Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)

Universidad de Extremadura

Curso 2022-2023

Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN
El examen consta de 10 problemas, cuyo valor máximo es de 2 puntos cada uno. El estudiante ha de elegir 5 problemas. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen sólo se tendrán en cuenta los cinco primeros problemas resueltos. Si se desea que alguno de ellos no sea tenido en cuenta, el estudiante ha de tacharlo y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de los cuatro primeros problemas sin tachar, se corregiría el que ocupe el sexto lugar.

PROBLEMA 1 (2 puntos)

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 1 & 3 & 3 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Hallar la matriz X que sea solución de la ecuación matricial $X\cdot A - A^t = B$, donde A^t es la matriz traspuesta de A. Justificar la respuesta.

PROBLEMA 2 (2 puntos)

Sean las matrices siguientes: $A=\begin{pmatrix} -1 & x \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar el valor de x para que se verifique que $A^2=-I$. **(1 punto)**

b) Para el valor de x referido en el apartado a), determinar la matriz A^{43} **(1 punto)**

PROBLEMA 3 (2 puntos)

Un charcutero vende lomos a 26 € el kilogramo, salchichones a 15 € el kilogramo y chorizos a 9 € el kilogramo. Durante un día vendió 60 kg de embutidos, cobrando por ellos 737 €. Sabiendo que el peso de los chorizos es el doble de lo que pesan conjuntamente los lomos y los salchichones, calcular, razonando la respuesta, cuántos kilogramos de cada tipo de embutido vendió ese día.

PROBLEMA 4 (2 puntos)

Una empresa fabrica móviles y tabletas que después vende a 720 euros y 540 euros la unidad, respectivamente. Por cuestiones logísticas, no puede fabricar semanalmente más de 800 móviles ni más de 600 tabletas, ni más de 1000 entre los dos productos. Suponiendo que vende todo el material que fabrica, calcular, justificando las respuestas, el número de móviles y de tabletas que debe fabricar semanalmente para obtener unos ingresos máximos y el valor de dichos ingresos máximos.

PROBLEMA 5 (2 puntos)

Una fábrica de materiales de construcción ha descubierto que la producción diaria de ladrillos no defectuosos (en toneladas), *P(x)*, depende de la dureza del material que utiliza, *x*, (en una escala del 0 al 10) de acuerdo con la función:

$$P(x)=-x^3+3Ax^2-3Bx+23 \qquad 0\le x\le 10$$

Determinar, justificando la respuesta, las constantes A y B sabiendo que la producción mínima de ladrillos no defectuosos es de 13 toneladas y se alcanza cuando la dureza del material es de 1.

PROBLEMA 6 (2 puntos)
Una empresa constructora, tiene que afrontar gastos de suelo y gastos de edificación, (en miles de euros), que dependen de la distancia al centro, *x*, (en km). Dichos gastos vienen dados, respectivamente, por las funciones:

$$S(x)=10x+100,\ 0\le x\le 25,\ \text{ y }\ E(x)=-x^2+10x+200,\ 0\le x\le 25$$

Determinar, justificando las respuestas:

a) La expresión *G(x)* que indica los gastos totales de la constructora en función de la distancia al centro de la ciudad donde se realice la obra. **(0.5 puntos)**

b) A qué distancias del centro los gastos de construcción son máximos y mínimos, así como el valor de dichos gastos. **(1.5 puntos)**

PROBLEMA 7 (2 puntos)
Determinar el área delimitada por la función $f(x)=x^2-6x+8$ y el eje OX entre los valores $x=0$ y $x=5$, representando dicha función y el área que se pide. Razonar las respuestas.

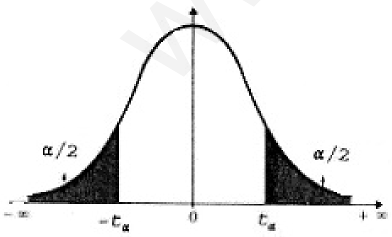
PROBLEMA 8 (2 puntos)
Un concesionario trabaja con tres marcas de coches: la marca A representa el 60% de sus ventas, la B el 30% y la C el resto. En un estudio acerca de las preferencias de los clientes sobre el cambio de marchas (manual, automático) se obtiene que el 70% de los coches vendidos de la marca A, el 40% de los de la marca B y el 80% de los de la marca C tienen el cambio manual. Se pide, razonando la respuesta:

a) Calcular la probabilidad de que el concesionario venda un coche con cambio automático. **(1 punto)**

b) Sabiendo que un coche vendido tiene el cambio manual, calcular la probabilidad de que sea de la marca C. **(1 punto)**

PROBLEMA 9 (2 puntos)
Se realiza un estudio sobre el contenido de cierta sustancia en una marca de refrescos. De 500 latas analizadas, 120 contenían dicha sustancia. Calcular un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 95%, para la proporción de latas de esta marca que contenían la sustancia. Razonar la respuesta.

PROBLEMA 10 (2 puntos)
Se pretende realizar un estudio sobre el contenido en alcohol de las cervezas, variable que sigue una distribución normal con desviación típica 1.5 grados. ¿Qué cantidad de cervezas habrá que analizar como mínimo si queremos obtener un intervalo de confianza para el contenido medio de alcohol, con un nivel de confianza del 99% y una longitud no superior a 1 grado? Razonar la respuesta.



α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	∞	2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.1	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690

SOLUCIONES

PROBLEMA 1 (2 puntos)

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 1 & 3 & 3 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Hallar la matriz X que sea solución de la ecuación matricial $X\cdot A-A^t=B$, donde A^t es la matriz traspuesta de A. Justificar la respuesta.

Despejamos X de la ecuación matricial.

$$X\cdot A-A^t=B \Rightarrow X\cdot A=A^t+B \Rightarrow X=\left(A^t+B\right)A^{-1}$$

Comprobamos que existe la inversa de la matriz A y la calculamos.

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix}=0+2+0-0-1-0=1\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos la expresión de la matriz X.

$$A^t+B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 1 & 3 & 3 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X=\left(A^t+B\right)A^{-1}\Rightarrow X=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4+2-15 & 1+0-6 & 1+0-3 \\ 8+2+0 & 2+0+0 & 2+0+0 \\ -12+0+5 & -3+0+2 & -3+0+1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix} -9 & -5 & -2 \\ 10 & 2 & 2 \\ -7 & -1 & -2 \end{pmatrix}}$$

PROBLEMA 2 (2 puntos)

Sean las matrices siguientes: $A=\begin{pmatrix}-1 & x\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar el valor de x para que se verifique que $A^2=-I$. **(1 punto)**

b) Para el valor de x referido en el apartado a), determinar la matriz A^{43} **(1 punto)**

a)

$$A^2=\begin{pmatrix}-1 & x\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & x\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2x & -x+x\\ 2-2 & -2x+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2x & 0\\ 0 & 1-2x\end{pmatrix}$$

$$A^2=-I\Rightarrow\begin{pmatrix}1-2x & 0\\ 0 & 1-2x\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow 1-2x=-1\Rightarrow -2x=-2\Rightarrow \boxed{x=1}$$

El valor buscado es $x = 1$.

b) Sabemos que $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ y que $A^2=-I$.

$$A^{43}=A^{2\cdot 21+1}=\left(A^2\right)^{21}\cdot A^1=\left(-I\right)^{21}\cdot A=\left(-1\right)^{21}\cdot I^{21}\cdot A=-A=-\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{43}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}}$$

PROBLEMA 3 (2 puntos)
Un charcutero vende lomos a 26 € el kilogramo, salchichones a 15 € el kilogramo y chorizos a 9 € el kilogramo. Durante un día vendió 60 kg de embutidos, cobrando por ellos 737 €. Sabiendo que el peso de los chorizos es el doble de lo que pesan conjuntamente los lomos y los salchichones, calcular, razonando la respuesta, cuántos kilogramos de cada tipo de embutido vendió ese día.

Llamamos "x" a los kilos de lomos, "y" a los kilos de salchichones y "z" a los kilos de chorizos.

"Durante un día vendió 60 kg de embutidos" → $x+y+z=60$

"Un charcutero vende lomos a 26 € el kilogramo, salchichones a 15 € el kilogramo y chorizos a 9 € el kilogramo cobrando por ellos 737 €." → $26x+15y+9z=737$

"El peso de los chorizos es el doble de lo que pesan conjuntamente los lomos y los salchichones" → $z=2(x+y)$

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=60 \\ 26x+15y+9z=737 \\ z=2(x+y) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=60-y-z \\ 26x+15y+9z=737 \\ z=2x+2y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 26(60-y-z)+15y+9z=737 \\ z=2(60-y-z)+2y \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 1560-26y-26z+15y+9z=737 \\ z=120-2y-2z+2y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -11y-17z=-823 \\ 3z=120 \to \boxed{z=40} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -11y-17\cdot 40=-823 \Rightarrow -11y=-823+680 \Rightarrow -11y=-143 \Rightarrow \boxed{y=\frac{143}{11}=13} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=60-13-40=7}$$

Vendió 7 kilogramos de lomos, 13 kilogramos de salchichones y 40 kilogramos de chorizos.

PROBLEMA 4 (2 puntos)
Una empresa fabrica móviles y tabletas que después vende a 720 euros y 540 euros la unidad, respectivamente. Por cuestiones logísticas, no puede fabricar semanalmente más de 800 móviles ni más de 600 tabletas, ni más de 1000 entre los dos productos. Suponiendo que vende todo el material que fabrica, calcular, justificando las respuestas, el número de móviles y de tabletas que debe fabricar semanalmente para obtener unos ingresos máximos y el valor de dichos ingresos máximos.

Llamamos "x" al número de móviles e "y" al número de tabletas.

"Vende cada móvil a 720 € y cada tableta a 540 €" → Los ingresos son $I(x,y)=720x+540y$.
Esta es la función objetivo que deseamos maximizar.

Las restricciones son:

"No puede fabricar semanalmente más de 800 móviles ni más de 600 tabletas, ni más de 1000 entre los dos productos" → $x \leq 800;\ y \leq 600;\ x+y \leq 1000$.
Las cantidades deben ser positivas → $x \geq 0;\ y \geq 0$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} x \leq 800 \\ y \leq 600 \\ x+y \leq 1000 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x=800$

$x=800$	y
800	0
800	100

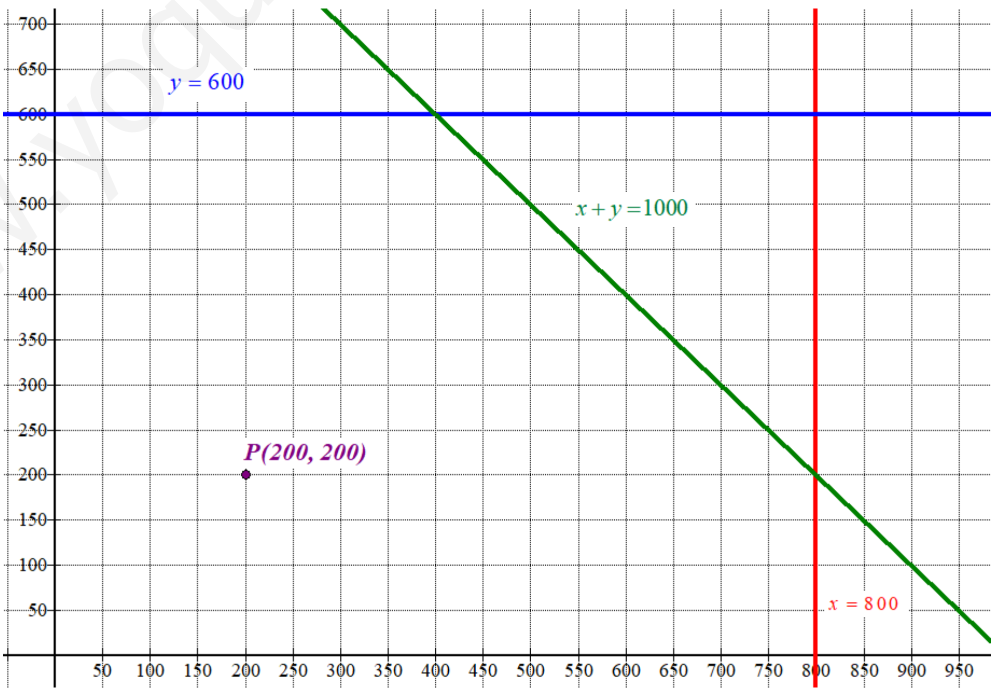
$y=600$

x	$y=600$
0	600
100	600

$x+y=1000$

x	$y=1000-x$
0	1000
1000	0

$x \geq 0;\ y \geq 0$
Primer cuadrante

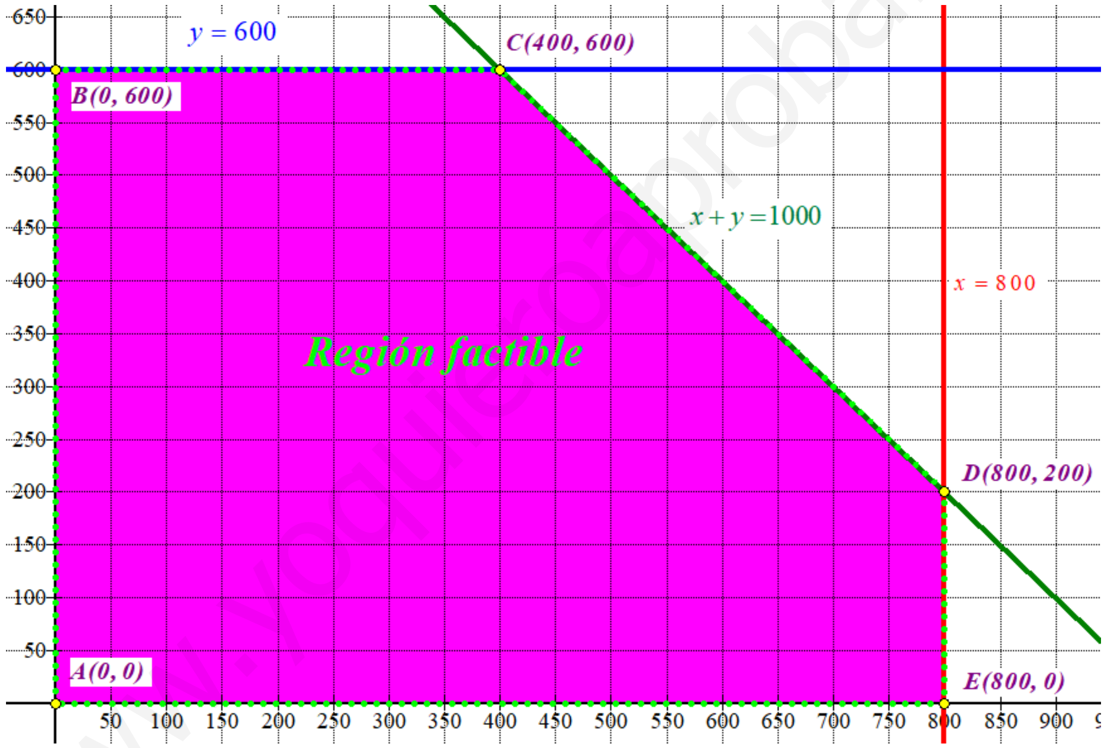


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x \leq 800 \\ y \leq 600 \\ x+y \leq 1000 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de las rectas roja, azul y verde.

Comprobamos que el punto P(200, 200) perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 200 \leq 800 \\ 200 \leq 600 \\ 200+200 \leq 1000 \\ 200 \geq 0;\ 200 \geq 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible e indicamos las coordenadas de sus vértices.



El valor máximo de la función Ingresos $I(x,y) = 720x + 540y$ está situado en uno de sus vértices, averiguamos en cual valorando la función en cada uno de ellos.

A(0, 0) → $I(0,0) = 0$

B(0, 600) → $I(0,600) = 324000$

C(400, 600) → $I(400,600) = 720\cdot 400 + 540\cdot 600 = 612000$

D(800, 200) → $I(800,200) = 720\cdot 800 + 540\cdot 200 = 684000$ ¡Máximo!

D(800, 0) → $I(800,0) = 576000$

El valor máximo es 684000 y se obtiene en el vértice D(800, 200).

Los ingresos máximos se obtienen fabricando y vendiendo 800 móviles y 200 tabletas. Siendo 684000 € los beneficios máximos que se pueden obtener.

PROBLEMA 5 (2 puntos)
Una fábrica de materiales de construcción ha descubierto que la producción diaria de ladrillos no defectuosos (en toneladas), *P(x)*, depende de la dureza del material que utiliza, *x*, (en una escala del 0 al 10) de acuerdo con la función:

$$P(x) = -x^3 + 3Ax^2 - 3Bx + 23 \qquad 0 \leq x \leq 10$$

Determinar, justificando la respuesta, las constantes A y B sabiendo que la producción mínima de ladrillos no defectuosos es de 13 toneladas y se alcanza cuando la dureza del material es de 1.

Si la producción mínima de ladrillos no defectuosos es de 13 toneladas y se alcanza cuando la dureza del material es de 1 significa que $P(1) = 13$ y que $P'(1) = 0$.

$$P(1) = 13 \Rightarrow -1^3 + 3A \cdot 1^2 - 3B \cdot 1 + 23 = 13 \Rightarrow 3A - 3B = -9 \Rightarrow \boxed{A - B = -3}$$

$$P(x) = -x^3 + 3Ax^2 - 3Bx + 23 \Rightarrow P'(x) = -3x^2 + 6Ax - 3B$$

$$P'(1) = 0 \Rightarrow -3 \cdot 1^2 + 6A \cdot 1 - 3B = 0 \Rightarrow 6A - 3B = 3 \Rightarrow \boxed{2A - B = 1}$$

Juntamos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{matrix} A - B = -3 \\ 2A - B = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} A = B - 3 \\ 2A - B = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2(B-3) - B = 1 \Rightarrow 2B - 6 - B = 1 \Rightarrow \boxed{B = 7} \Rightarrow \boxed{A = 7 - 3 = 4}$$

Los valores buscados son $A = 4$ y $B = 7$.

PROBLEMA 6 (2 puntos)
Una empresa constructora, tiene que afrontar gastos de suelo y gastos de edificación, (en miles de euros), que dependen de la distancia al centro, x, (en km). Dichos gastos vienen dados, respectivamente, por las funciones:

$$S(x)=10x+100,\ 0\leq x\leq 25, \text{ y } E(x)=-x^2+10x+200,\ 0\leq x\leq 25$$

Determinar, justificando las respuestas:
a) La expresión *G(x)* que indica los gastos totales de la constructora en función de la distancia al centro de la ciudad donde se realice la obra. **(0.5 puntos)**
b) A qué distancias del centro los gastos de construcción son máximos y mínimos, así como el valor de dichos gastos. **(1.5 puntos)**

a) Los gastos totales son la suma de los gastos en suelo y en edificación.

$$G(x)=S(x)+E(x)=10x+100-x^2+10x+200=-x^2+20x+300,\ 0\leq x\leq 25$$

b) Utilizamos la derivada para obtener los puntos críticos de la función.

$$G(x)=-x^2+20x+300 \Rightarrow G'(x)=-2x+20$$

$$G'(x)=0 \Rightarrow -2x+20=0 \Rightarrow 2x=20 \Rightarrow x=10$$

Sustituimos el valor en la segunda derivada.

$$G'(x)=-2x+20 \Rightarrow G''(x)=-2 \Rightarrow G''(10)=-2<0 \rightarrow x=10 \text{ es máximo relativo}$$

Obtenemos el valor de la función en el punto crítico y en los extremos del intervalo de definición para decidir cual es el valor máximo y mínimo absoluto de los gastos.

$$\left.\begin{array}{l} G(0)=-0^2+20\cdot 0+300=300 \\ G(10)=-10^2+20\cdot 10+300=400 \quad \text{¡Máximo!} \\ G(25)=-25^2+20\cdot 25+300=175 \quad \text{¡Mínimo!} \end{array}\right\}$$

Los gastos máximos son 400 000 euros que se producen a una distancia del centro de 10 kilómetros.
Los gastos mínimos son 175 000 euros que se producen a una distancia del centro de 25 kilómetros.

PROBLEMA 7 (2 puntos)
Determinar el área delimitada por la función $f(x)=x^2-6x+8$ y el eje OX entre los valores $x=0$ y $x=5$, representando dicha función y el área que se pide. Razonar las respuestas.

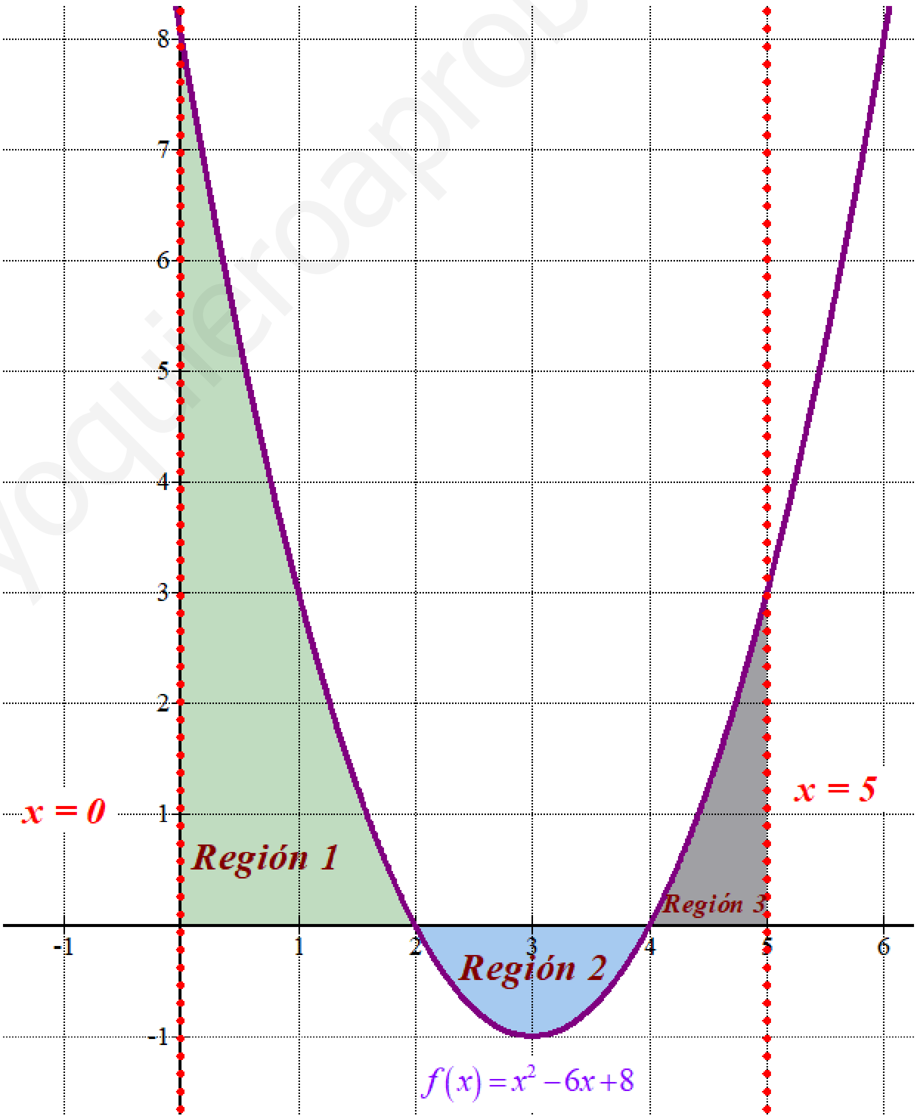
Hallamos los puntos de corte de la gráfica de la parábola con el eje OX.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2-6x+8 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2-6x+8=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4(1)(8)}}{2}=\frac{6\pm 2}{2}=\begin{cases} \frac{6+2}{2}=\boxed{4=x} \\ \frac{6-2}{2}=\boxed{2=x} \end{cases}$$

Dibujamos la gráfica de la parábola y de las dos rectas verticales.

x	$y=x^2-6x+8$
0	8
1	3
2	0
3	−1
4	0
5	3



La región de la que queremos hallar el área la dividimos en tres subregiones coloreadas de distinto color en el dibujo y cuya área calcularemos con tres integrales definidas.

Área de la región 1.

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 x^2 - 6x + 8dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x\right]_0^2 = \left[\frac{2^3}{3} - 3\cdot 2^2 + 8\cdot 2\right] - \left[\frac{0^3}{3} - 3\cdot 0^2 + 8\cdot 0\right] = \frac{20}{3}$$

El área de la región 1 es 20/3 unidades cuadradas.

Área de la región 2.

$$\int_2^4 f(x)\,dx = \int_2^4 x^2 - 6x + 8dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x\right]_2^4 =$$

$$= \left[\frac{4^3}{3} - 3\cdot 4^2 + 8\cdot 4\right] - \left[\frac{2^3}{3} - 3\cdot 2^2 + 8\cdot 2\right] = \frac{64}{3} - 48 + 32 - \frac{8}{3} + 12 - 16 = -\frac{4}{3}$$

El área del trozo 2 es 4/3 unidades cuadradas.

Área de la región 3.

$$\int_4^5 f(x)\,dx = \int_4^5 x^2 - 6x + 8dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x\right]_4^5 =$$

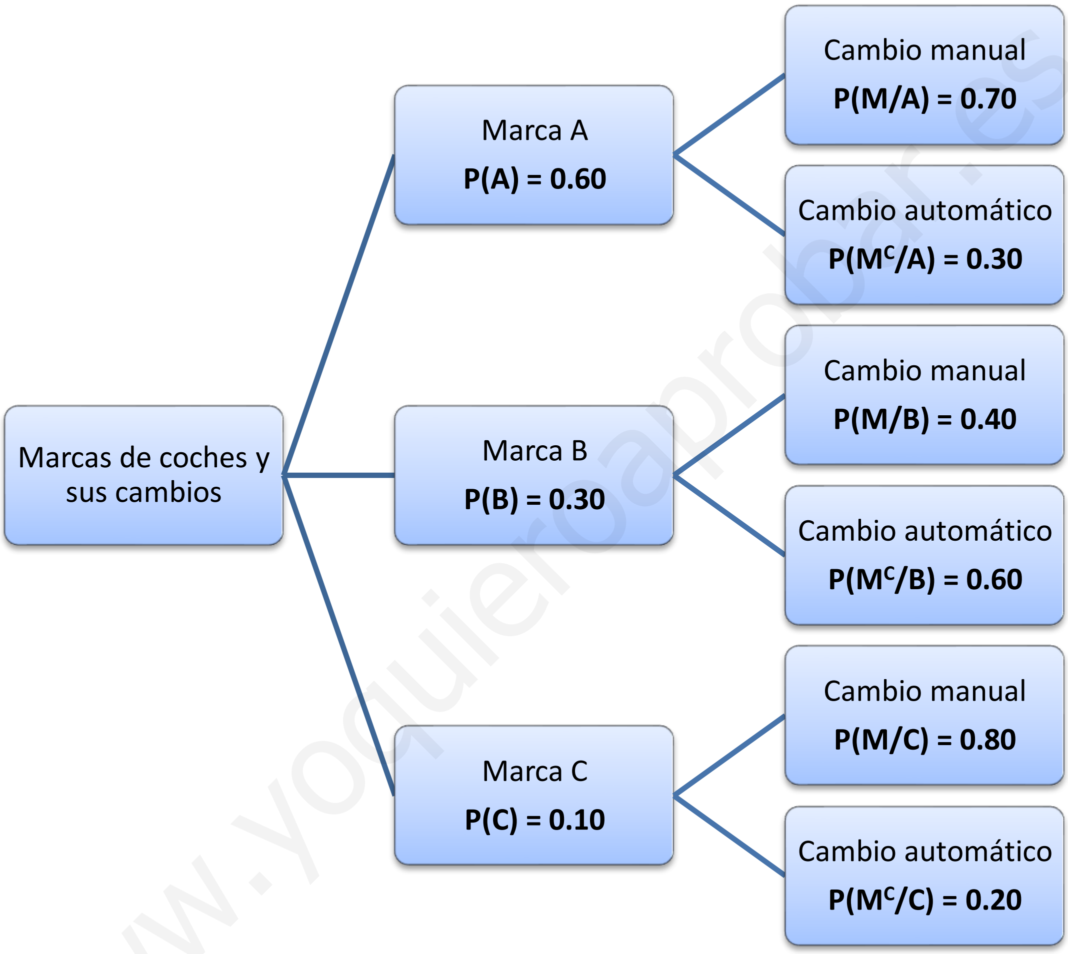
$$= \left[\frac{5^3}{3} - 3\cdot 5^2 + 8\cdot 5\right] - \left[\frac{4^3}{3} - 3\cdot 4^2 + 8\cdot 4\right] = \frac{125}{3} - 75 + 40 - \frac{64}{3} + 48 - 32 = \frac{4}{3}$$

El área de la región 3 es 4/3 unidades cuadradas.

El área total es la suma de las áreas calculadas → $\frac{20}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \boxed{\frac{28}{3} \simeq 9.33\, unidades\, cuadradas}$

PROBLEMA 8 (2 puntos)
Un concesionario trabaja con tres marcas de coches: la marca A representa el 60% de sus ventas, la B el 30% y la C el resto. En un estudio acerca de las preferencias de los clientes sobre el cambio de marchas (manual, automático) se obtiene que el 70% de los coches vendidos de la marca A, el 40% de los de la marca B y el 80% de los de la marca C tienen el cambio manual. Se pide, razonando la respuesta:
a) Calcular la probabilidad de que el concesionario venda un coche con cambio automático. **(1 punto)**
b) Sabiendo que un coche vendido tiene el cambio manual, calcular la probabilidad de que sea de la marca C. **(1 punto)**

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Nos piden calcular $P\left(M^C\right)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P\left(M^C\right)=P(A)P\left(M^C/A\right)+P(B)P\left(M^C/B\right)+P(C)P\left(M^C/C\right)=$$

$$=0.6\cdot 0.3+0.3\cdot 0.6+0.1\cdot 0.2=\boxed{0.38}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/M)=\frac{P(C\cap M)}{P(M)}=\frac{P(C)P(M/C)}{1-P\left(M^C\right)}=\frac{0.1\cdot 0.8}{1-0.38}=\boxed{\frac{4}{31}\simeq 0.129}$$

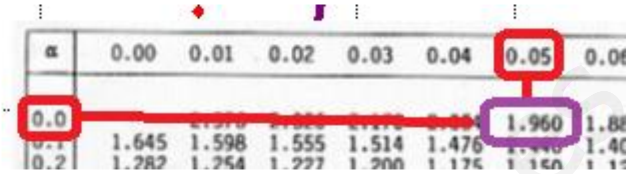
PROBLEMA 9 (2 puntos)
Se realiza un estudio sobre el contenido de cierta sustancia en una marca de refrescos. De 500 latas analizadas, 120 contenían dicha sustancia. Calcular un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 95%, para la proporción de latas de esta marca que contenían la sustancia. Razonar la respuesta.

Sabemos que $n = 500$ y que $p = \frac{120}{500} = 0.24$.

Hallamos $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 95%.

$1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05$

$\rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$



Calculamos el error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.24 \cdot 0.76}{500}} = 0.037$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(p - Error,\ p + Error\right) = (0.24 - 0.037,\ 0.24 + 0.037) = (0.203,\ 0.277).$$

Con un nivel de confianza del 95 % el porcentaje de latas con la sustancia estará entre 20.3 % y 27.7 % .

PROBLEMA 10 (2 puntos)
Se pretende realizar un estudio sobre el contenido en alcohol de las cervezas, variable que sigue una distribución normal con desviación típica 1.5 grados. ¿Qué cantidad de cervezas habrá que analizar como mínimo si queremos obtener un intervalo de confianza para el contenido medio de alcohol, con un nivel de confianza del 99% y una longitud no superior a 1 grado? Razonar la respuesta.

Sea X = El contenido en alcohol de las cervezas.

X = N(μ, 1.5)

Para un nivel de confianza del 99% hallamos $z_{\alpha/2}$.

1– ∝ = 0,99 → ∝ = 0,01 →

→ $z_{\alpha/2}$ **= 2,576**

α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0		2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.1	1.645	[illegible]	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690

El error del intervalo de confianza es la mitad de la longitud del intervalo, por lo que debe ser menor de 1/2.

$$\left.\begin{array}{l} Error = z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ \\ Error = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow 0.5 = 2,576\cdot\frac{1.5}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.5\sqrt{n} = 2.576\cdot 1.5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2.576\cdot 1.5}{0.5} \Rightarrow n = \left(\frac{2.576\cdot 1.5}{0.5}\right)^2 \simeq 59.7$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser un número entero superior al obtenido.
El tamaño mínimo de la muestra es de 60 cervezas.