula del error.

$$Error = 0.021 \Rightarrow z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}} = 0.021 \Rightarrow 2.33\cdot\sqrt{\frac{0.75\cdot 0.25}{n}} = 0.021 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{0.75\cdot 0.25}{n}} = \frac{0.021}{2.33} \Rightarrow \frac{0.75\cdot 0.25}{n} = \left(\frac{0.021}{2.33}\right)^2 \Rightarrow 0.75\cdot 0.25 = n\left(\frac{0.021}{2.33}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{0.75\cdot 0.25}{\left(\frac{0.021}{2.33}\right)^2} \simeq 2308.2$$

Como el tamaño de la muestra debe ser entero y superior al obtenido tenemos que el tamaño mínimo de la muestra debe ser de 2309 jóvenes.