UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad (EBAU)

Curso 2022 - 2023

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS II

El examen está distribuido en tres bloques, cada uno con 3 ejercicios.
En total se debe contestar a 4 ejercicios, de dos maneras posibles: o bien se eligen dos bloques y se contesta a 2 de cada uno de ellos, o bien se contesta a 2 de un bloque y a 1 de cada bloque restante.
Para evitar confusiones, se recomienda consignar claramente en la primera página de las hojas de respuestas a qué cuatro ejercicios se responde en el examen.
Todos los ejercicios valen 2.5 puntos, y en la mayoría de ellos dicha puntuación se desglosa con más detalle.
Todas las respuestas deben ser debidamente justificadas.
Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean ni programables ni gráficas, y que no calculen integrales.
El tiempo disponible para resolver a las preguntas es de **una hora y media**.

Bloque 1. Álgebra y Programación lineal.

1.1.- Una pequeña empresa ha comprado, para regalar a sus clientes, cien botellas de vino tinto de tres clases y a tres precios distintos: las de vino joven cuestan 4 €, las de crianza 8 € y las de reserva 12 €. Se ha gastado lo mismo en reserva que en las otras dos clases juntas. Además, si hubiera cambiado las botellas de reserva, por botellas de crianza y viceversa se habría gastado en total 20 € más.
(i) ¿Cuántas botellas ha comprado de cada clase? **[2 puntos]**
(ii) ¿Cuánto ha gastado en total? **[0.5 puntos]**

1.2.- Sean

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -6 & -2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}\ y\ C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

Determina cuáles de las siguientes matrices tienen inversa, y si es el caso calcúlela:
(i) A (ii) B (iii) C (iv) ABC (v) BC
[2.5 puntos]

1.3.- Necesitamos obtener al menos 80 gramos de cobre, 60 de zinc y 60 de níquel, y sabemos hacerlo mediante dos técnicas distintas a partir de objetos desechados fabricados con alpaca. Usaremos la primera técnica durante un tiempo x, y después usaremos la segunda durante un tiempo y
Con la primera técnica podemos conseguir, en cada hora, 8 g de cobre, 3 g de zinc y 1 g de níquel. Con la segunda técnica obtenemos en una hora 4 g de cobre, 6 g de zinc y 12 g de níquel.
¿Cuánto deben valer x e y para conseguir el objetivo en el menor tiempo posible?
[2.5 puntos]

Bloque 2. Análisis.

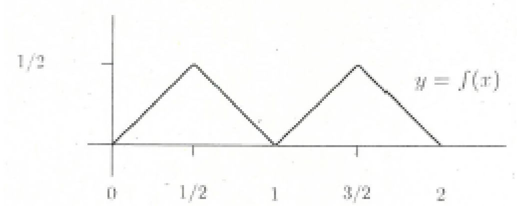
2.1.- Definimos la función

$$f(x)=\frac{x^2+x}{x^2+x-2}$$

en todos los valores reales x en los que la expresión tiene sentido. ¿Cuál es entonces su dominio? **[0.25 puntos]**

¿Qué asíntotas horizontales y verticales observaremos en la gráfica $y = f(x)$? Indica los límites de *f* relevantes en cada una. **[0.75 puntos]**
Dibuja dicha gráfica, señalando en la misma las asíntotas, los cortes con los ejes y también los extremos relativos de *f*, que debes calcular previamente. **[1.5 puntos]**

2.2.- Una función *f*, definida en el intervalo [0, 2], tiene la gráfica siguiente:



(i) Expresa por intervalos el valor de *f(x)*. **[1.75 puntos]**
(ii) Calcula los valores *x* tales que $f(x) = 1/3$. **[0.75 puntos]**

2.3.- Sea $f(x) = x^3 - 3x + 2$.
(i) Encuentra sus extremos relativos, y evalúa *f* en dichos puntos. **[1 punto]**
(ii) Halla el área de la región limitada por $y = f(x), y = 0, x = 1, x = -2$, y haz un dibujo de dicha región. **[1.5 puntos]**

Bloque 3. Estadística y Probabilidad.

3.1.- Un bombo de lotería tiene diez bolas, numeradas del 0 al 9. Realizamos dos extracciones consecutivas, sin reemplazar la primera bola. Sean los sucesos:

A = "la primera bola es 0"

B = "la primera bola es 5"

C = "la segunda bola es mayor que la primera"

Calcula entonces las probabilidades siguientes:

(i) P(A) (ii) P(B) (iii) P(C) (iv) P(A/C) (v) P(B/C)

[2.5 puntos]

3.2.- La variable X mide la estatura de los (y las) policías de Francia. Sigue una distribución normal con desviación típica de 6.5 (en cm), de forma que el 11.507 % de policías de Francia mide más de 183 cm.

(i) Calcula la media de la variable X. **[1.75 puntos]**

(ii) Averigua la estatura que es superada por el 88.493 % de policías en Francia. **[0.75 puntos]**

3.3.- Llamamos X a la longitud de la cola de un ejemplar adulto de lémur barbado, especie recientemente descrita. Sigue una distribución normal cuya desviación típica tiene un valor asumido de 4.2 cm (por los estudios realizados en variedades similares), y para estimar su media μ se ha tomado una muestra independiente de 20 lémures. La media muestral resulta ser $\overline{X} = 38.6cm$.

(i) Calcula un intervalo en el que situaríamos a μ con el 95 % de confianza. **[1.25 puntos]**

(ii) Si juzgamos excesivo el error muestral y queremos repetir la estimación con una muestra más numerosa, lo justo para que dicho error sea menor que 1 cm, ¿cuál debería ser el tamaño de dicha muestra? **[1.25 puntos]**

Tabla de la distribución normal estándar:

z	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0.06	+0.07	+0.08	+0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56360	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91308	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997
4.0	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99998	0.99998	0.99998	0.99998

SOLUCIONES

Bloque 1. Álgebra y Programación lineal.

1.1.- Una pequeña empresa ha comprado, para regalar a sus clientes, cien botellas de vino tinto de tres clases y a tres precios distintos: las de vino joven cuestan 4 €, las de crianza 8 € y las de reserva 12 €. Se ha gastado lo mismo en reserva que en las otras dos clases juntas. Además, si hubiera cambiado las botellas de reserva, por botellas de crianza y viceversa se habría gastado en total 20 € más.
(i) ¿Cuántas botellas ha comprado de cada clase? **[2 puntos]**
(ii) ¿Cuánto ha gastado en total? **[0.5 puntos]**

Llamamos "x" al número de botellas de vino joven, "y" al número de botellas de crianza y "z" al número de botellas de reserva.

"Ha comprado cien botellas de vino tinto de tres clases y a tres precios distintos" → $x+y+z=100$

"Se ha gastado lo mismo en reserva que en las otras dos clases juntas" → $12z=4x+8y$
"si hubiera cambiado las botellas de reserva, por botellas de crianza y viceversa se habría gastado en total 20 € más" → $4x+8z+12y=20+4x+8y+12z \Rightarrow 4y-4z=20 \Rightarrow y-z=5$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=100 \\ 12z=4x+8y \\ y-z=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=100 \\ 3z=x+2y \\ y=5+z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+5+z+z=100 \\ 3z=x+2(5+z) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2z=95 \\ 3z=x+10+2z \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2z=95 \\ z=x+10 \end{array}\right\} \Rightarrow x+2(x+10)=95 \Rightarrow x+2x+20=95 \Rightarrow 3x=75 \Rightarrow \boxed{x=\frac{75}{3}=25} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z=25+10=35} \Rightarrow \boxed{y=5+35=40}$$

(i) Ha comprado 25 botellas de vino joven, 40 de vino de crianza y 35 de vino reserva.

(ii) Ha gastado 25 · 4 = 100 € en el vino joven, 40 · 8 = 320 € en el de crianza y 35 · 12 = 420 € en el de reserva. En total 100 + 320 + 420 = 840 €.

1.2.- Sean

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -6 & -2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}\ y\ C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

Determina cuáles de las siguientes matrices tienen inversa, y si es el caso calcúlela:

(i) A (ii) B (iii) C (iv) ABC (v) BC **[2.5 puntos]**

(i) Comprobamos si el determinante es nulo o no.

$$|A|=\begin{vmatrix}3 & 1\\ -6 & -2\end{vmatrix}=-6+6=0$$

Al ser el determinante nulo no existe la inversa de la matriz A.

(ii) Comprobamos si el determinante es nulo o no. De no serlo existe la inversa y la calculamos.

$$|B|=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{vmatrix}=6-0=6\neq 0$$

$$B^{-1}=\frac{Adj\left(B^T\right)}{|B|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}}{6}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2 & -1/6\\ 0 & 1/3\end{pmatrix}$$

El determinante es no nulo, la inversa existe y es $B^{-1}=\begin{pmatrix}1/2 & -1/6\\ 0 & 1/3\end{pmatrix}$.

(iii) Comprobamos si el determinante es nulo o no. De no serlo existe la inversa y la calculamos.

$$|C|=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1+1=2\neq 0$$

$$C^{-1}=\frac{Adj\left(C^T\right)}{|C|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}}{2}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ -1/2 & 1/2\end{pmatrix}$$

El determinante es no nulo, existe la inversa y es $C^{-1}=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ -1/2 & 1/2\end{pmatrix}$.

(iv) Determinamos la expresión de la matriz *ABC*.

$$ABC=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -6 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 3+3\\ -12 & -6-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}6 & 6\\ -12 & -12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6+6 & -6+6\\ -12-12 & 12-12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & 0\\ -24 & 0\end{pmatrix}$$

Comprobamos si el determinante es nulo o no.

$$|ABC| = \begin{vmatrix} 12 & 0 \\ -24 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

No existe la inversa de la matriz *ABC*.

(v) Determinamos la expresión de la matriz *BC*.

$$BC = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & -2+1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Comprobamos si el determinante es nulo o no. De no serlo existe la inversa y la calculamos.

$$|BC| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 9+3 = 12 \neq 0$$

$$(BC)^{-1} = \frac{Adj\left(BC\right)^T}{|BC|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}{12} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/12 \\ -1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

El determinante es no nulo y la inversa es $(BC)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/12 \\ -1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$.

1.3.- Necesitamos obtener al menos 80 gramos de cobre, 60 de zinc y 60 de níquel, y sabemos hacerlo mediante dos técnicas distintas a partir de objetos desechados fabricados con alpaca. Usaremos la primera técnica durante un tiempo x, y después usaremos la segunda durante un tiempo y
Con la primera técnica podemos conseguir, en cada hora, 8 g de cobre, 3 g de zinc y 1 g de níquel. Con la segunda técnica obtenemos en una hora 4 g de cobre, 6 g de zinc y 12 g de níquel.
¿Cuánto deben valer x e y para conseguir el objetivo en el menor tiempo posible? **[2.5 puntos]**

Llamamos "x" al número de horas con la primera técnica e "y" al número de horas con la segunda técnica.

Hacemos una tabla para establecer las condiciones del problema.

	g de cobre	g de zinc	g de níquel	Tiempo
Nº horas 1ª técnica (x)	8x	3x	x	x
Nº horas 2ª técnica (y)	4y	6y	12y	y
TOTAL	$8x+4y$	$3x+6y$	$x+12y$	$x+y$

La función objetivo es el tiempo total $f(x,y)=x+y$. Nuestro objetivo es minimizarlo.

Expresamos las restricciones del problema en inecuaciones:

Las cantidades deben ser positivas → $x \geq 0;\ y \geq 0$

Necesitamos obtener al menos 80 gramos de cobre, 60 de zinc y 60 de níquel → $8x+4y \geq 80;\ 3x+6y \geq 60;\ x+12y \geq 60$

Agrupamos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ 8x+4y \geq 80 \\ 3x+6y \geq 60 \\ x+12y \geq 60 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ 2x+y \geq 20 \\ x+2y \geq 20 \\ x+12y \geq 60 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región de puntos que satisfacen las inecuaciones.

$x \geq 0;\ y \geq 0$ *El primer cuadrante*

$2x+y=20$

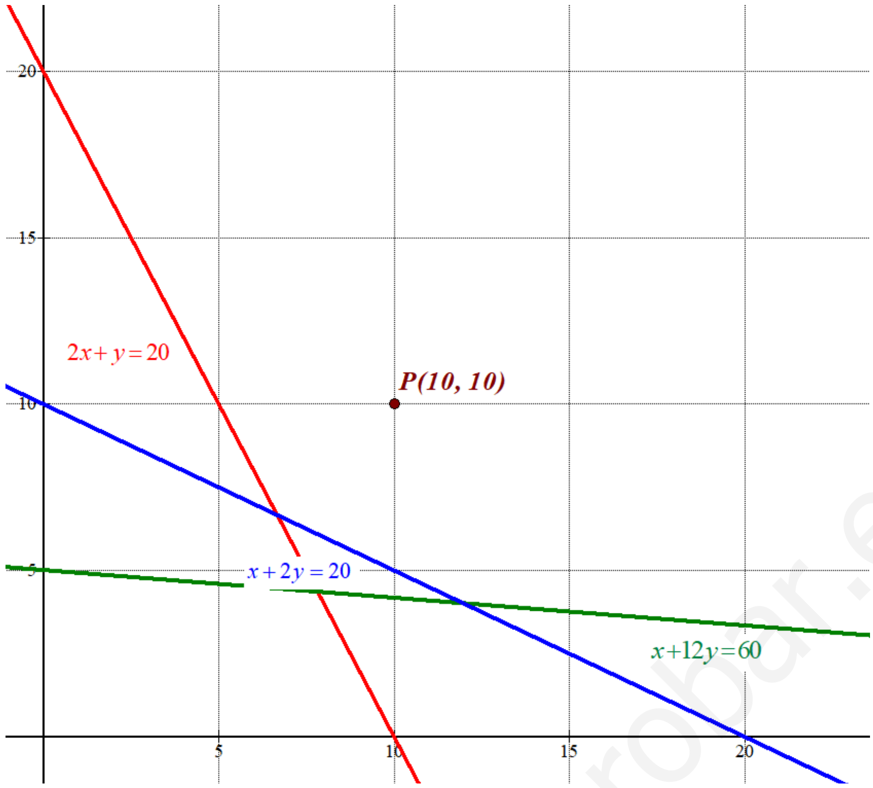
x	$y=20-2x$
0	20
5	10
10	0

$x+2y=20$

x	$y=\frac{20-x}{2}$
0	10
10	5
20	0

$x+12y=60$

x	$y=\frac{60-x}{12}$
0	5
12	4
36	2

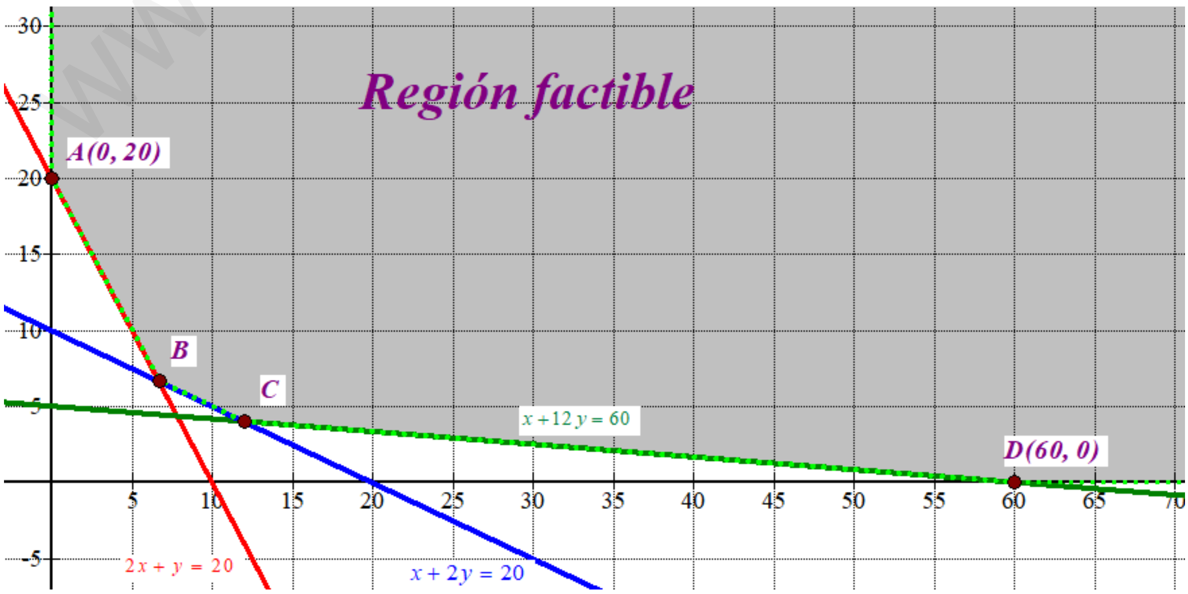


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ 2x+y \geq 20 \\ x+2y \geq 20 \\ x+12y \geq 60 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por encima de las tres rectas: roja, verde y azul.

Comprobamos que el punto P(10, 10) perteneciente a dicha región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 10 \geq 0;\ 10 \geq 0 \\ 20+10 \geq 20 \\ 10+20 \geq 20 \\ 10+120 \geq 60 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen!}$$

Coloreamos de gris la región factible.



Hallamos las coordenadas de los puntos B y C.

$$B \to \left.\begin{array}{l} 2x+y=20 \\ x+2y=20 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+y=20 \\ x=20-2y \end{array}\right\} \Rightarrow 2(20-2y)+y=20 \Rightarrow 40-4y+y=20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3y=-20 \Rightarrow \boxed{y=\frac{20}{3}} \Rightarrow \boxed{x=20-2\frac{20}{3}=\frac{20}{3}} \Rightarrow \boxed{B\left(\frac{20}{3},\frac{20}{3}\right)}$$

$$C \to \left.\begin{array}{l} x+12y=60 \\ x+2y=20 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+12y=60 \\ x=20-2y \end{array}\right\} \Rightarrow 20-2y+12y=60 \Rightarrow 10y=40 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y=\frac{40}{10}=4} \Rightarrow \boxed{x=20-2\cdot 4=12} \Rightarrow \boxed{C(12,4)}$$

Valoramos la función objetivo $f(x,y)=x+y$ en cada uno de los vértices de la región.

A(0, 20) → $f(0,20)=0+20=20$

$B\left(\frac{20}{3},\frac{20}{3}\right)$ → $f\left(\frac{20}{3},\frac{20}{3}\right)=\frac{20}{3}+\frac{20}{3}=\frac{40}{3}\simeq 13.33$ ¡*Mínimo*!

C(12, 4) → $f(12,4)=12+4=16$

D(60, 0) → $f(60,0)=60+0=60$

El tiempo mínimo se obtiene en el punto $B\left(\frac{20}{3},\frac{20}{3}\right)$.

El objetivo de minimizar el tiempo necesario para realizar lo pedido en el ejercicio se logra dedicando 20/3 a la primera técnica y lo mismo a la segunda. El tiempo total es de 40/3. Si son horas dedicaríamos 6 horas y 40 minutos a cada técnica.

Bloque 2. Análisis.

2.1.- Definimos la función

$$f(x)=\frac{x^2+x}{x^2+x-2}$$

en todos los valores reales *x* en los que la expresión tiene sentido. ¿Cuál es entonces su dominio? **[0.25 puntos]**
¿Qué asíntotas horizontales y verticales observaremos en la gráfica $y=f\left(x\right)$? Indica los límites de *f* relevantes en cada una. **[0.75 puntos]**
Dibuja dicha gráfica, señalando en la misma las asíntotas, los cortes con los ejes y también los extremos relativos de *f*, que debes calcular previamente. **[1.5 puntos]**

Dominio.

El dominio son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$x^2+x-2=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(1)(-2)}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}=\begin{cases}\frac{-1+3}{2}=1=x\\ \frac{-1-3}{2}=-2=x\end{cases}$$

El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{-2,1\}$.

Asíntotas.

Asíntotas verticales. $x=a$

¿x = -2 es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{x^2+x}{x^2+x-2}=\frac{(-2)^2-2}{(-2)^2-2-2}=\frac{2}{0}=\infty$$

x = -2 es asíntota vertical.

¿x = 1 es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x}{x^2+x-2}=\frac{1^2+1}{1^2+1-2}=\frac{2}{0}=\infty$$

x = 1 es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{x^2+x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{1+0}{1+0-0}=1$$

$y=1$ es asíntota horizontal.

Puntos de corte con los ejes.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{x^2+x}{x^2+x-2} \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)=\frac{0^2+0}{0^2+0-2}=\frac{0}{-2}=0 \Rightarrow A(0,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{x^2+x}{x^2+x-2} \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2+x}{x^2+x-2}=0 \Rightarrow x^2+x=0 \Rightarrow x(x+1)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \to A(0,0) \\ x+1=0 \to x=-1 \to B(-1,0) \end{cases}$$

Extremos relativos.

$$f\,'(x)=\frac{(2x+1)(x^2+x-2)-(2x+1)(x^2+x)}{(x^2+x-2)^2}=\frac{(2x+1)\left(x^2+x-2-(x^2+x)\right)}{(x^2+x-2)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} f\,'(x)=\dfrac{(2x+1)(-2)}{(x^2+x-2)^2}=\dfrac{-4x-2}{(x^2+x-2)^2} \\ f\,'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-4x-2}{(x^2+x-2)^2}=0 \Rightarrow -4x-2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4x=2 \Rightarrow x=\frac{2}{-4}=\frac{-1}{2}$$

Estudiamos el comportamiento del signo de la derivada antes y después de este valor.

En el intervalo $(-\infty,-2)$ tomamos *x* = *–3* y la derivada vale $f\,'(-3)=\dfrac{-4(-3)-2}{\left((-3)^2-3-2\right)^2}=\dfrac{10}{9}>0$. La función crece en $(-\infty,-2)$.

En el intervalo $\left(-2,-\dfrac{1}{2}\right)$ tomamos *x* = *–1* y la derivada vale $f\,'(-1)=\dfrac{-4(-1)-2}{\left((-1)^2-1-2\right)^2}=\dfrac{2}{4}>0$.

La función crece en $\left(-2,-\dfrac{1}{2}\right)$

En el intervalo $\left(-\dfrac{1}{2},1\right)$ tomamos *x* = *0* y la derivada vale $f\,'(0)=\dfrac{-0-2}{(0^2+0-2)^2}=\dfrac{-2}{4}<0$. La función decrece en $\left(-\dfrac{1}{2},1\right)$

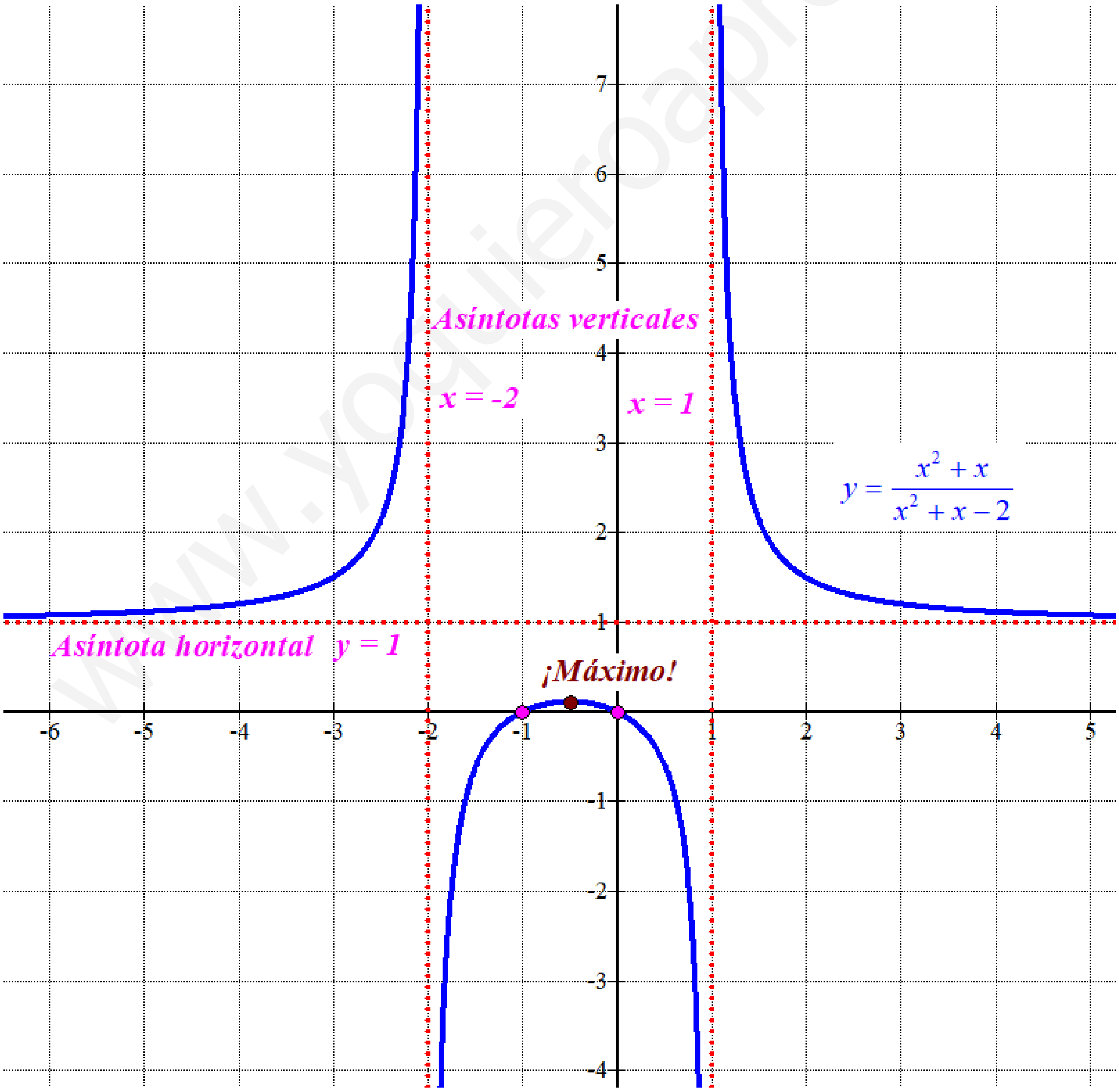
En el intervalo $(1,+\infty)$ tomamos $x=2$ y la derivada vale $f'(2)=\dfrac{-4(2)-2}{\left(2^2+2-2\right)^2}=\dfrac{-10}{16}<0$. La función decrece en $(1,+\infty)$.

La función crece en $(-\infty,-2)\cup\left(-2,-\dfrac{1}{2}\right)$ y decrece en $\left(-\dfrac{1}{2},1\right)\cup(1,+\infty)$.

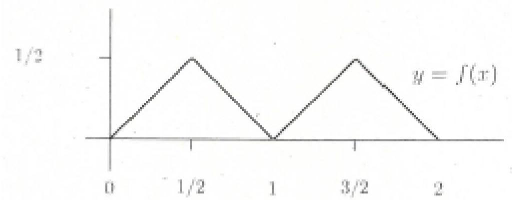
La función presenta un máximo relativo en $x=\dfrac{-1}{2}$.

Hacemos una tabla de valores y representamos su gráfica.

x	$y=\dfrac{x^2+x}{x^2+x-2}$
-3	1.5
-1	0
-0.5	0.11
0	0
2	1.5



2.2.- Una función *f*, definida en el intervalo [0, 2], tiene la gráfica siguiente:



(i) Expresa por intervalos el valor de *f(x)*. **[1.75 puntos]**

(ii) Calcula los valores *x* tales que $f(x)=1/3$. **[0.75 puntos]**

(i) La gráfica entre *x = 0* y *x = 1/2* es una recta que pasa por los puntos (0, 0) y (1/2, 1/2). Este segmento tiene por ecuación $y=x$.

La gráfica entre *x = 1/2* y *x = 1* es una recta que pasa por los puntos (1/2, 1/2) y (1,0). Este segmento tiene por ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} m=\dfrac{0-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=-1 \\ Pasa\ por\ (1,0) \end{array}\right\} \Rightarrow y-0=-1(x-1) \Rightarrow y=-x+1.$$

La gráfica entre *x = 1* y *x = 3/2* es una recta que pasa por los puntos (1,0) y (3/2, 1/2). Este segmento tiene por ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} m=\dfrac{\frac{1}{2}-0}{\frac{3}{2}-1}=1 \\ Pasa\ por\ (1,0) \end{array}\right\} \Rightarrow y-0=1(x-1) \Rightarrow y=x-1.$$

La gráfica entre *x = 3/2* y *x = 2* es una recta que pasa por los puntos (3/2, 1/2) y (2, 0). Este segmento tiene por ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} m=\dfrac{0-\frac{1}{2}}{2-\frac{3}{2}}=-1 \\ Pasa\ por\ (2,0) \end{array}\right\} \Rightarrow y-0=-1(x-2) \Rightarrow y=-x+2.$$

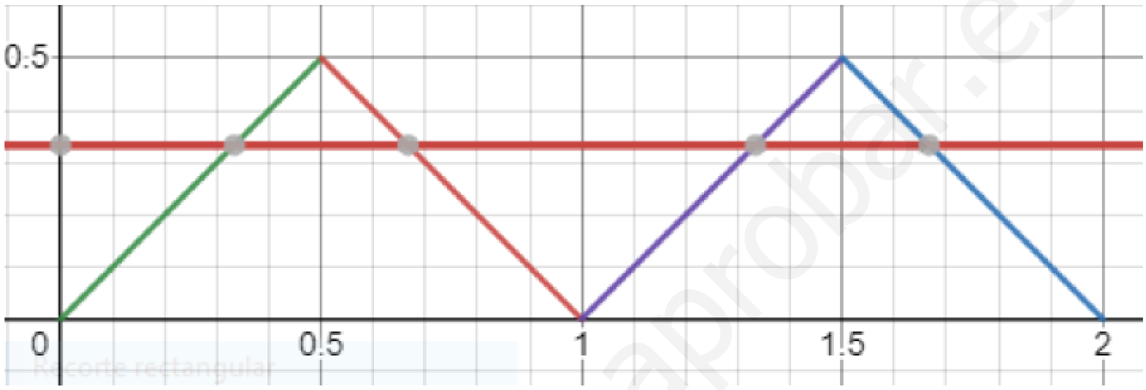
Reunimos las cuatro rectas en una función en el intervalo [0, 2].

$$f(x)=\begin{cases} x & si \quad 0\le x\le 1/2 \\ -x+1 & si \quad 1/2<x\le 1 \\ x-1 & si \quad 1<x\le 3/2 \\ -x+2 & si \quad 3/2<x\le 2 \end{cases}$$

(ii) Se pueden averiguar a través de la gráfica, pero serían valores inexactos. Si sabemos que hay cuatro valores posibles. Los determinamos usando la definición de la función.

$$f(x)=1/3 \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{3} & si \quad 0 \le x \le 1/2 \\ -x+1=\dfrac{1}{3} \to x=\dfrac{2}{3} & si \quad 1/2 < x \le 1 \\ x-1=\dfrac{1}{3} \to x=\dfrac{4}{3} & si \quad 1 < x \le 3/2 \\ -x+2=\dfrac{1}{3} \to x=\dfrac{5}{3} & si \quad 3/2 < x \le 2 \end{cases}$$

Los valores de x tales que $f(x)=1/3$ son $x=\frac{1}{3};\ x=\frac{2}{3};\ x=\frac{4}{3};\ x=\frac{5}{3}$.



2.3.- Sea $f(x)=x^3-3x+2$.

(i) Encuentra sus extremos relativos, y evalúa *f* en dichos puntos. **[1 punto]**

(ii) Halla el área de la región limitada por $y=f(x), y=0, x=1, x=-2$, y haz un dibujo de dicha región. **[1.5 puntos]**

(i) Utilizamos la función derivada.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3x^2-3 \\ f'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x^2-3=0 \Rightarrow 3x^2=3 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\sqrt{1}=\pm 1$$

Sustituimos estos valores en la segunda derivada para ver si son máximos o mínimos relativos (dependiendo del signo obtenido).

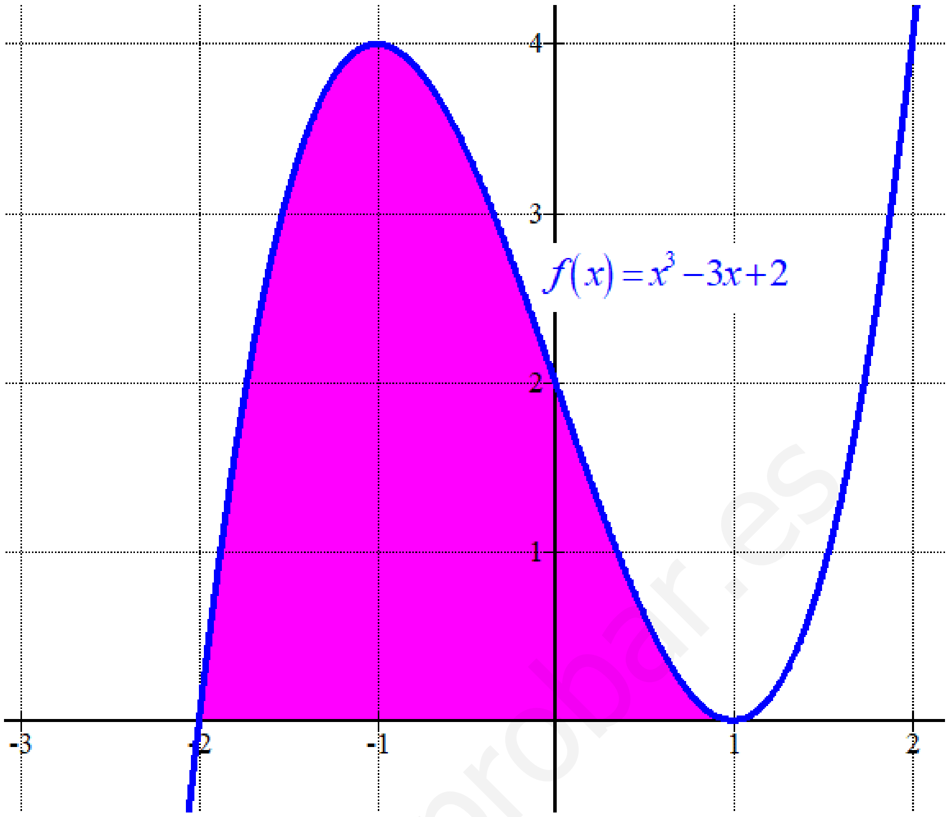
$$f''(x)=6x \Rightarrow \begin{cases} f''(-1)=-6<0 \rightarrow x=-1 \text{ es máximo} \\ f''(1)=6>0 \rightarrow x=-1 \text{ es mínimo} \end{cases}$$

$f(-1)=(-1)^3-3(-1)+2=4$. La función tiene un máximo relativo en el punto A(–1, 4).

$f(1)=1^3-3+2=0$. La función tiene un mínimo relativo en el punto B(1, 0).

(ii) Obtenemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función entre –2 y 1.

x	$y=x^3-3x+2$
–2	0
–1	4
0	2
1	0



Por el dibujo podemos adelantar que el área tendrá un valor entre 6 y 7 unidades cuadradas (contando cuadraditos). Calculamos el área de la región como la integral definida entre –2 y 1 de la función.

$$\int_{-2}^{1} f(x)\,dx = \int_{-2}^{1} x^3 - 3x + 2dx = \left[\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} =$$

$$= \left[\frac{1^4}{4} - 3\frac{1^2}{2} + 2(1)\right] - \left[\frac{(-2)^4}{4} - 3\frac{(-2)^2}{2} + 2(-2)\right] =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 - 4 + 6 + 4 = \frac{27}{4} = \boxed{6.75\ u^2}$$

Bloque 3. Estadística y Probabilidad.

3.1.- Un bombo de lotería tiene diez bolas, numeradas del 0 al 9. Realizamos dos extracciones consecutivas, sin reemplazar la primera bola. Sean los sucesos:

A = "la primera bola es 0"

B = "la primera bola es 5"

C = "la segunda bola es mayor que la primera"

Calcula entonces las probabilidades siguientes:

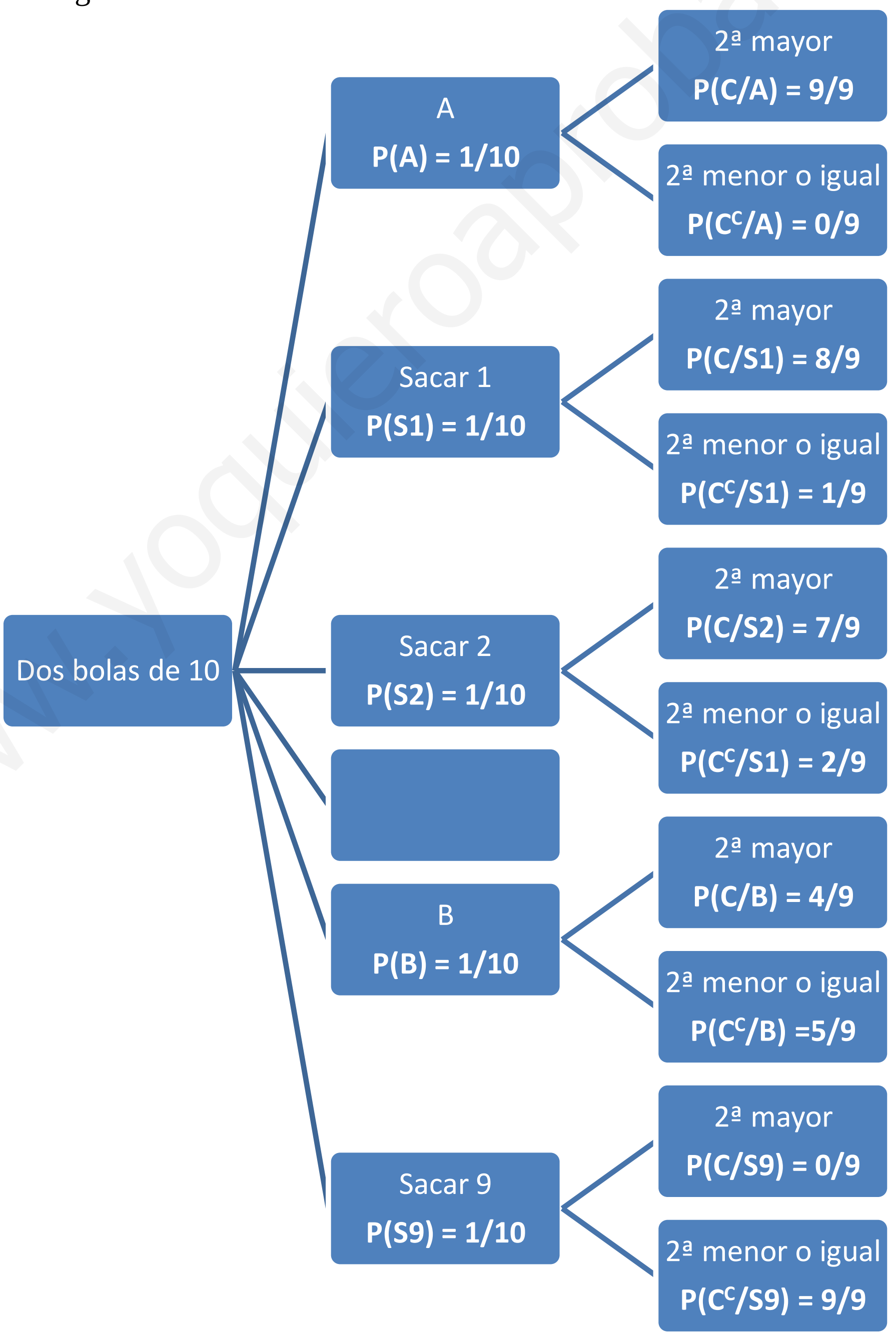
(i) P(A) (ii) P(B) (iii) P(C) (iv) P(A/C) (v) P(B/C) **[2.5 puntos]**

Llamamos S1, S2, S3,S4, S6, S7, S8, S9 a sacar bola 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 o 9 en primera extracción.

(i) Aplicamos la regla de Laplace → $P(A)=\frac{1}{10}$

(ii) Aplicamos la regla de Laplace → $P(B)=\frac{1}{10}$

(iii) Hacemos un diagrama de árbol.



$$P(C)=\frac{1}{10}\cdot\frac{9}{9}+\frac{1}{10}\cdot\frac{8}{9}+\frac{1}{10}\cdot\frac{7}{9}+\frac{1}{10}\cdot\frac{6}{9}+\frac{1}{10}\cdot\frac{5}{9}+\frac{1}{10}\cdot\frac{4}{9}+\frac{1}{10}\cdot\frac{3}{9}+\frac{1}{10}\cdot\frac{2}{9}+\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\cdot\frac{0}{9}=$$

$$=\frac{1}{90}(9+8+7+6+5+4+3+2+1+0)=\frac{45}{90}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

(iv)

$$P(A/C)=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}=\frac{\frac{1}{10}\cdot\frac{9}{9}}{\frac{1}{2}}=\boxed{\frac{1}{5}=0.2}$$

(v)

$$P(B/C)=\frac{P(B\cap C)}{P(C)}=\frac{\frac{1}{10}\cdot\frac{4}{9}}{\frac{1}{2}}=\boxed{\frac{4}{45}\simeq 0.0889}$$

3.2.- La variable X mide la estatura de los (y las) policías de Francia. Sigue una distribución normal con desviación típica de 6.5 (en cm), de forma que el 11.507 % de policías de Francia mide más de 183 cm.

(i) Calcula la media de la variable X. **[1.75 puntos]**

(ii) Averigua la estatura que es superada por el 88.493 % de policías en Francia. **[0.75 puntos]**

X = N(**μ**, 6.5)

(i) Como nos dicen que $P(X \geq 183) = 0.11507$. Despejamos y hallamos el valor de la media **μ.**

$$P(X \geq 183) = 0.11507 \Rightarrow \{Tipificamos\} \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{183-\mu}{6.5}\right) = 0.11507 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - P\left(Z \leq \frac{183-\mu}{6.5}\right) = 0.11507 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{183-\mu}{6.5}\right) = 0.88493 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Buscamos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{183-\mu}{6.5} = 1.2 \Rightarrow 183 - \mu = 1.2 \cdot 6.5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu = 183 - 1.2 \cdot 6.5 = 175.2$$

La media de las estaturas es de 175.2 cm.

(ii) Averiguamos el valor de "a" tal que $P(X \geq a) = 0.88493$.

$$P(X \geq a) = 0.88493 \Rightarrow \{Tipificamos\} \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{a-175.2}{6.5}\right) = 0.88493 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq -\frac{a-175.2}{6.5}\right) = 0.88493 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{a-175.2}{6.5} = 1.2 \Rightarrow \boxed{a = -1.2 \cdot 6.5 + 175.2 = 167.4\ cm}$$

La estatura que superan el 88.493 % de los policías de Francia es 167.4 cm.

3.3.- Llamamos X a la longitud de la cola de un ejemplar adulto de lémur barbado, especie recientemente descrita. Sigue una distribución normal cuya desviación típica tiene un valor asumido de 4.2 cm (por los estudios realizados en variedades similares), y para estimar su media μ se ha tomado una muestra independiente de 20 lémures. La media muestral resulta ser $\overline{X} = 38.6\,cm$.

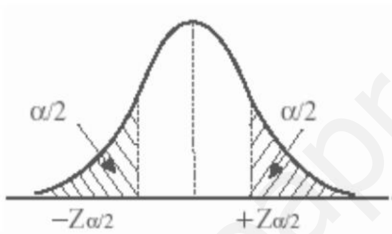
(i) Calcula un intervalo en el que situaríamos a μ con el 95 % de confianza. **[1.25 puntos]**

(ii) Si juzgamos excesivo el error muestral y queremos repetir la estimación con una muestra más numerosa, lo justo para que dicho error sea menor que 1 cm, ¿cuál debería ser el tamaño de dicha muestra? **[1.25 puntos]**

X = longitud de la cola de un ejemplar adulto de lémur barbado.
X = N(**μ**, 4.2)

(i) Con un nivel de confianza del 95 % tenemos

$$1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow \alpha/2 = 0'025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.96}$$



Calculamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{4.2}{\sqrt{20}} \simeq 1.84$$

El error es de 1.84 centímetros.

El intervalo de confianza es:

$$\left(\overline{x} - Error, \overline{x} + Error\right) = \left(38.6 - 1.84,\ 38.6 + 1.84\right) = \left(36.76, 40.44\right)$$

(ii) Con un nivel de confianza del 95 % tenemos $z_{\alpha/2}$ **= 1,96**

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1 = 1.96 \cdot \frac{4.2}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 1.96 \cdot 4.2 \Rightarrow n = \left(1.96 \cdot 4.2\right)^2 \simeq 67.7658$$

El error tamaño de la muestra debe ser entero y superior al valor obtenido.
El tamaño mínimo es de 68 lémures.