Universitat de les Illes Balears

Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II	Model 3

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas. Dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total de puntos obtenidos entre 4.

Solo se tendrán en cuenta las respuestas claramente justificadas y razonadas usando lenguaje matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.

Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos con acceso a Internet o aparatos que puedan transmitir o almacenar información.

P1.- Queremos medir el consumo de un coche eléctrico que tiene una batería de 50 kWh y que tiene un consumo diferente si conducimos por autopista, por ciudad o por carretera de montaña. Hicimos tres salidas, cada una empezando con la carga completa de la batería, y pudimos recorrer las siguientes distancias hasta que se acabó la batería:

– Primer día: 180 km por autopista y 60 km por ciudad.
– Segundo día: 200 km por ciudad y 80 km por carretera de montaña.
– Tercer día: 150 km por autopista y 80 km por carretera de montaña.

a) Calcula el consumo del coche en cada uno de los tipos de carreteras. (7 pt)

b) Si únicamente lo utilizamos para conducir por ciudad, ¿cuál sería la cantidad total de km que podríamos recorrer con una carga completa de la batería? (3 pt)

P2.- Un camión necesita transportar una carga de exactamente 12 metros cúbicos de volumen, y de exactamente 18 toneladas de peso. Puede transportar:

– Arena, que pesa 1.6 toneladas por metro cúbico.
– Gravilla, que pesa 1.8 toneladas por metro cúbico.
– Ceniza, que pesa 0.5 toneladas por metro cúbico.

a) Si queremos llenar el camino solo con arena y ceniza, calcula qué cantidad de cada material nos permite alcanzar simultáneamente la máxima capacidad de volumen y la máxima capacidad de peso. (5 pt)

b) Si queremos llenar el camino solo con arena y gravilla, no podemos alcanzar simultáneamente la máxima capacidad de volumen y la máxima capacidad de peso. Justifica por qué no. (5 pt)

P3.- En una pastelería quieren promocionar sus productos ofreciendo dos ofertas:

– Oferta A: 2 ensaimadas, 2 cocas de patata, 4 barras de chocolate, que se venderá a 4 €.
– Oferta B: 6 ensaimadas, 3 cocas de patata, 3 barras de chocolate, que se venderá a 8 €.

Disponen de 120 ensaimadas, 60 cocas de patata y 72 barras de chocolate. Suponiendo que todas las ofertas se venderán por completo, nos interesa calcular cuántas ofertas A y cuántas ofertas B deberían de ofrecer para maximizar el beneficio.

a) Plantea la maximización de este beneficio como un problema de programación lineal con dos variables. (3 pt)

b) Dibuja la región factible, indicando las rectas y vértices que la delimitan. (5 pt)

c) ¿Cuántas ofertas A y cuántas ofertas B deberían ofrecer para maximizar el beneficio? ¿Cuál sería el beneficio en este caso? (2 pt)

P4.- La temperatura de un objeto, *t* (en grados centígrados), cambia a medida que pasa el tiempo, *s* (en segundos), según el siguiente modelo:

$$t(s) = 45 \cdot e^{-0.08s} + 25$$
$$= 45 \cdot 0.923^{s} + 25, \quad para\ s \geq 0 .$$

(Te proporcionamos dos expresiones algebraicas válidas y equivalentes, puedes utilizar la que prefieras.)

a) Haz una gráfica esquemática de la función *t(s)*. Calcula o justifica, e indica sobre la gráfica: el dominio, el comportamiento en los extremos del dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales y globales. (7 pt)

b) ¿A qué se tenderá a la temperatura del objeto cuando haya pasado mucho tiempo? (3 pt)

P5.- Una maleta rectangular tiene tres medidas (anchura, altura y profundidad), y su volumen es el producto de las tres medidas. Queremos diseñar una maleta rectangular de 30 cm de profundidad, y tal que la suma de la anchura, la altura y la profundidad sea de exactamente 110 cm. ¿Cuál es el volumen máximo que puede tener esta maleta? (10 pt)

P6.- Tiramos dos dados no trucados. Considera los siguientes sucesos:

A: En el primer dado ha salido un 1.
B: En el segundo dado ha salido un 1.
C: La suma de los valores de los dos dados es 3.

a) Calcula P(A). (3 pt)

b) Calcula P(A ∪ B). (3 pt)

c) ¿Son C y A ∪ B sucesos independientes? (4 pt)

P7.- En una población:

– las alturas de los hombres siguen una distribución normal de media 1.76 metros y desviación típica 0.12 metros; y
– las alturas de las mujeres siguen una distribución normal de media 1.62 metros y desviación típica 0.11 metros.

Se pide:

a) Escogemos un hombre al azar. Cuál es la probabilidad de que su altura sea mayor o igual a 1.76 metros? (3 pt)

b) Escogemos una mujer al azar. Cuál es la probabilidad de que su altura sea mayor o igual a 1.76 metros? (4 pt)

c) Que es más probable, que un hombre tenga una altura inferior a 1.76 metros, o que una mujer tenga una altura inferior a 1.76 metros? (3 pt)

P8.- Tiramos una moneda al aire 100 veces, y ha salido 46 veces cara y 54 veces cruz. Un estudiante cree que la moneda no está trucada y propone aproximar el número de caras que salen en 100 tiradas como una variable aleatoria con distribución normal N ($\mu = 50$, $\sigma = 5$).

a) Según la distribución propuesta, ¿cuál hubiese sido la probabilidad de obtener 60 caras o más? (3 pt)

b) Calcula el intervalo de confianza que contenga el 90% de los valores más probables que aparecen en la distribución propuesta. ¿Es razonable la hipótesis de que la moneda no está trucada? (4 pt)

Ahora, tiremos otra moneda al aire 100 veces, y el número de caras que obtendremos también seguirá una distribución normal N ($\mu = 50$, $\sigma = 5$). Sospecharemos que la moneda está trucada si el número de caras no está contenido en el intervalo calculado en el apartado anterior.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que sospechemos que la moneda está trucada? (3 pt)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal N(0, 1)

SOLUCIONES

P1.- Queremos medir el consumo de un coche eléctrico que tiene una batería de 50 kWh y que tiene un consumo diferente si conducimos por autopista, por ciudad o por carretera de montaña. Hicimos tres salidas, cada una empezando con la carga completa de la batería, y pudimos recorrer las siguientes distancias hasta que se acabó la batería:

– Primer día: 180 km por autopista y 60 km por ciudad.
– Segundo día: 200 km por ciudad y 80 km por carretera de montaña.
– Tercer día: 150 km por autopista y 80 km por carretera de montaña.
a) Calcula el consumo del coche en cada uno de los tipos de carreteras. (7 pt)
b) Si únicamente lo utilizamos para conducir por ciudad, ¿cuál sería la cantidad total de km que podríamos recorrer con una carga completa de la batería? (3 pt)

a) Llamamos "x", "y", "z" al consumo (en Kwh) del coche cuando circula, respectivamente, por autopista, por ciudad y por carretera de montaña.

Primer día: 180 km por autopista y 60 km por ciudad → $180x+60y=50$
Segundo día: 200 km por ciudad y 80 km por carretera de montaña → $200y+80z=50$
Tercer día: 150 km por autopista y 80 km por carretera de montaña → $150x+80z=50$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{r}180x+60y=50\\200y+80z=50\\150x+80z=50\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}18x+6y=5\\20y+8z=5\\15x+8z=5\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}18x+6y=5\\20y+8z=5\\8z=5-15x\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}18x+6y=5\\20y+5-15x=5\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{r}18x+6y=5\\20y-15x=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}18x+6y=5\\20y=15x\Rightarrow y=\frac{15}{20}x=\frac{3}{4}x\end{array}\right\}\Rightarrow 18x+6\frac{3}{4}x=5\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 18x+\frac{9}{2}x=5\Rightarrow 36x+9x=10\Rightarrow 45x=10\Rightarrow\boxed{x=\frac{10}{45}=\frac{2}{9}\simeq 0.222}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\boxed{y=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{9}=\frac{1}{6}\simeq 0.167}\\8z=5-15\frac{2}{9}=\frac{5}{3}\Rightarrow\boxed{z=\frac{5}{24}\simeq 0.208}\end{array}\right.$$

El consumo por autopista es de 0.222 Kwh por kilómetro, por ciudad es de 0.167 Kwh por kilómetro y por montaña es de 0.208 Kwh por kilómetro.

b) Por ciudad el consumo es de 1/6 Kwh por kilómetro y la batería es de 50 Kwh.

$$\frac{50}{\frac{1}{6}}=300\text{ kilómetros}$$

Puede circular durante 300 kiñlómetros.

P2.- Un camión necesita transportar una carga de exactamente 12 metros cúbicos de volumen, y de exactamente 18 toneladas de peso. Puede transportar:

– Arena, que pesa 1.6 toneladas por metro cúbico.
– Gravilla, que pesa 1.8 toneladas por metro cúbico.
– Ceniza, que pesa 0.5 toneladas por metro cúbico.

a) Si queremos llenar el camino solo con arena y ceniza, calcula qué cantidad de cada material nos permite alcanzar simultáneamente la máxima capacidad de volumen y la máxima capacidad de peso. (5 pt)

b) Si queremos llenar el camino solo con arena y gravilla, no podemos alcanzar simultáneamente la máxima capacidad de volumen y la máxima capacidad de peso. Justifica por qué no. (5 pt)

Llamamos "x" a los metros cúbicos de arena, "y" a los metros cúbicos de gravilla y "z" a los metros cúbicos de ceniza.

a) Un camión necesita transportar una carga de exactamente 12 metros cúbicos de volumen → $x+z=12$.
Un camión necesita transportar una carga de exactamente 18 toneladas de peso → $1.6x+0.5z=18$.
Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{r} x+z=12 \\ 1.6x+0.5z=18 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=12-z \\ 16x+5z=180 \end{array}\right\} \Rightarrow 16(12-z)+5y=180 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 192-16z+5z=180 \Rightarrow -11z=-12 \Rightarrow \boxed{z=\frac{12}{11}\simeq 1.1} \Rightarrow \boxed{x=12-\frac{12}{11}=\frac{120}{11}\simeq 10.91}$$

Debe transportar 120/11 metros cúbicos de arena y 12/11 metros cúbicos de ceniza.

b) El sistema sería: $\left.\begin{array}{r} x+y=12 \\ 1.6x+1.8y=18 \end{array}\right\}$. Intentamos resolverlo.

$$\left.\begin{array}{r} x+y=12 \\ 1.6x+1.8y=18 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=12-y \\ 16x+18y=180 \end{array}\right\} \Rightarrow 16(12-y)+18y=180 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 192-16y+18y=180 \Rightarrow 2y=-12 \Rightarrow y=\frac{-12}{2}=-6 \text{ ¡STOP!}$$

La cantidad de metros cúbicos de gravilla no puede ser negativa. Por lo que esta situación no tiene solución real.

P3.- En una pastelería quieren promocionar sus productos ofreciendo dos ofertas:

– Oferta A: 2 ensaimadas, 2 cocas de patata, 4 barras de chocolate, que se venderá a 4 €.
– Oferta B: 6 ensaimadas, 3 cocas de patata, 3 barras de chocolate, que se venderá a 8 €.
Disponen de 120 ensaimadas, 60 cocas de patata y 72 barras de chocolate. Suponiendo que todas las ofertas se venderán por completo, nos interesa calcular cuántas ofertas A y cuántas ofertas B deberían de ofrecer para maximizar el beneficio.
a) Plantea la maximización de este beneficio como un problema de programación lineal con dos variables. (3 pt)
b) Dibuja la región factible, indicando las rectas y vértices que la delimitan. (5 pt)
c) ¿Cuántas ofertas A y cuántas ofertas B deberían ofrecer para maximizar el beneficio? ¿Cuál sería el beneficio en este caso? (2 pt)

a) Llamamos "x" al número de ofertas A e "y" al número de ofertas B.

Realizamos una tabla.

	Ensaimadas	Cocas de patata	Barras de chocolate	Beneficio
Número de ofertas A (x)	**2x**	**2x**	**4x**	**4x**
Número de ofertas B (y)	**6y**	**3y**	**3y**	**8y**
TOTAL	$2x+6y$	$2x+3y$	$4x+3y$	$4x+8y$

La función a maximizar es el beneficio que viene dado por la expresión:

$$B(x,y)=4x+8y$$

Las restricciones son:

"*Disponen de 120 ensaimadas, 60 cocas de patata y 72 barras de chocolate*" →
$2x+6y\le 120;\ 2x+3y\le 60;\ 4x+3y\le 72$
Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\ y\ge 0$

Reunimos las restricciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l}2x+6y\le 120\\2x+3y\le 60\\4x+3y\le 72\\x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x+3y\le 60\\2x+3y\le 60\\4x+3y\le 72\\x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\}$$

b) Empezamos dibujando las rectas que delimitan la región factible.

$x+3y=60$

x	$y=\frac{60-x}{3}$
0	20
30	10
60	0

$2x+3y=60$

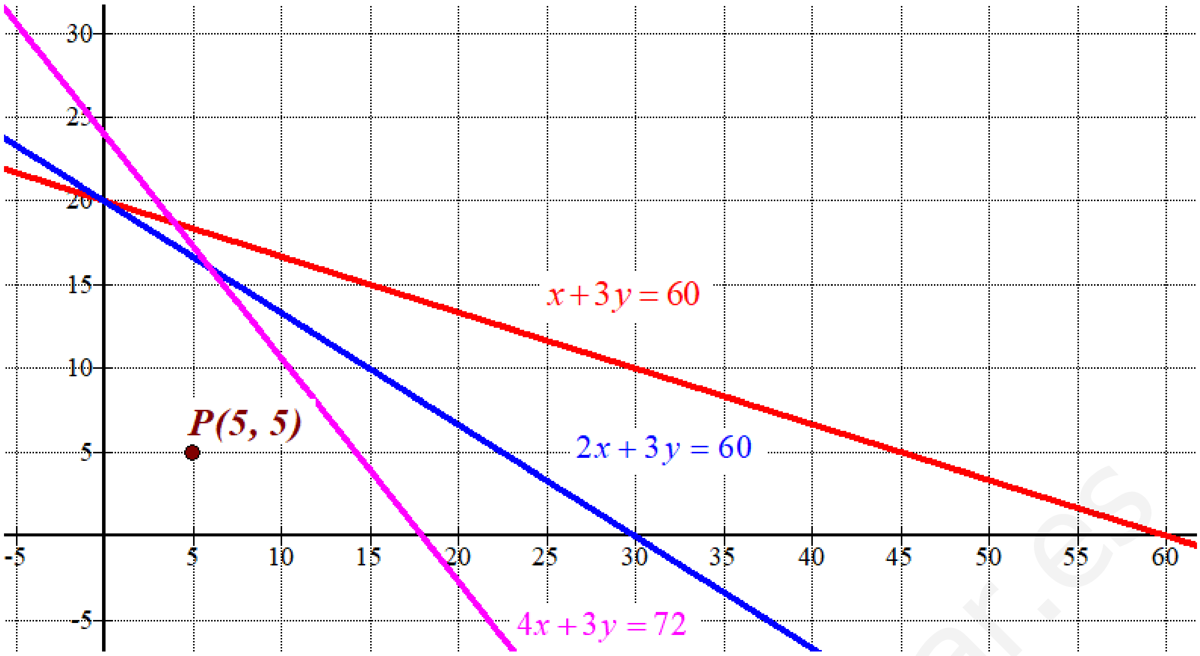
x	$\frac{60-2x}{3}$
0	20
6	16
30	0

$4x+3y=72$

x	$\frac{72-4x}{3}$
0	24
6	16
18	0

$x\ge 0;\ y\ge 0$

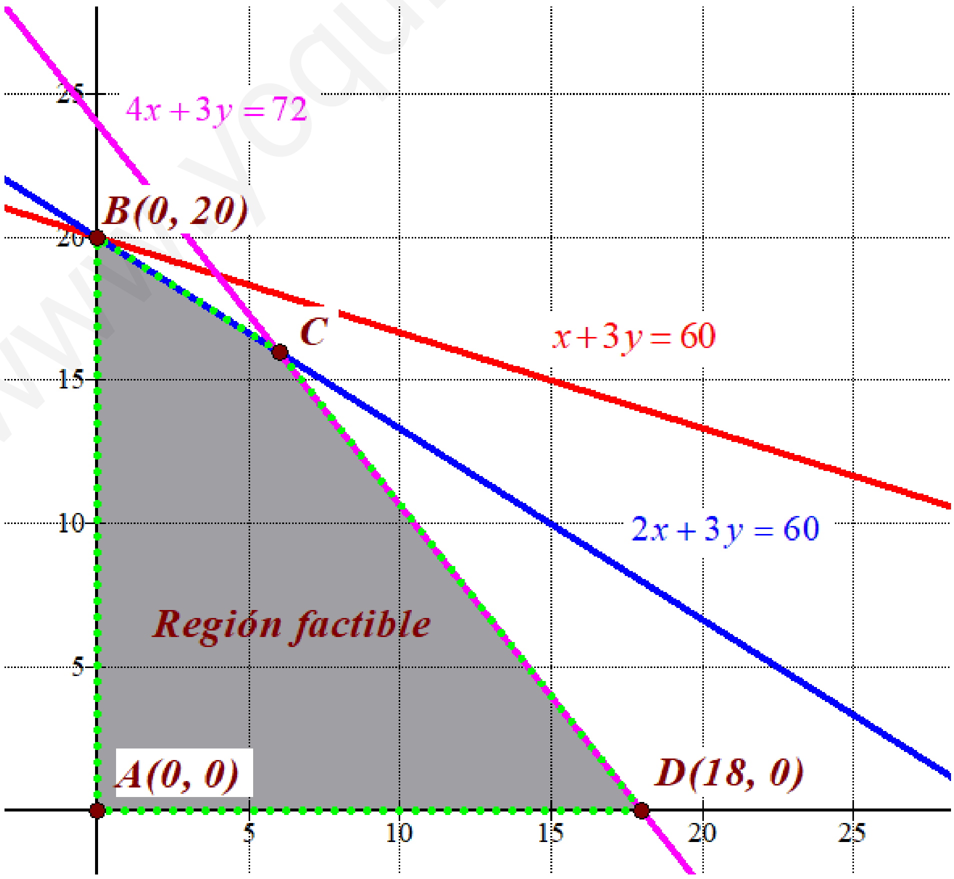
Primer cuadrante



La región factible es la región del primer cuadrante por debajo de las rectas roja, azul y rosa. Comprobamos que el punto P(5, 5) perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 5+3\cdot 5\leq 60 \\ 2\cdot 5+3\cdot 5\leq 60 \\ 4\cdot 5+3\cdot 5\leq 72 \\ 5\geq 0;\ 5\geq 0 \end{array}\right\}\text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo.



Determinamos las coordenadas del vértice C.

$$C \to \left.\begin{array}{r} 2x+3y=60 \\ 4x+3y=72 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3y=60-2x \\ 4x+3y=72 \end{array}\right\} \Rightarrow 4x+60-2x=72 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x=12 \Rightarrow \boxed{x=6} \Rightarrow 3y=60-12 \Rightarrow \boxed{y=\frac{48}{3}=16} \Rightarrow \boxed{C(6,16)}$$

Los vértices de la región factible son: A(0, 0), $B(0,20)$, $C(6,16)$ y D(18, 0).

c) Valoramos la función beneficio $B(x,y)=4x+8y$ en cada uno de los vértices en busca del valor máximo.

A(0, 0) → $B(0,0)=0$
$B(0,20)$ → $B(0,20)=0+8\cdot 20=160$ € ¡Máximo!
$C(6,16)$ → $B(6,16)=4\cdot 6+8\cdot 16=152$ €
D(18, 0) → $B(18,0)=4\cdot 18+0=72$ €

El valor máximo de los beneficios se obtiene en el vértice $B(0,20)$.
Con 0 ofertas tipo A y 20 tipo B se satisfacen todas las restricciones y el beneficio es máximo, siendo este de 160 €,

P4.- La temperatura de un objeto, t (en grados centígrados), cambia a medida que pasa el tiempo, s (en segundos), según el siguiente modelo:

$$\begin{aligned} t(s) &= 45 \cdot e^{-0.08s} + 25 \\ &= 45 \cdot 0.923^{s} + 25, \quad para\ s \geq 0 \end{aligned}.$$

(Te proporcionamos dos expresiones algebraicas válidas y equivalentes, puedes utilizar la que prefieras.)
a) Haz una gráfica esquemática de la función *t(s)*. Calcula o justifica, e indica sobre la gráfica: el dominio, el comportamiento en los extremos del dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales y globales. (7 pt)
b) ¿A qué se tenderá a la temperatura del objeto cuando haya pasado mucho tiempo? (3 pt)

a) El dominio es $[0,+\infty)$, pues la función exponencial no presenta ninguna discontinuidad.

Calculamos la temperatura inicial, es decir, el valor de la función para $s = 0$.

$$t(0) = 45 \cdot e^{-0.08 \cdot 0} + 25 = 45 + 25 = 70$$

La función se inicia en el punto (0, 70).

Calculamos el límite de la función cuando $s \to +\infty$.

$$\lim_{s\to+\infty} t(s) = \lim_{s\to+\infty} 45 \cdot e^{-0.08s} + 25 = 45 \cdot e^{-\infty} + 25 = 45\cdot 0 + 25 = 25$$

$t = 25$ es una asíntota horizontal de la función cuando $s \to +\infty$.
Cuando el tiempo tiende a valores grandes la temperatura tiende a ser de 25º.

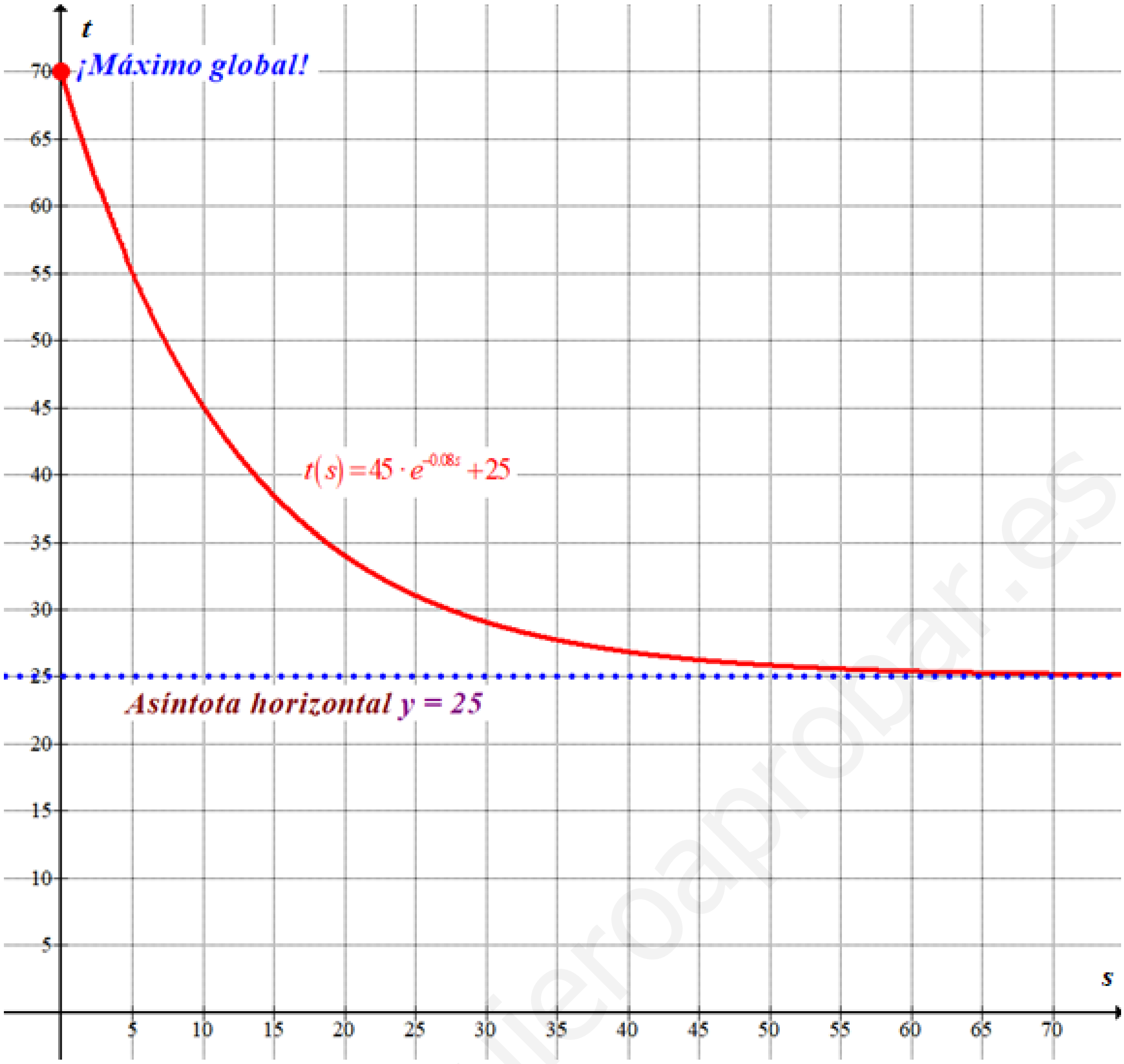
Calculamos los extremos locales.

$$\left.\begin{array}{l} t'(s) = 45 \cdot (-0.08) e^{-0.08s} = -3.6e^{-0.08s} \\ t'(s) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -3.6e^{-0.08s} = 0 \Rightarrow \text{¡No existe!}$$

La función no presenta ni máximos ni mínimos locales y siempre es decreciente pues la derivada siempre es negativa $\to t'(s) = -3.6e^{-0.08s} < 0$.

Hacemos una tabla de valores y la representamos.

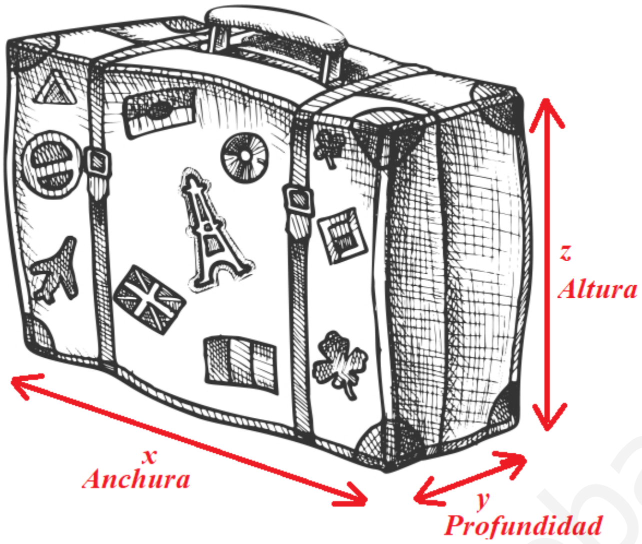
s	$t(s) = 45 \cdot e^{-0.08s} + 25$
0	70
10	45.21
20	34.08
50	25.82



Observamos que la función tiene un máximo global en $s = 0$, dado que la función es siempre continua y decreciente. No tiene mínimo global.

b) La temperatura del objeto cuando haya pasado mucho tiempo es el valor del límite de la función cuando $s \rightarrow +\infty$. Lo hemos calculado y la temperatura es de 25º. También se observa este comportamiento en la gráfica.

P5.- Una maleta rectangular tiene tres medidas (anchura, altura y profundidad), y su volumen es el producto de las tres medidas. Queremos diseñar una maleta rectangular de 30 cm de profundidad, y tal que la suma de la anchura, la altura y la profundidad sea de exactamente 110 cm. ¿Cuál es el volumen máximo que puede tener esta maleta? (10 pt)



$$\left.\begin{array}{l} y = 30 \\ x+30+z=110 \rightarrow z=80-x \\ Volumen = xyz \end{array}\right\} \Rightarrow Volumen = V(x) = x \cdot 30 \cdot z = 30x(80-x) = 2400x - 30x^2$$

El dominio de esta función es $0 \leq x \leq 80$, ya que la altura es $z = 80 - x$ y el valor de la altura no puede ser negativo (tampoco la anchura)

Derivamos la función volumen y buscamos cuando se anula la derivada para obtener sus puntos críticos.

$$\left.\begin{array}{r} V(x) = 2400x - 30x^2 \Rightarrow V'(x) = 2400 - 60x \\ V'(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2400 - 60x = 0 \Rightarrow x = \frac{2400}{60} = 40$$

Comprobamos que el punto crítico *x = 40* es un máximo relativo sustituyendo su valor en la segunda derivada.

$$V''(x) = -60 \Rightarrow V''(40) = -60 < 0 \rightarrow x = 40 \text{ es máximo relativo}$$

Comparamos el valor del volumen en el máximo relativo y el valor en los extremos del intervalo de definición $[0,80]$.

$$V(0) = 0 \text{ centímetros cúbicos.}$$
$$V(40) = 2400 \cdot 40 - 30 \cdot 40^2 = 48000 \text{ centímetros cúbicos.}$$
$$V(80) = 0 \text{ centímetros cúbicos.}$$

El volumen es máximo cuando la anchura de la maleta es de 40 centímetros. Siendo este volumen máximo de 48000 cm^3.

P6.- Tiramos dos dados no trucados. Considera los siguientes sucesos:

A: En el primer dado ha salido un 1.
B: En el segundo dado ha salido un 1.
C: La suma de los valores de los dos dados es 3.
a) Calcula P(A). (3 pt)
b) Calcula P(A ∪ B). (3 pt)
c) ¿Son C y A ∪ B sucesos independientes? (4 pt)

a) Aplicamos la regla de Laplace y $P(A)=\frac{\text{nº casos favorables}}{\text{nº casos posibles}}=\frac{1}{6}$.

b) Aplicamos la regla de Laplace y $P(B)=\frac{\text{nº casos favorables}}{\text{nº casos posibles}}=\frac{1}{6}$..

c) Calculamos la probabilidad del suceso A∩B.

$$P(A\cap B)=\{Sucesos\ independientes\}=P(A)P(B)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$$

Calculamos la probabilidad pedida.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)+P(A\cap B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{36}=\boxed{\frac{11}{36}}$$

d) La suma de los dos dados es 3 cuando sale 1, 2 o 2, 1. Dos sucesos favorables de los 36 posibles resultados de lanzar dos dados.

$$P(C)=\boxed{\frac{2}{36}}$$

Los sucesos C y A ∪ B son independientes si se cumple: $P[C\cap(A\cup B)]=P(C)P(A\cup B)$.

El suceso $C\cap(A\cup B)=C$, pues $A\cup B$ es sacar 1 en el primer o en el segundo dado = {11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 31, 41, 51, 61} y C es el suceso “sacar 12 o 21 = {12, 21}”

$$\left.\begin{array}{l} P[C\cap(A\cup B)]=P(C)=\frac{2}{36} \\ P(C)P(A\cup B)=\frac{2}{36}\cdot\frac{11}{36} \end{array}\right\}\Rightarrow P[C\cap(A\cup B)]\neq P(C)P(A\cup B)$$

Los sucesos C y A ∪ B no son independientes.

P7.- En una población:

– las alturas de los hombres siguen una distribución normal de media 1.76 metros y desviación típica 0.12 metros; y
– las alturas de las mujeres siguen una distribución normal de media 1.62 metros y desviación típica 0.11 metros.
Se pide:
a) Escogemos un hombre al azar. Cuál es la probabilidad de que su altura sea mayor o igual a 1.76 metros? (3 pt)
b) Escogemos una mujer al azar. Cuál es la probabilidad de que su altura sea mayor o igual a 1.76 metros? (4 pt)
c) Que es más probable, que un hombre tenga una altura inferior a 1.76 metros, o que una mujer tenga una altura inferior a 1.76 metros? (3 pt)

X = Altura de un hombre. X = N(1.76, 0.12)
Y = Altura de una mujer. Y = N(1.62, 0.11)

a) Nos piden calcular $P(X \geq 1.76)$.

$$P(X \geq 1.76) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{X-1.76}{0.12} \geq \frac{1.76-1.76}{0.12}\right) = P(Z \geq 0) = \boxed{0.5}$$

b) Nos piden calcular $P(Y \geq 1.76)$.

$$P(Y \geq 1.76) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{X-1.62}{0.11} \geq \frac{1.76-1.62}{0.11}\right) = P\left(Z \geq \frac{1.76-1.62}{0.11}\right) =$$

$$= P(Z \geq 1.27) = 1 - P(Z \leq 1.27) = 1 - 0.898 = \boxed{0.102}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	[illegible]	0.
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	[illegible]	0.
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	[illegible]	0.
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	[illegible]	0.
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	[illegible]	0.
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	[illegible]	0.
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	[illegible]	0.
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	[illegible]	0.
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	[illegible]	0.
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	[illegible]	0.
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	[illegible]	0.
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	[illegible]	0.
1.2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.8980	0.
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.

c) Calculamos las probabilidades de ambos sucesos y los comparamos.

$$\left.\begin{array}{l} P(X < 1.76) = 1 - P(X \geq 1.76) = 1 - 0.5 = 0.5 \\ P(Y < 1.76) = 1 - P(Y \geq 1.76) = 1 - 0.102 = 0.898 \end{array}\right\} \Rightarrow P(Y < 1.76) = 0.898 > 0.5 = P(X < 1.76)$$

Es más probable que la mujer tenga una altura inferior a 1.76.

P8.- Tiramos una moneda al aire 100 veces, y ha salido 46 veces cara y 54 veces cruz. Un estudiante cree que la moneda no está trucada y propone aproximar el número de caras que salen en 100 tiradas como una variable aleatoria con distribución normal N (μ = 50, σ = 5).

a) Según la distribución propuesta, ¿cuál hubiese sido la probabilidad de obtener 60 caras o más? (3 pt)

b) Calcula el intervalo de confianza que contenga el 90% de los valores más probables que aparecen en la distribución propuesta. ¿Es razonable la hipótesis de que la moneda no está trucada? (4 pt)

Ahora, tiremos otra moneda al aire 100 veces, y el número de caras que obtendremos también seguirá una distribución normal N (μ = 50, σ = 5). Sospecharemos que la moneda está trucada si el número de caras no está contenido en el intervalo calculado en el apartado anterior.
c) ¿Cuál es la probabilidad de que sospechemos que la moneda está trucada? (3 pt)

X = número de monedas en 100 tiradas. X = B(100, 0.5)

Y = N(50, 5)
Las probabilidades de la variable binomial X se aproximan por una normal Y.

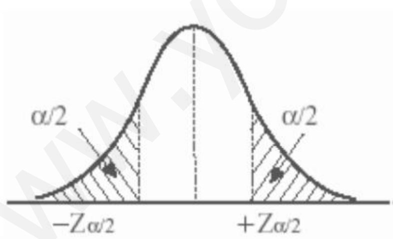
a) Nos piden calcular $P(X \geq 60)$.

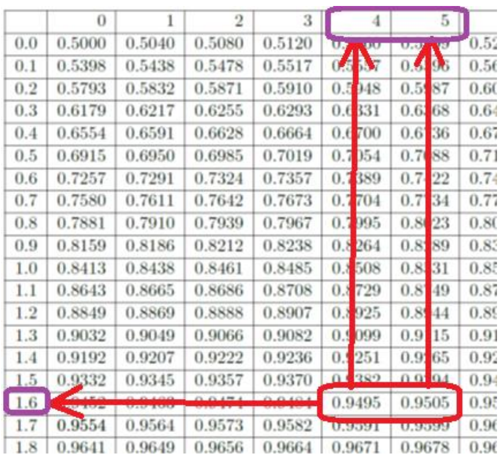
$$P(X \geq 60) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \geq 59.5) = \{Tipificamos\} =$$

$$= P\left(\frac{Y-50}{5} \geq \frac{59.5-50}{5}\right) = P(Z \geq 1.9) = 1 - P(Z \leq 1.9) = 1 - 0.9713 = \boxed{0.0287}$$

b) Con un nivel de confianza del 90 %

1 – α = 0,90 → α = 0,10 → α /2 = 0’05 →
→ 1 – α /2 = 0,95 → $z_{\alpha/2}$ = **1.645**





	0	1	2	3	4	5	
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	[illegible]	[illegible]	0.52
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	[illegible]	[illegible]	0.56
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	[illegible]	[illegible]	0.60
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	[illegible]	[illegible]	0.64
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	[illegible]	[illegible]	0.67
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	[illegible]	[illegible]	0.71
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	[illegible]	[illegible]	0.74
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	[illegible]	[illegible]	0.77
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	[illegible]	[illegible]	0.80
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	[illegible]	[illegible]	0.83
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	[illegible]	[illegible]	0.85
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	[illegible]	[illegible]	0.87
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	[illegible]	[illegible]	0.89
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	[illegible]	[illegible]	0.91
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	[illegible]	[illegible]	0.92
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	[illegible]	[illegible]	0.94
1.6	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9495	0.9505	0.95
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.96
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.96

El intervalo de confianza es:

$$\left(\mu - z_{\alpha/2}\cdot\sigma,\ \mu + z_{\alpha/2}\cdot\sigma\right) = \left(50 - 1.645\cdot 5,\ 50 + 1.645\cdot 5\right) = \left(41.775,\ 58.225\right)$$

Como el valor 46 caras entra dentro del intervalo de confianza es razonable que la moneda no esté trucada (con el nivel de confianza del 90%)

c) En el apartado anterior el intervalo de confianza contenía el 90% de valores más probables, así que la probabilidad de que esta nueva observación no esté contenida en el mismo intervalo es del 10%