Universitat de les Illes Balears
Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II | Model 1

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas. Dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total de puntos obtenidos entre 4. Solo se tendrán en cuenta las respuestas claramente justificadas y razonadas usando lenguaje matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos con acceso a Internet o aparatos que puedan transmitir o almacenar información.

P1.- Queremos contratar una empresa de gestión de entre las siguientes:

- La empresa A nos cobra 150 € de coste base, y adicionalmente 5 € por cada cliente y 3 € por cada factura que emite.
- La empresa B nos cobra 300 € de coste base, 10 € por cada cliente y no cobra por emitir facturas.
- La empresa C nos cobra 100 € de coste base, no cobra en función del número de clientes, pero cobra 5 € por cada factura que emite.

a) Si el año pasado tuvimos 50 clientes y, en total, emitimos 180 facturas, ¿qué empresa nos hubiese costado menos contratar? (3 pt)

De cara al año que viene, tenemos una previsión de x clientes e y facturas. Con esta previsión, la empresa A nos costaría 1050 € y la empresa B nos costaría 900 €.

b) Calcula el número de clientes x y el número de facturas y previstos. (5 pt)

c) Con x clientes e y facturas, ¿cuánto nos costaría la empresa C? (2 pt)

P2.- Un camión transporta una carga de exactamente 12 metros cúbicos de volumen, y como máximo un peso de 18 toneladas. Puede transportar:

- Arena, que pesa 1.6 toneladas por metro cúbico, y que se factura a 80 € por metro cúbico.
- Gravilla, que pesa 1.8 toneladas por metro cúbico, y que se factura a 100 € por metro cúbico.
- Ceniza, que pesa 0.5 toneladas por metro cúbico, y que se factura a 25 € por metro cúbico.

Nos interesa calcular el precio más alto que podrá facturar en un viaje. Para hacerlo, se pide:

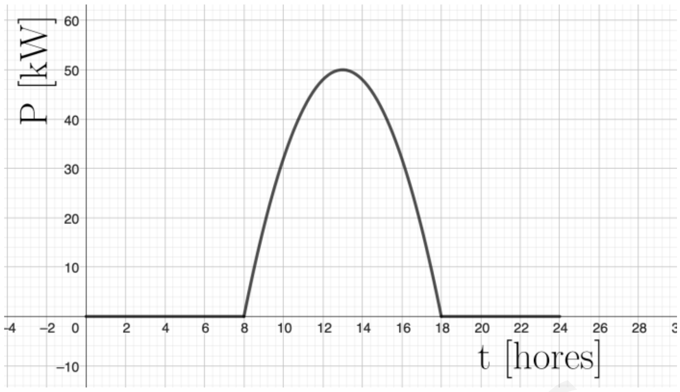
a) Plantea la maximización de este precio como un problema de programación lineal en dos variables. (4 pt)

b) Dibuja la región factible, indicando las rectas y vértices que la delimitan. (4 pt)

c) Calcula el número de toneladas de cada material que se tienen que transportar para alcanzar el precio máximo, y determina también dicho precio máximo. (2 pt)

P3.- La potencia generada por una placa solar, P (medida en kW), depende del tiempo transcurrido, t (medido en horas), según la siguiente expresión:

$$P(t)=\begin{cases} 0 & para\ 0\le t<8, \\ -2t^2+52t+c & para\ 8\le t<18, \\ 0 & para\ 18\le t\le 24 \end{cases}$$



Donde c es un parámetro real.

a) Teniendo en cuenta que la función es continua, ¿cuál es el valor del parámetro c?. (3 pt)
b) Teniendo en cuenta que el valor máximo se alcanza a las 13 horas, calcula con la expresión dada cuál es la potencia en ese momento. (3 pt)
c) ¿En qué intervalos la función es creciente? ¿En qué intervalos es decreciente? (4 pt)

P4.- Consideremos el peso de un adulto, p (en kg), y su metabolismo basal, m (en vatios). Un investigador proporciona el modelo siguiente:

$$p(m)=0.1\cdot m^{1.5},\quad m\in(0,+\infty)$$

a) Haz un gráfico esquemático de la función *p(m)*, indicando el dominio, el comportamiento en los extremos del dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales. (7 pt)
b) Encuentra la función que da el metabolismo basal en función del peso, *m(p)* (es decir, aísla la variable m). (3 pt)

P5.- Considera las funciones:

$$f(x)=(x+2)^3,\qquad g(x)=x^3+6x^2+12x.$$

a) Justifica, calculando, que $f'(x)=g'(x)$. (4 pt)

b) ¿Es cierto que $f(x)=g(x)$? (3 pt)

c) Calcula $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (3 pt)

P6.-Manel escoge al azar dos cifras entre 0 y 9, que pueden estar repetidas.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que ambas cifras sean múltiplo de tres? (3 pt)
b) El producto de las dos cifras es múltiplo de tres si lo es al menos una de ellas. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto de las dos cifras sea múltiplo de tres? (4 pt)

Ahora, Pep te da su número de teléfono, que contiene nueve cifras también entre 0 y 9, posiblemente repetidas, y que supondremos que son cifras escogidas al azar.
c) ¿Cuál es la probabilidad de que el producto de las nueve cifras sea múltiplo de tres? (3 pt)

P7.- De un total de n = 80 alumnos, el 80% de los alumnos han aprobado un examen de matemáticas, y el 75% han aprobado un examen de física. Además, de los que han suspendido el examen de matemáticas, solo un 50% ha aprobado el de física.
a) De los que han suspendido el examen de física, ¿Cuántos han aprobado el de matemáticas? (4 pt)
b) ¿Cuántos alumnos han aprobado alguno de los dos exámenes? (3 pt)

c) ¿Aprobar el examen de física y aprobar el examen de matemáticas son sucesos independientes? (3 pt)

P8.- Para estudiar la vida de las tortugas marinas, hemos recopilado la edad que alcanzaron algunos ejemplares que murieron por causas naturales, y hemos obtenido (en años):

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
55	62	69	70	72	77	94	103

$\overline{x}$
75.25

Suponiendo que estos datos siguen una distribución normal, y que su desviación típica poblacional es de σ = 20 años.

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional con el 90% de confianza. (3 pt)

Supongamos ahora, además, que la media poblacional es de $\mu = 75.25$.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una tortuga marina supere los 80 años de vida? (3 pt)

c) ¿Cuál es la probabilidad de que una tortuga marina supere los 80 años de vida, pero no los 100 años de vida? (3 pt)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal N(0, 1)

SOLUCIONES

P1.- Queremos contratar una empresa de gestión de entre las siguientes:
- La empresa A nos cobra 150 € de coste base, y adicionalmente 5 € por cada cliente y 3 € por cada factura que emite.
- La empresa B nos cobra 300 € de coste base, 10 € por cada cliente y no cobra por emitir facturas.
- La empresa C nos cobra 100 € de coste base, no cobra en función del número de clientes, pero cobra 5 € por cada factura que emite.

a) Si el año pasado tuvimos 50 clientes y, en total, emitimos 180 facturas, ¿qué empresa nos hubiese costado menos contratar? (3 pt)

De cara al año que viene, tenemos una previsión de *x* clientes e *y* facturas. Con esta previsión, la empresa A nos costaría 1050 € y la empresa B nos costaría 900 €.

b) Calcula el número de clientes *x* y el número de facturas y previstos. (5 pt)

c) Con *x* clientes e *y* facturas, ¿cuánto nos costaría la empresa C? (2 pt)

a) Calculamos el coste en cada empresa.

La empresa A → 150 + 5 · 50 + 3 · 180 = 940 €

La empresa B → 300 + 10 · 50 + 0 · 180 = 800 €

La empresa C → 100 + 0 · 50 + 5 · 180 = 1000 €

Hubiese costado menos cara la empresa B, solo 800 €.

b)

La empresa A → 150 + 5 · x + 3 · y = 1050 €

La empresa B → 300 + 10 · x + 0 · y = 900 €

Planteamos un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l}150+5x+3y=1050\\300+10x=900\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}5x+3y=900\\10x=600\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}5x+3y=900\\\boxed{x=\frac{600}{10}=60}\end{array}\right\}\Rightarrow 300+3y=900\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3y=600\Rightarrow\boxed{y=\frac{600}{3}=200}$$

La previsión es de 60 clientes y 200 facturas.

c) La empresa C → 100 + 0 · x + 5 · y = $100+5y$ €.
Si utilizamos los datos del apartado b) nos costaría $100+5\cdot 200=1100$ €

P2.- Un camión transporta una carga de exactamente 12 metros cúbicos de volumen, y como máximo un peso de 18 toneladas. Puede transportar:

- Arena, que pesa 1.6 toneladas por metro cúbico, y que se factura a 80 € por metro cúbico.
- Gravilla, que pesa 1.8 toneladas por metro cúbico, y que se factura a 100 € por metro cúbico.
- Ceniza, que pesa 0.5 toneladas por metro cúbico, y que se factura a 25 € por metro cúbico.

Nos interesa calcular el precio más alto que podrá facturar en un viaje. Para hacerlo, se pide:

a) Plantea la maximización de este precio como un problema de programación lineal en dos variables. (4 pt)

b) Dibuja la región factible, indicando las rectas y vértices que la delimitan. (4 pt)

c) Calcula el número de toneladas de cada material que se tienen que transportar para alcanzar el precio máximo, y determina también dicho precio máximo. (2 pt)

a) Llamamos x = m^3 de arena, y = m^3 de gravilla, $12-x-y$ = m^3 de ceniza.

Realizamos una tabla.

	m^3 de material	Peso en toneladas	Facturación
Toneladas de arena (x)	**x**	**1.6x**	**80x**
Toneladas de gravilla (y)	**y**	**1.8y**	**100y**
Toneladas de ceniza	**12–x–y**	**0.5(12–x–y)**	**25(12–x–y)**
TOTAL	**12**	$1.6x+1.8y+0.5(12-x-y)$	$80x+100y+25(12-x-y)$

La función a maximizar es la facturación que viene dado por la expresión:

$$f(x,y)=80x+100y+25(12-x-y)=80x+100y+300-25x-25y=55x+75y+300$$

Las restricciones son:

"*El camión transporta como máximo un peso de 18 toneladas*" →
$$1.6x+1.8y+0.5(12-x-y)\leq 18 \Rightarrow 1.6x+1.8y+6-0.5x-0.5y\leq 18 \Rightarrow 1.1x+1.3y\leq 12$$

Las cantidades deben ser positivas → $x\geq 0;\ y\geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{c} 1.1x+1.3y\leq 12 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} 11x+13y\leq 120 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

b) Empezamos dibujando las rectas que delimitan la región factible.

$11x+13y=120$

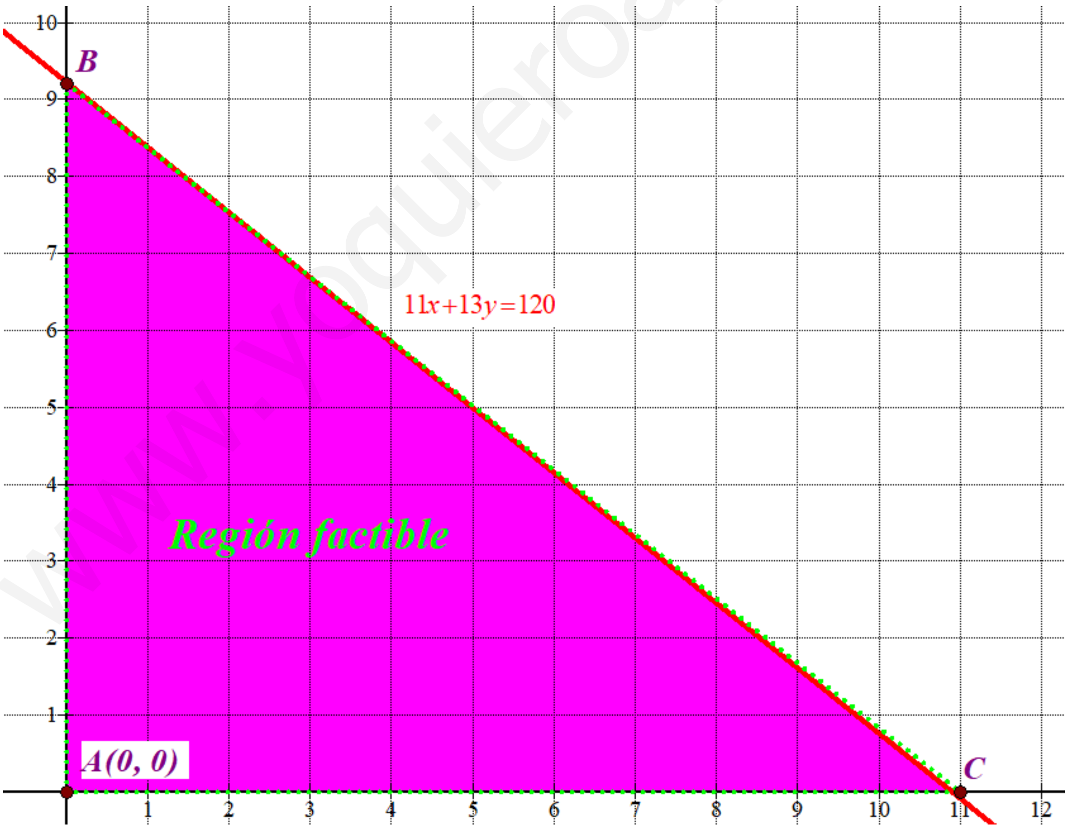
x	$y=\dfrac{120-11x}{13}$
0	$120/13$
1	$109/13$
5	5

$x\geq 0;\ \ y\geq 0$

Primer cuadrante

La región factible es la región del primer cuadrante que cumple las inecuaciones $\left.\begin{array}{l} 11x+13y\leq 120 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$, por lo tanto, es la región del primer cuadrante por debajo de la recta roja.

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Determinamos las coordenadas de los vértices B y C.

$$B \rightarrow \left.\begin{array}{l} 11x+13y=120 \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 13y=120 \Rightarrow y=\frac{120}{13} \Rightarrow \boxed{B\left(0,\frac{120}{13}\right)}$$

$$C \rightarrow \left.\begin{array}{l} 11x+13y=120 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 11x=120 \Rightarrow x=\frac{120}{11} \Rightarrow \boxed{C\left(\frac{120}{11},0\right)}$$

Los vértices de la región factible son: A(0, 0), $B\left(0,\frac{120}{13}\right)$ y $C\left(\frac{120}{11},0\right)$

c) Valoramos la función $f(x,y)=55x+75y+300$ en cada uno de los vértices.

A(0, 0) → $f(0,0)=0$

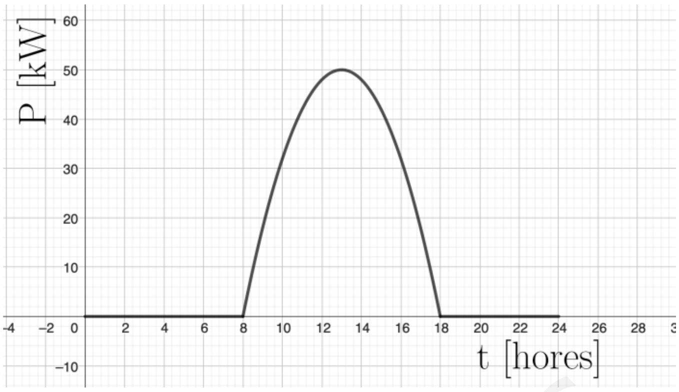
$B\left(0,\frac{120}{13}\right)$ → $f\left(0,\frac{120}{13}\right)=0+75\frac{120}{13}+300=\frac{12900}{13}\simeq 992.31€$

$C\left(\frac{120}{11},0\right)$ → $f\left(\frac{120}{11},0\right)=55\frac{120}{11}+0+300=900€$

La máxima facturación se obtiene en el vértice $B\left(0,\frac{120}{13}\right)$. Significa que sin transportar arena, transportando 120/13 = 9.23 m^3 de gravilla y el resto de cenizas (2.77 m^3) se consigue una facturación máxima de 992.31 €.
Para maximizar la facturación debe transportar 9.23 · 1.8 = 16.615 toneladas de gravilla y $2.77 \cdot 0.5 = 1.385$ toneladas de ceniza.

P3.- La potencia generada por una placa solar, P (medida en kW), depende del tiempo transcurrido, t (medido en horas), según la siguiente expresión:

$$P(t)=\begin{cases} 0 & para\ 0\le t<8, \\ -2t^2+52t+c & para\ 8\le t<18, \\ 0 & para\, 18\le t\le 24 \end{cases}$$



Donde c es un parámetro real.

a) Teniendo en cuenta que la función es continua, ¿cuál es el valor del parámetro c? (3 pt)
b) Teniendo en cuenta que el valor máximo se alcanza a las 13 horas, calcula con la expresión dada cuál es la potencia en ese momento. (3 pt)
c) ¿En qué intervalos la función es creciente? ¿En qué intervalos es decreciente? (4 pt)

a) Debe ser continua en $t = 8$ y en $t = 18$.
Continua en $t = 8$

$$\left.\begin{array}{l} P(8)=-2t^2+52t+c=-2\cdot 8^2+52\cdot 8+c=288+c \\ \lim\limits_{x\to 8^+} P(t)=\lim\limits_{x\to 8^+} -2t^2+52t+c=288+c \\ \lim\limits_{x\to 8^-} P(t)=\lim\limits_{x\to 8^-} 0=0 \\ P(8)=\lim\limits_{x\to 8^+} P(t)=\lim\limits_{x\to 8^-} P(t) \end{array}\right\} \Rightarrow 288+c=0 \Rightarrow \boxed{c=-288}$$

Comprobamos que también es continua en $t = 18$.

$$\left.\begin{array}{l} P(18)=0 \\ \lim\limits_{x\to 18^+} P(t)=\lim\limits_{x\to 18^+} 0=0 \\ \lim\limits_{x\to 18^-} P(t)=\lim\limits_{x\to 18^-} -2t^2+52t-288=0 \end{array}\right\} \Rightarrow P(18)=\lim\limits_{x\to 18^+} P(t)=\lim\limits_{x\to 18^-} P(t)=0$$

La función es continua en $t = 18$.
Con $c = -288$ la función $P(t)$ es continua.

b) Nos piden calcular $P(13)$.

$$P(13)=-2\cdot 13^2+52\cdot 13-288=\boxed{50\,kW}$$

c) Estudiamos el signo de la derivada en el intervalo (8, 18).

$$\left.\begin{array}{l} P'(t)=-4t+52 \\ P'(t)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -4t+52=0 \Rightarrow t=13$$

En el intervalo (8, 13) tomamos $t = 10$ y la derivada vale $P'(10)=-40+52=12>0$. La función crece en (8, 13).

En el intervalo (13, 18) tomamos $t = 15$ y la derivada vale $P'(15) = -60 + 52 = -8 < 0$. La función decrece en (13, 18).

La función es creciente en (8, 13) y decreciente en (13, 18). En $[0,8) \cup (18,24]$ la función es constante.

P4.- Consideremos el peso de un adulto, *p* (en kg), y su metabolismo basal, *m* (en vatios). Un investigador proporciona el modelo siguiente:

$$p(m) = 0.1 \cdot m^{1.5}, \quad m \in (0, +\infty)$$

a) Haz un gráfico esquemático de la función *p(m)*, indicando el dominio, el comportamiento en los extremos del dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales. (7 pt)

b) Encuentra la función que da el metabolismo basal en función del peso, *m(p)* (es decir, aísla la variable *m*). (3 pt)

a) El dominio es $(0, +\infty)$ pues la función no presenta ninguna dificultad.

En los extremos tenemos que en *m = 0*:

$$\lim_{m \to 0} p(m) = \lim_{m \to 0} 0.1 \cdot m^{1.5} = 0.1 \cdot 0^{1.5} = 0.1$$

Y en *m* tendiendo a +∞ tenemos que:

$$\lim_{m \to +\infty} p(m) = \lim_{m \to +\infty} 0.1 \cdot m^{1.5} = 0.1 \cdot (+\infty)^{1.5} = +\infty$$

Para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento utilizamos la derivada.

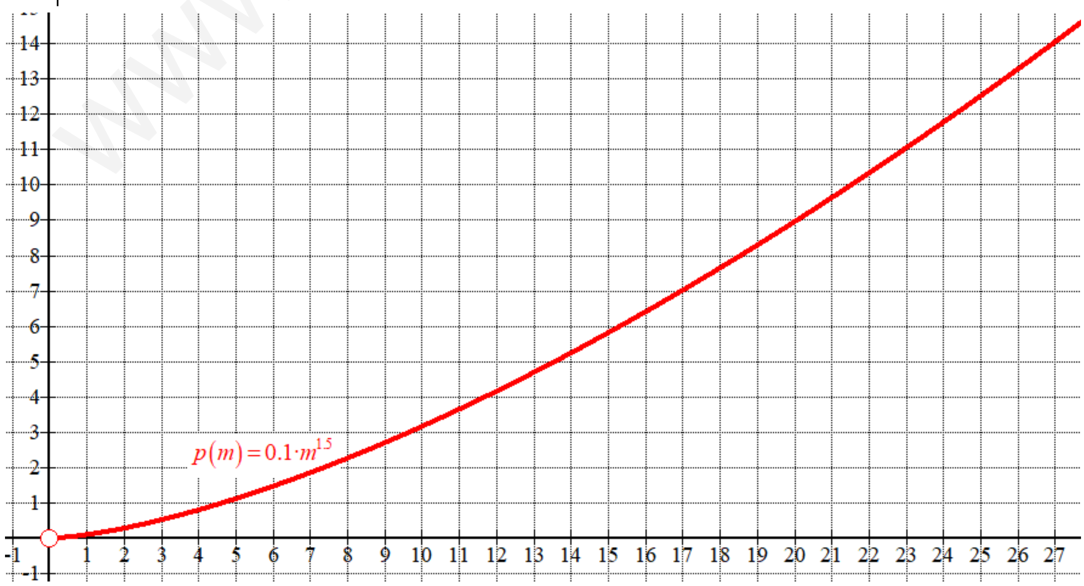
$$\left.\begin{array}{l} p'(m) = 0.1 \cdot (1.5) m^{0.5} = 0.15 m^{0.5} \\ p'(m) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0.15 m^{0.5} = 0 \Rightarrow m = 0 \notin (0, +\infty)$$

La derivada no cambia de signo en $(0, +\infty)$ y siempre es positiva. La función siempre es creciente.

No presenta máximos ni mínimos locales.

Hacemos una tabla de valores y la representamos.

m	$p(m) = 0.1 \cdot m^{1.5}$
1	0.1
10	3.16
20	8.94



b) Despejamos *m* en la expresión de la función.

$$p(m)=0.1\cdot m^{1.5}\Rightarrow m^{1.5}=\frac{p}{0.1}=10p\Rightarrow m^{3/2}=10p\Rightarrow m=(10p)^{2/3}=\sqrt[3]{(10p)^2}$$

$$m(p)=\sqrt[3]{100p^2},\ \ p\in(0,+\infty)$$

P5.- Considera las funciones:

$$f(x)=(x+2)^3, \qquad g(x)=x^3+6x^2+12x.$$

a) Justifica, calculando, que $f'(x)=g'(x)$. (4 pt)

b) ¿Es cierto que $f(x)=g(x)$? (3 pt)

c) Calcula $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (3 pt)

a)

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3(x+2)^2=3\left(x^2+4x+4\right)=3x^2+12x+12 \\ g'(x)=3x^2+12x+12 \end{array}\right\}\Rightarrow f'(x)=g'(x)$$

b) Para que sean la misma función deben coincidir en todos sus puntos. Comprobamos si las funciones coinciden en un punto cualquiera, por ejemplo, $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=(0+2)^3=8 \\ g(x)=0^3+6\cdot 0^2+12\cdot 0=0 \end{array}\right\}\Rightarrow f(0)=8\neq 0=g(0)\Rightarrow f(x)\neq g(x)$$

No es cierto que sen iguales las funciones.

c)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+2)^3}{x^3+6x^2+12x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{(x+2)^3}{x^3}}{\frac{x^3+6x^2+12x}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{x+2}{x}\right)^3}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{6x^2}{x^3}+\frac{12x}{x^3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)^3}{1+\frac{6}{x}+\frac{12}{x^2}}=\frac{\left(1+\frac{2}{\infty}\right)^3}{1+\frac{6}{\infty}+\frac{12}{\infty}}=\frac{(1)^3}{1+0+0}=\boxed{1}$$

P6.-Manel escoge al azar dos cifras entre 0 y 9, que pueden estar repetidas.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que ambas cifras sean múltiplo de tres? (3 pt)
b) El producto de las dos cifras es múltiplo de tres si lo es al menos una de ellas. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto de las dos cifras sea múltiplo de tres? (4 pt)
Ahora, Pep te da su número de teléfono, que contiene nueve cifras también entre 0 y 9, posiblemente repetidas, y que supondremos que son cifras escogidas al azar.
c) ¿Cuál es la probabilidad de que el producto de las nueve cifras sea múltiplo de tres? (3 pt)

a) Del 0 al 9 hay 10 cifras de las cuales son múltiplos de 3 cuatro de ellas: 0, 3, 6, 9.
La probabilidad de elegir una cifra y que sea múltiplo de 3 es 4/10 = 0.4.

Llamamos M1 y M2 a los sucesos "escoger múltiplo de 3 en 1ª y 2ª elección" respectivamente.

$$P(M1 \cap M2) = \{\text{Elecciones independientes}\} = P(M1)P(M2) = 0.4 \cdot 0.4 = \boxed{0.16}$$

b) Utilizamos el suceso contrario "No sacar múltiplo de 3 en ninguna de las elecciones".

$$P\left(\overline{M1} \cap \overline{M2}\right) = P\left(\overline{M1}\right)P\left(\overline{M2}\right) = 0.6 \cdot 0.6 = \boxed{0.36}$$

La probabilidad pedida es 1 – 0.36 = 0.64.

c) Realizamos el mismo razonamiento del apartado anterior.

Utilizamos el suceso contrario "No sacar múltiplo de 3 ninguna de ellas".

$$P\left(\overline{M1} \cap \overline{M2} \cap \overline{M3} \cap \overline{M4} \cap \overline{M5} \cap \overline{M6} \cap \overline{M7} \cap \overline{M8} \cap \overline{M9}\right) =$$

$$= P\left(\overline{M1}\right)P\left(\overline{M2}\right)P\left(\overline{M3}\right)P\left(\overline{M4}\right)P\left(\overline{M5}\right)P\left(\overline{M6}\right)P\left(\overline{M7}\right)P\left(\overline{M8}\right)P\left(\overline{M9}\right) =$$

$$= 0.6 \cdot 0.6 \cdot 0.6 \cdot 0.6 \cdot 0.6 \cdot 0.6 \cdot 0.6 \cdot 0.6 \cdot 0.6 = 0.6^9 = \boxed{0.01}$$

La probabilidad pedida es 1 – 0.01 = 0.99.

P7.- De un total de $n = 80$ alumnos, el 80% de los alumnos han aprobado un examen de matemáticas, y el 75% han aprobado un examen de física. Además, de los que han suspendido el examen de matemáticas, solo un 50% ha aprobado el de física.
a) De los que han suspendido el examen de física, ¿Cuántos han aprobado el de matemáticas? (4 pt)
b) ¿Cuántos alumnos han aprobado alguno de los dos exámenes? (3 pt)
c) ¿Aprobar el examen de física y aprobar el examen de matemáticas son sucesos independientes? (3 pt)

Obtenemos todos los datos posibles:

El 80% de los alumnos (80) han aprobado un examen de matemáticas → $0{,}8 \cdot 80 = 64$ han aprobado matemáticas.
El 75% han aprobado un examen de física → $0.75 \cdot 80 = 60$ han aprobado física.
De los que han suspendido el examen de matemáticas ($80 - 64 = 16$), solo un 50% ha aprobado el de física → $0.5 \cdot 16 = 8$ han suspendido matemáticas y aprobado física.
Ponemos los datos en una tabla de contingencia y completamos el resto de datos.

	Aprueban física	Suspenden física	
Aprueban matemáticas			64
Suspenden matemáticas	8		
	60		80

Completamos la tabla.

	Aprueban física	Suspenden física	
Aprueban matemáticas	52	12	64
Suspenden matemáticas	8	28	36
	60	40	80

a) De los que han suspendido física (40) hay 12 han aprobado matemáticas.

b) Si sumamos los datos de la tabla tenemos que 52 aprueban las dos materias, 12 aprueban solo matemáticas y 8 solo aprueban física. En total $52 + 12 + 8 = 72$ aprueban alguno de los dos exámenes.

c) Llamamos M al suceso "Aprobar matemáticas" y F al suceso "Aprobar física". Para ser independientes debe cumplirse que $P(M \cap F) = P(M)P(F)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(M \cap F) = \dfrac{52}{80} = 0.65 \\ P(M)P(F) = \dfrac{64}{80} \cdot \dfrac{60}{80} = 0.60 \end{array}\right\} \Rightarrow P(M \cap F) = 0.65 \neq 0.60 = P(M)P(F)$$

Al ser distintos sabemos que los sucesos no son independientes.

P8.- Para estudiar la vida de las tortugas marinas, hemos recopilado la edad que alcanzaron algunos ejemplares que murieron por causas naturales, y hemos obtenido (en años):

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
55	62	69	70	72	77	94	103

$\overline{x}$
75.25

Suponiendo que estos datos siguen una distribución normal, y que su desviación típica poblacional es de σ = 20 años.

b) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional con el 90% de confianza. (3 pt)

Supongamos ahora, además, que la media poblacional es de $\mu = 75.25$.

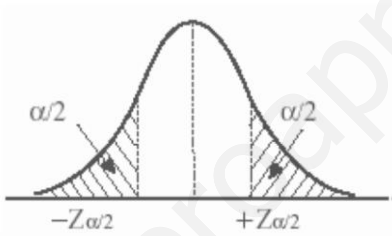
b) ¿Cuál es la probabilidad de que una tortuga marina supere los 80 años de vida? (3 pt)

c) ¿Cuál es la probabilidad de que una tortuga marina supere los 80 años de vida, pero no los 100 años de vida? (3 pt)

X = Edad de las tortugas marinas (en años).
X = N(**μ**, 20)

a) Con un nivel de confianza del 90 %

$$1 - \alpha = 0{,}90 \rightarrow \alpha = 0{,}10 \rightarrow \alpha/2 = 0'05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}95 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.645}$$



Obtenemos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{20}{\sqrt{8}} \simeq 11.632\, años$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\overline{x} - Error, \overline{x} + Error\right) = \left(75.25 - 11.632,\ 75.25 + 11.632\right) = \left(63.718, 86.982\right)$$

b) Nos piden calcular $P(X > 90)$.

$$P(X > 90) = \{Tipificamos\} = P\left(Z > \frac{90 - 75.25}{20}\right) = P(Z > 0.24) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0.24) = \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\} = 1 - 0.5948 = \boxed{0.4052}$$

c) Nos piden calcular $P(90 < X < 100)$.

$$P(90 < X < 100) = P(X < 100) - P(X < 90) = \{Tipificamos\} =$$

$$= P\left(Z < \frac{100-75.25}{20}\right) - P\left(Z < \frac{90-75.25}{20}\right) = P(Z \leq 1.24) - P(Z \leq 0.24) =$$

$$= \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\} = 0.8925 - 0.5948 = \boxed{0.2977}$$