



UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA

**Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la
Universidad (EBAU)
Curso 2022 - 2023
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS II**

El examen está distribuido en tres bloques, cada uno con 3 ejercicios.

En total se debe contestar a 4 ejercicios, de dos maneras posibles: o bien se eligen dos bloques y se contesta a 2 de cada uno de ellos, o bien se contesta a 2 de un bloque y a 1 de cada bloque restante.

Para evitar confusiones, se recomienda consignar claramente en la primera página de las hojas de respuestas a qué cuatro ejercicios se responde en el examen.

Todos los ejercicios valen 2.5 puntos, y en la mayoría de ellos dicha puntuación se desglosa con más detalle.

Todas las respuestas deben ser debidamente justificadas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean ni programables ni gráficas, y que no calculen integrales.

El tiempo disponible para resolver a las preguntas es de **una hora y media**.

Bloque 1. Álgebra y Programación lineal.

1.1.- Para que no se desanimen los equipos de menos nivel, los organizadores de un torneo escolar de fútbol adjudican en cada partido un número positivo de puntos a los dos equipos. Lo hacen de forma que:

- 5 empates equivalen a 2 victorias más 2 derrotas;
- 1 victoria equivale a 3 derrotas más 1 punto;
- 1 derrota más 5 puntos equivalen a 1 victoria más 1 empate.

¿Cuántos puntos se adjudican por victoria, empate y derrota?

[2.5 puntos]

1.2.- Una de las dos matrices siguientes tiene matriz inversa. Calcúlala:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{[2 puntos]}$$

¿Cuál es la inversa de dicha matriz inversa? ¿Por qué sabes que la otra matriz no tiene inversa?

[0.5 puntos]

1.3.- Dibuja la región del plano formada por los puntos (x, y) tales que

$$0 \leq y, 0 \leq x,$$

$$x + y \leq 4,$$

$$x + 2y \leq 6, y$$

$$x \leq 3.$$

[1 punto]

Estudia respectivamente en qué puntos de dicha región toman su valor máximo las siguientes funciones:

i) $x + \frac{1}{2}y$

ii) $x + \frac{3}{2}y$

iii) $x + 3y$ **[1.5 puntos]**

Bloque 2. Análisis.

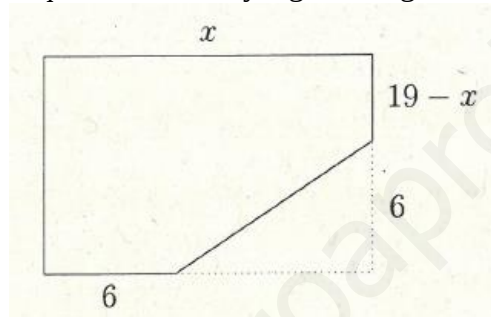
2.1.- La futura compañía Rioja-Rail seguirá una estricta política de compromiso de puntualidad: si el retraso de un tren de cercanías es igual a un tiempo t (en minutos), y el importe pagado por el trayecto es L (en cualquier criptomoneda) se reintegrará en la cuenta de usuario una cantidad dada por

$$r(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 10 \\ at + b & \text{si } 10 < t < 20, \\ L/2 & \text{si } t = 20, \\ ct + d & \text{si } 20 < t < 60, \\ L & \text{si } t \geq 60 \end{cases}$$

Sabiendo que r es una función continua, dibuja su gráfica y averigua los valores de a , b , c y d .

[2.5 puntos]

2.2.- En la figura, x es un valor tal que $6 \leq x \leq 19$, y algunos segmentos miden lo que se indica.



Justifica debidamente que el área $A(x)$ del polígono dibujado (sin contar el triángulo inferior) viene dada por

$$A(x) = 18 + 22x - x^2$$

¿Para qué valor de x dicha área es máxima? ¿Para cuál es mínima? Dibuja la figura cuando x es el valor de área mínima.

[2.5 puntos]

2.3.- La recta $y = 5 - 2x$ delimita un triángulo rectángulo con los ejes de coordenadas, Calcula sus vértices.

[0.5 puntos]

La parábola $y = x^2 + 2x$ divide al triángulo anterior en dos regiones. Dibújalas señalando los puntos de corte, y halla el área de ambas. **[2 puntos]**

Bloque 3. Estadística y Probabilidad.

3.1.- Basándose en encuestas, se considera, para la gente de La Rioja, que los sucesos

A = “le gusta pasar sus vacaciones en la playa”;

B = “le gusta pasar sus vacaciones en la montaña”; y

C = “no le gustan ni la playa ni la montaña para sus vacaciones”

Tienen probabilidades

$$P(A) = 0.75, \quad P(B) = 0.5 \quad \text{y} \quad P(C) = 0.1.$$

Se entiende que “le gusta” y “no le gusta” son en cada caso complementarios: cualquier persona respondería o bien “sí” o bien “no” a las preguntas de si le gustan playa o montaña.

- (i) ¿Cuánto valen $P(A \cup B)$ y $P(A \cap B)$?
- (ii) ¿son A y B sucesos independientes?
- (iii) ¿Cuál es la probabilidad de que a una persona le guste la montaña si sabemos que para ella no sucede C? **[2.5 puntos]**

3.2.- Una variable aleatoria X tiene distribución normal de media 10 y desviación típica 4. Tomaremos una muestra de cierto número n de valores independientes de X, y llamaremos $\bar{X}$ a su valor promedio. El valor n cumple que

$$P(X < 15) = P(\bar{X} < 11).$$

- (i) ¿Cuánto vale dicha probabilidad? **[1 punto]**
- (ii) ¿Qué número es n ? **[1.25 puntos]**
- (iii) ¿Hay algún valor a para el que $P(\bar{X} < a)$ no dependa de n ? **[0.25 puntos]**

3.3.- Nuestra casa está en la ladera de un monte, justo donde comienza el bosque de pinos. Un día medimos el que tenemos más cerca, y resultó tener una altura de 17.26 metros. Le preguntamos a nuestro amigo guardabosque si es un valor representativo, y nos dijo:

“Qué casualidad, hemos calculado un intervalo al 90 % de confianza para la media de la altura, y el extremo superior es de 17.26 m. Hemos supuesto que la altura tiene distribución normal y que la desviación típica es 6.93, la habitual en estas repoblaciones, y hemos medio 100 árboles para calcularlo”.

¿Cuál fue el promedio de la altura de los pinos de la muestra, y qué intervalo de confianza se obtuvo por tanto? **[2.5 puntos]**

Tabla de la distribución normal estándar

z	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0.06	+0.07	+0.08	+0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56360	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91308	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99156
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997
4.0	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99998	0.99998	0.99998	0.99998

SOLUCIONES

Bloque 1. Álgebra y Programación lineal.

1.1.- Para que no se desanimen los equipos de menos nivel, los organizadores de un torneo escolar de fútbol adjudican en cada partido un número positivo de puntos a los dos equipos. Lo hacen de forma que:

- 5 empates equivalen a 2 victorias más 2 derrotas;
- 1 victoria equivale a 3 derrotas más 1 punto;
- 1 derrota más 5 puntos equivalen a 1 victoria más 1 empate.

¿Cuántos puntos se adjudican por victoria, empate y derrota?

[2.5 puntos]

Llamamos “x” a los puntos que se dan por cada victoria, “y” a los puntos que se dan por empate y “z” a los puntos que se dan por derrota.

“5 empates equivalen a 2 victorias más 2 derrotas” $\rightarrow 5y = 2x + 2z$

“1 victoria equivale a 3 derrotas más 1 punto” $\rightarrow x = 3z + 1$

“1 derrota más 5 puntos equivalen a 1 victoria más 1 empate” $\rightarrow z + 5 = x + y$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 5y = 2x + 2z \\ x = 3z + 1 \\ z + 5 = x + y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5y = 2(3z + 1) + 2z \\ z + 5 = 3z + 1 + y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5y = 6z + 2 + 2z \\ 4 = 2z + y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5y = 8z + 2 \\ 4 - 2z = y \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5(4 - 2z) = 8z + 2 \Rightarrow 20 - 10z = 8z + 2 \Rightarrow 18 = 18z \Rightarrow \boxed{z = 1} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 3 \cdot 1 + 1 = 4} \\ \boxed{y = 4 - 2 \cdot 1 = 2} \end{cases}$$

Se deben dar 4 puntos por victoria, 2 por empate y 1 por derrota.

1.2.- Una de las dos matrices siguientes tiene matriz inversa. Calcúlala:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad [2 \text{ puntos}]$$

¿Cuál es la inversa de dicha matriz inversa? ¿Por qué sabes que la otra matriz no tiene inversa?

[0.5 puntos]

Comprobamos si el determinante es nulo o no.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 - 1 - 1 = -2 \neq 0 \rightarrow A \text{ tiene matriz inversa.}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 2 + 0 - 0 - 1 - 1 = 0 \rightarrow B \text{ no tiene matriz inversa.}$$

Calculamos la inversa de la matriz A.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{-2} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

La matriz inversa de A^{-1} es la matriz A.

La matriz B no tiene inversa pues su determinante vale 0.

1.3.- Dibuja la región del plano formada por los puntos (x, y) tales que

$$0 \leq y, 0 \leq x,$$

$$x + y \leq 4,$$

$$x + 2y \leq 6, y$$

$$x \leq 3.$$

[1 punto]

Estudia respectivamente en qué puntos de dicha región toman su valor máximo las siguientes funciones:

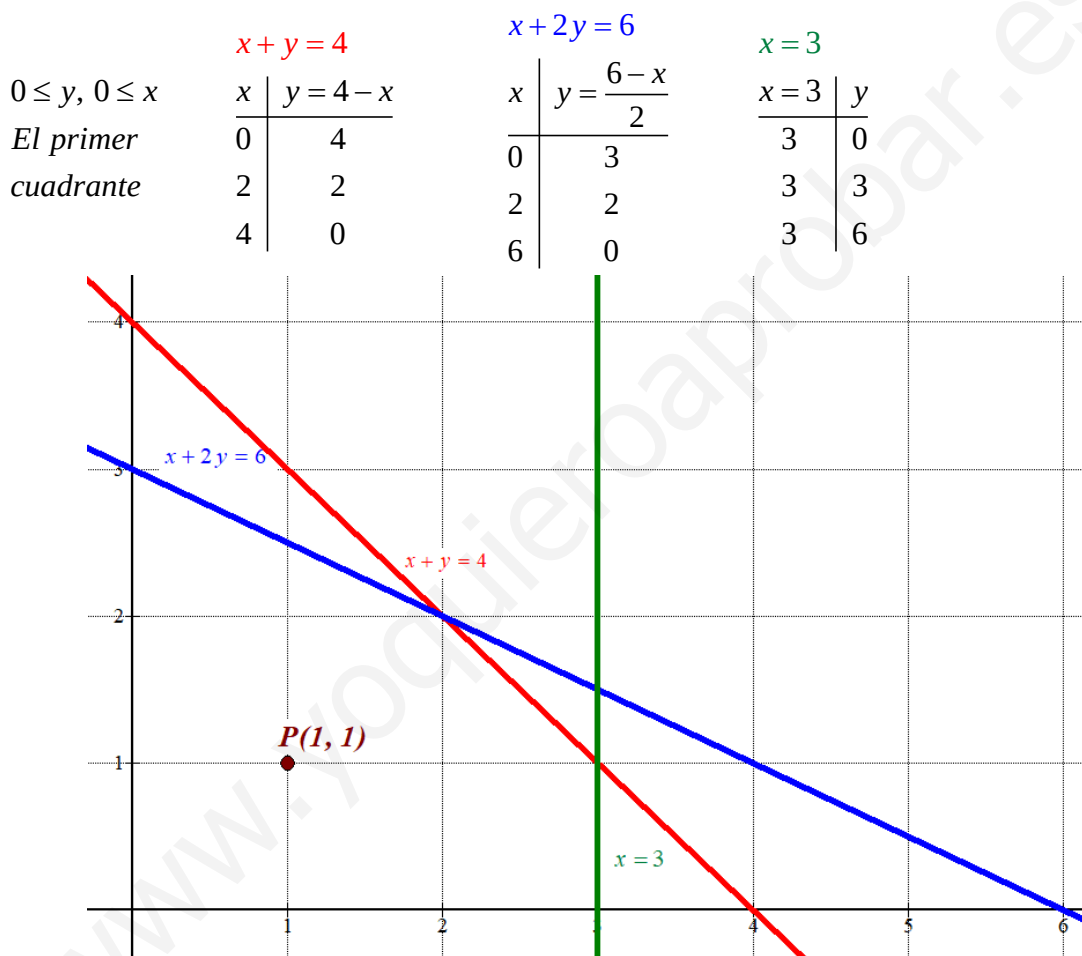
i) $x + \frac{1}{2}y$

ii) $x + \frac{3}{2}y$

iii) $x + 3y$

[1.5 puntos]

Dibujamos las rectas que delimitan la región de puntos que satisfacen las inecuaciones.



Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} 0 \leq y, 0 \leq x, \\ x + y \leq 4, \\ x + 2y \leq 6, y \\ x \leq 3. \end{array} \right\}$ la región es la zona del primer cuadrante situada por

debajo de las rectas roja y azul, y a la izquierda de la recta vertical verde.

Comprobamos que el punto $P(1, 1)$ perteneciente a dicha región cumple las condiciones.

$$0 \leq 1, 0 \leq 1,$$

$$1 + 1 \leq 4,$$

$$1 + 2 \cdot 1 \leq 6, y$$

$$1 \leq 3.$$

¡Se cumplen!

Coloreamos de gris la región.



Para determinar en qué punto de la región se alcanza un valor máximo valoramos cada función en cada uno de los vértices de la región.

i) $f(x, y) = x + \frac{1}{2}y$

$$A(0, 0) \rightarrow f(0, 0) = 0$$

$$B(0, 3) \rightarrow f(0, 3) = 0 + \frac{1}{2}3 = 1.5$$

$$C(2, 2) \rightarrow f(2, 2) = 2 + \frac{1}{2}2 = 3$$

$$D(3, 1) \rightarrow f(3, 1) = 3 + \frac{1}{2}1 = 3.5 \text{ ¡Máximo!}$$

$$E(3, 0) \rightarrow f(3, 0) = 3 + \frac{1}{2}0 = 3$$

El valor máximo de la función $f(x, y) = x + \frac{1}{2}y$ se obtiene en el punto D(3, 1).

ii) $g(x, y) = x + \frac{3}{2}y$

$$A(0, 0) \rightarrow g(0, 0) = 0$$

$$B(0, 3) \rightarrow g(0, 3) = 0 + \frac{3}{2}3 = 4.5$$

$$C(2, 2) \rightarrow g(2, 2) = 2 + \frac{3}{2}2 = 5 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(3, 1) \rightarrow g(3, 1) = 3 + \frac{3}{2}1 = 4.5$$

$$E(3, 0) \rightarrow g(3, 0) = 3 + \frac{3}{2}0 = 3$$

El valor máximo de la función $g(x, y) = x + \frac{3}{2}y$ se obtiene en el punto C(2, 2)

iii) $h(x, y) = x + 3y$

$$A(0, 0) \rightarrow h(0, 0) = 0$$

$$B(0, 3) \rightarrow h(0, 3) = 0 + 3 \cdot 3 = 9 \text{ ¡Máximo!}$$

$$C(2, 2) \rightarrow h(2, 2) = 2 + 3 \cdot 2 = 8$$

$$D(3, 1) \rightarrow h(3, 1) = 3 + 3 \cdot 1 = 6$$

$$E(3, 0) \rightarrow h(3, 0) = 3 + 3 \cdot 0 = 3$$

El valor máximo de la función $h(x, y) = x + 3y$ se obtiene en el punto B(0, 3).

Bloque 2. Análisis.

2.1.- La futura compañía Rioja-Rail seguirá una estricta política de compromiso de puntualidad: si el retraso de un tren de cercanías es igual a un tiempo t (en minutos), y el importe pagado por el trayecto es L (en cualquier criptomoneda) se reintegrará en la cuenta de usuario una cantidad dada por

$$r(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 10 \\ at + b & \text{si } 10 < t < 20, \\ L/2 & \text{si } t = 20, \\ ct + d & \text{si } 20 < t < 60, \\ L & \text{si } t \geq 60 \end{cases}$$

Sabiendo que r es una función continua, dibuja su gráfica y averigua los valores de a , b , c y d .

[2.5 puntos]

Averiguamos los valores de a , b , c y d que hacen continua la función $r(t)$.

La función es continua en $t = 10$.

Corregimos la expresión de la función para que sea posible su continuidad en este valor.

$$r(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 10 \\ at + b & \text{si } 10 < t < 20, \\ L/2 & \text{si } t = 20, \\ ct + d & \text{si } 20 < t < 60, \\ L & \text{si } t \geq 60 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} r(10) &= 0 \\ \lim_{t \rightarrow 10^-} r(t) &= \lim_{t \rightarrow 10^-} 0 = 0 \\ \lim_{t \rightarrow 10^+} r(t) &= \lim_{t \rightarrow 10^+} at + b = 10a + b \\ r(10) &= \lim_{t \rightarrow 10^-} r(t) = \lim_{t \rightarrow 10^+} r(t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 10a + b = 0 \Rightarrow \boxed{b = -10a}$$

La función es continua en $t = 20$.

$$\left. \begin{aligned} r(20) &= L/2 \\ \lim_{t \rightarrow 20^-} r(t) &= \lim_{t \rightarrow 20^-} at - 10a = 10a \\ \lim_{t \rightarrow 20^+} r(t) &= \lim_{t \rightarrow 20^+} ct + d = 20c + d \\ r(20) &= \lim_{t \rightarrow 20^-} r(t) = \lim_{t \rightarrow 20^+} r(t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 10a &= \frac{L}{2} \\ 20c + d &= \frac{L}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} a &= \frac{L}{20} \rightarrow b = -10 \frac{L}{20} = \frac{-L}{2} \\ 20c + d &= \frac{L}{2} \end{aligned} \right\}$$

La función es continua en $t = 60$.

$$\left. \begin{aligned} r(60) &= L \\ \lim_{t \rightarrow 60^-} r(t) &= \lim_{t \rightarrow 60^-} ct + d = 60c + d \\ \lim_{t \rightarrow 60^+} r(t) &= \lim_{t \rightarrow 60^+} L = L \\ r(60) &= \lim_{t \rightarrow 60^-} r(t) = \lim_{t \rightarrow 60^+} r(t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{L = 60c + d}$$

Sabemos que $a = \frac{L}{20}$, $b = \frac{-L}{2}$. Reunimos el resto de ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 60c + d = L \\ 20c + d = \frac{L}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 60c + d = L \\ -20c - d = -\frac{L}{2} \end{array} \right\}$$

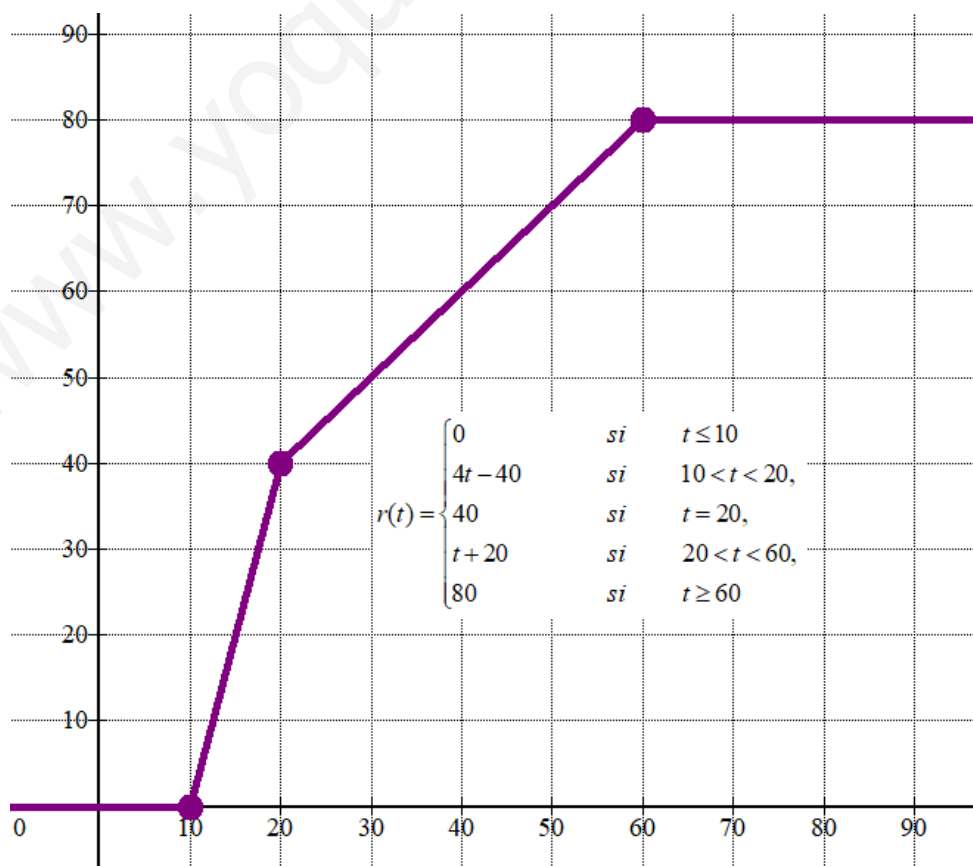
$$\overline{40c = \frac{L}{2}} \Rightarrow \boxed{c = \frac{L}{80}} \Rightarrow 20 \frac{L}{80} + d = \frac{L}{2} \Rightarrow \frac{L}{4} + d = \frac{L}{2} \Rightarrow \boxed{d = \frac{L}{2} - \frac{L}{4} = \frac{L}{4}}$$

Los valores buscados son $a = \frac{L}{20}$, $b = -\frac{L}{2}$, $c = \frac{L}{80}$ y $d = \frac{L}{4}$

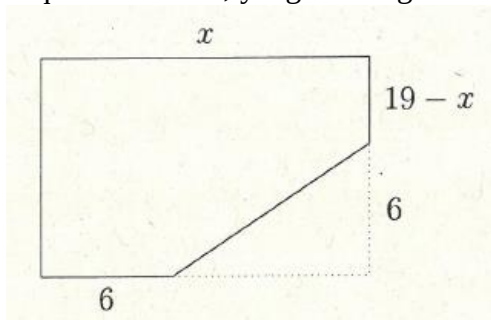
Para estos valores la función queda $r(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 10 \\ \frac{L}{20}t - \frac{L}{2} & \text{si } 10 < t < 20, \\ L/2 & \text{si } t = 20, \\ \frac{L}{80}t + \frac{L}{4} & \text{si } 20 < t < 60, \\ L & \text{si } t \geq 60 \end{cases}$

Para poder dibujar su gráfica fijamos un valor para L, por ejemplo $L = 80$.

La función que vamos a representar queda $r(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 10 \\ 4t - 40 & \text{si } 10 < t < 20, \\ 40 & \text{si } t = 20, \\ t + 20 & \text{si } 20 < t < 60, \\ 80 & \text{si } t \geq 60 \end{cases}$



2.2.- En la figura, x es un valor tal que $6 \leq x \leq 19$, y algunos segmentos miden lo que se indica.

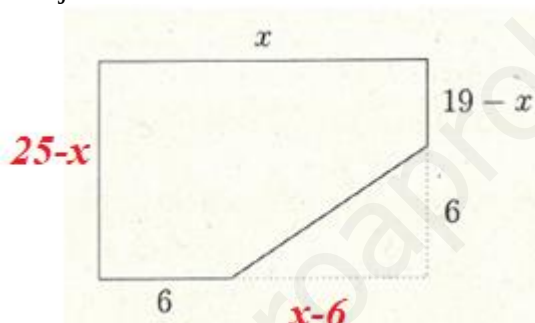


Justifica debidamente que el área $A(x)$ del polígono dibujado (sin contar el triángulo inferior) viene dada por

$$A(x) = 18 + 22x - x^2$$

¿Para qué valor de x dicha área es máxima? ¿Para cuál es mínima? Dibuja la figura cuando x es el valor de área mínima. **[2.5 puntos]**

Completamos los datos del dibujo.



El área del polígono dibujado es el área del rectángulo de lados x y $25 - x$ menos el área del triángulo de la esquina inferior derecha, que tiene de base $x - 6$ y de altura 6.

$$\text{Área polígono} = \text{Área rectángulo} - \text{Área triángulo} =$$

$$= x(25 - x) - \frac{(x - 6)6}{2} = 25x - x^2 - \frac{6x - 36}{2} = 25x - x^2 - 3x + 18 = \boxed{18 + 22x - x^2 = A(x)}$$

Hallamos los puntos críticos de la función.

$$\left. \begin{array}{l} A'(x) = 22 - 2x \\ A'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 22 - 2x = 0 \Rightarrow 2x = 22 \Rightarrow \boxed{x = 11}$$

Sustituimos en la derivada segunda y comprobamos si es máximo o mínimo.

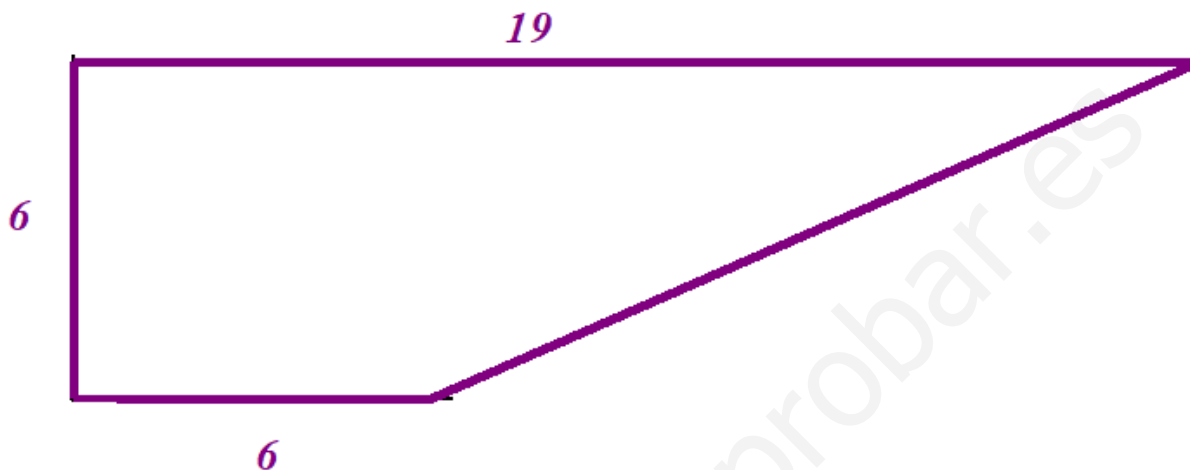
$$A''(x) = -2 \Rightarrow A''(11) = -2 < 0$$

En $x = 11$ hay un máximo relativo del área.

Para decidir el valor máximo y mínimo de la función área valoramos la función en los extremos del intervalo de definición y en el punto crítico: 6, 11 y 19.

$$\left. \begin{aligned} A(6) &= 18 + 22 \cdot 6 - 6^2 = 114 \\ A(11) &= 18 + 22 \cdot 11 - 11^2 = 139 \text{ ¡Máximo!} \\ A(19) &= 18 + 22 \cdot 19 - 19^2 = 75 \text{ ¡Mínimo!} \end{aligned} \right\}$$

La función área toma su valor máximo en $x = 11$ y su valor mínimo en $x = 19$.
Dibujamos la figura para $x = 19$.



2.3.- La recta $y = 5 - 2x$ delimita un triángulo rectángulo con los ejes de coordenadas, Calcula sus vértices. **[0.5 puntos]**

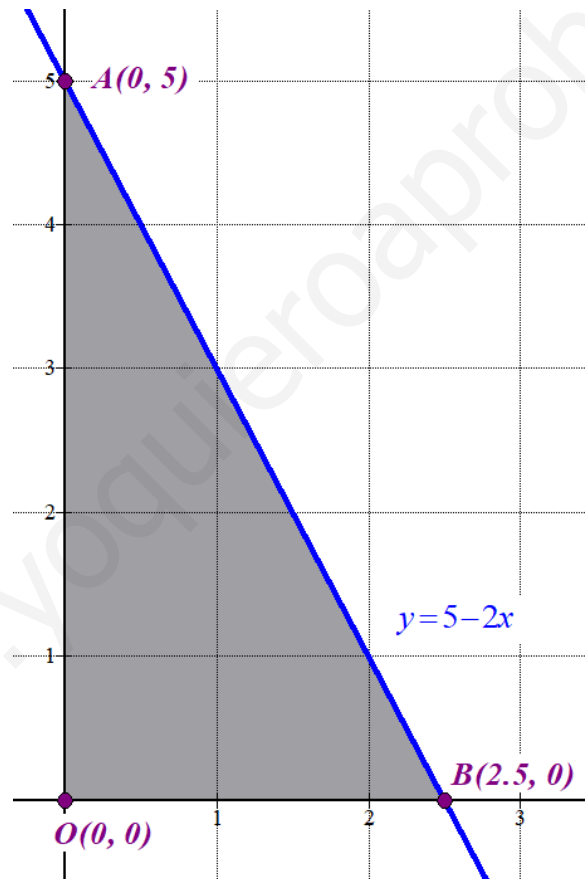
La parábola $y = x^2 + 2x$ divide al triángulo anterior en dos regiones. Dibújalas señalando los puntos de corte, y halla el área de ambas. **[2 puntos]**

Uno de los vértices del triángulo es el origen de coordenadas $O(0, 0)$. Hallamos las coordenadas de los otros dos vértices.

$$\left. \begin{array}{l} y = 5 - 2x \\ x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y = 5 - 0 = 5 \Rightarrow A(0, 5)$$

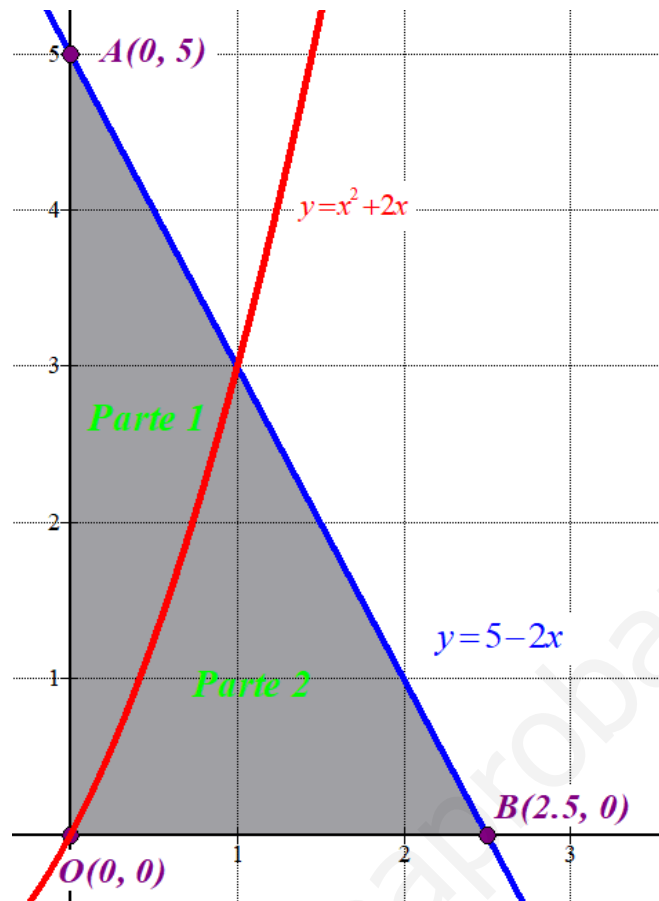
$$\left. \begin{array}{l} y = 5 - 2x \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 5 - 2x \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2} = 2.5 \Rightarrow B(2.5, 0)$$

Lo dibujamos.



Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la parábola.

x	$y = x^2 + 2x$
0	0
1	3
2	8
3	15



La gráfica de la parábola divide el triángulo AOB en dos partes: La parte 1 y la parte 2.
El área de la parte 1 es la integral definida de la diferencia de las dos funciones entre 0 y 1.

$$\text{Área parte 1} = \int_0^1 5 - 2x - (x^2 + 2x) dx = \int_0^1 5 - 2x - x^2 - 2x dx = \int_0^1 -x^2 - 4x + 5 dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 5x \right]_0^1 = \left[-\frac{1^3}{3} - 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 \right] - \left[-\frac{0^3}{3} - 2 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0 \right] = -\frac{1}{3} + 3 = \boxed{\frac{8}{3} u^2}$$

El área del triángulo AOB es $\frac{\text{Base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{2.5 \cdot 5}{2} = \frac{25}{4} u^2$.

El área de la parte 2 es la diferencia entre el área del triángulo y el área de la parte 1.

$$\text{Área parte 2} = \text{Área triángulo AOB} - \text{Área parte 1} = \frac{25}{4} - \frac{8}{3} = \boxed{\frac{43}{12} u^2}$$

Bloque 3. Estadística y Probabilidad.

3.1.- Basándose en encuestas, se considera, para la gente de La Rioja, que los sucesos

A = “le gusta pasar sus vacaciones en la playa”;

B = “le gusta pasar sus vacaciones en la montaña”; y

C = “no le gustan ni la playa ni la montaña para sus vacaciones”

Tienen probabilidades

$$P(A) = 0.75, \quad P(B) = 0.5 \quad \text{y} \quad P(C) = 0.1.$$

Se entiende que “le gusta” y “no le gusta” son en cada caso complementarios: cualquier persona respondería o bien “sí” o bien “no” a las preguntas de si le gustan playa o montaña.

(i) ¿Cuánto valen $P(A \cup B)$ y $P(A \cap B)$?

(ii) ¿son A y B sucesos independientes?

(iii) ¿Cuál es la probabilidad de que a una persona le guste la montaña si sabemos que para ella no sucede C ? **[2.5 puntos]**

(i) El suceso C es $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$.

$$P(C) = 0.1 \Rightarrow P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.1 \Rightarrow P(\overline{A \cup B}) = 0.1 \Rightarrow 1 - P(A \cup B) = 0.1 \Rightarrow \boxed{P(A \cup B) = 0.9}$$

Aplicamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0.9 = 0.75 + 0.5 - P(A \cap B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = 0.75 + 0.5 - 0.9 = 0.35}$$

(ii) Para que A y B sean independientes debe cumplirse $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(A) = 0.75 \\ P(B) = 0.5 \end{array} \right\} \rightarrow P(A)P(B) = 0.75 \cdot 0.5 = 0.375 \quad \left. \begin{array}{l} \Rightarrow P(A \cap B) = 0.350 \neq 0.375 = P(A)P(B) \\ P(A \cap B) = 0.35 \end{array} \right\}$$

Los sucesos A y B no son independientes.

(iii) Nos piden calcular $P(B/\bar{C})$.

Si el suceso C es $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$ entonces el suceso $\bar{C} = A \cup B$.

Así $B \cap \bar{C} = B \cap (A \cup B) = B$.

Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(B/\bar{C}) = \frac{P(B \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} = \frac{P(B)}{1 - P(C)} = \frac{0.5}{1 - 0.1} = \boxed{\frac{5}{9}}$$

3.2.- Una variable aleatoria X tiene distribución normal de media 10 y desviación típica 4. Tomaremos una muestra de cierto número n de valores independientes de X , y llamaremos $\bar{X}$ a su valor promedio. El valor n cumple que

$$P(X < 15) = P(\bar{X} < 11).$$

- (i) ¿Cuánto vale dicha probabilidad? **[1 punto]**
 (ii) ¿Qué número es n ? **[1.25 puntos]**
 (iii) ¿Hay algún valor a para el que $P(\bar{X} < a)$ no dependa de n ? **[0.25 puntos]**

$$X = N(10, 4)$$

La distribución de las medias muestrales es una normal de la misma media (10) y de desviación

$$\text{típica } \frac{4}{\sqrt{n}} \rightarrow \bar{X} = N\left(10, \frac{4}{\sqrt{n}}\right)$$

- (i) Calculamos $P(X < 15)$.

$$P(X < 15) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z < \frac{15-10}{4}\right) = P(Z < 1.25) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.89436$$

z	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0.06
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52391
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56357
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60259
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64059
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83146
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87697
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89436	0.89619
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91308

- (ii) Aplicamos la igualdad $P(\bar{X} < 11) = P(X < 15) = 0.89436$

$$P(\bar{X} < 11) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z < \frac{11-10}{4/\sqrt{n}}\right) = P\left(Z < \frac{\sqrt{n}}{4}\right) = 0.89436 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{4} = 1.25 \Rightarrow \sqrt{n} = 5 \Rightarrow \boxed{n = 25}$$

- (iii) Tenemos que $P(\bar{X} < a) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z < \frac{a-10}{4/\sqrt{n}}\right) = P\left(Z < \frac{(a-10)\sqrt{n}}{4}\right)$

Para que no dependa del valor de n debe ser $a = 10$, así tenemos que:

$$P(\bar{X} < 10) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z < \frac{10-10}{4/\sqrt{n}}\right) = P(Z < 0) = 0.5$$

Y este valor no depende del valor de n .

3.3.- Nuestra casa está en la ladera de un monte, justo donde comienza el bosque de pinos. Un día medimos el que tenemos más cerca, y resultó tener una altura de 17.26 metros. Le preguntamos a nuestro amigo guardabosque si es un valor representativo, y nos dijo:

“Qué casualidad, hemos calculado un intervalo al 90 % de confianza para la media de la altura, y el extremo superior es de 17.26 m. Hemos supuesto que la altura tiene distribución normal y que la desviación típica es 6.93, la habitual en estas repoblaciones, y hemos medio 100 árboles para calcularlo”.

¿Cuál fue el promedio de la altura de los pinos de la muestra, y qué intervalo de confianza se obtuvo por tanto? **[2.5 puntos]**

X = Altura de los árboles de un bosque en metros.

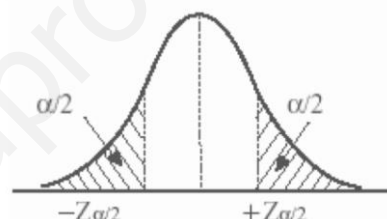
$X = N(\mu, 6.93)$

Tamaño de la muestra = $n = 100$.

Con un nivel de confianza del 90 % tenemos

$$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 0,10 \rightarrow \alpha/2 = 0,05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,95 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1.64 + 1.65}{2} = 1.645$$

z	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0.06
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52391
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56357
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60259
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64059
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71227
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83146
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87697
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89616
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91308
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062
1.6	0.94520	0.94628	0.94734	0.94838	0.94950	0.95053	0.95154
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96079



Calculamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{6.93}{\sqrt{100}} \approx 1.14$$

El error es de 1.14 metros.

El intervalo de confianza es $(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error)$ y cómo nos dicen que el extremo superior es 17.26 tenemos que $\bar{x} + Error = 17.26 \Rightarrow \bar{x} + 1.14 = 17.26 \Rightarrow \bar{x} = 16.12 \text{ metros}$

Con este dato tenemos que el intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (16.12 - 1.14, 17.26) = (14.98, 17.26)$$