Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)

Universidad de Extremadura

Curso 2022-2023

Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN

El examen consta de 10 problemas, cuyo valor máximo es de 2 puntos cada uno. El estudiante ha de elegir 5 problemas. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen sólo se tendrán en cuenta los cinco primeros problemas resueltos. Si se desea que alguno de ellos no sea tenido en cuenta, el estudiante ha de tacharlo y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de los cuatro primeros problemas sin tachar, se corregiría el que ocupe el sexto lugar.

PROBLEMA 1 (2 puntos)

Calcular, justificando la respuesta, las matrices X e Y que verifican el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\begin{cases} 2X+3Y=\begin{pmatrix} 2 & 13 \\ 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ 3X-Y=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -13 & 1 \\ -14 & -4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

PROBLEMA 2 (2 puntos)

Sea A la matriz siguiente:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & x & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & x \end{pmatrix}$$

Se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar para qué valores de x existe la inversa de A. **(1 punto)**

b) Para $x=1$, calcular la matriz X tal que $X\cdot A=I+A$, siendo I la matriz identidad de orden 3. **(1 punto)**

PROBLEMA 3 (2 puntos)

Un hotel cuenta con tres tipos de habitaciones: sencillas (1 cama), dobles (2 camas) y triples (3 camas). El número de habitaciones es de 195. El número de camas en habitaciones sencillas y dobles es de 300. Además, el número de habitaciones dobles es 2 veces el número conjunto de las sencillas y las triples. Calcular, justificando la respuesta, el número de habitaciones de cada tipo que hay en el hotel.

PROBLEMA 4 (2 puntos)

Una empresa de compra y venta de vehículos usados compra coches y motocicletas, obteniendo un beneficio de 500 euros por cada coche y 400 euros por cada motocicleta al, posteriormente, venderlos. Se sabe que dispone de 300000 euros para comprar vehículos al precio de 3000 euros cada coche y 2000 euros cada motocicleta y que, por limitaciones de espacio, no puede comprar más de 125 vehículos. Calcular, justificando las respuestas, el número de coches y motocicletas que debe comprar para hacer máximos los beneficios y el valor de dichos beneficios máximos.

PROBLEMA 5 (2 puntos)

Los ingresos, *I(t)*, y los gastos, *G(t)*, en euros, de una tienda de paquetería que está abierta desde las 9 hasta las 14 horas depende de la hora del día, según las siguientes expresiones:

$$I(t) = t^2 + At \qquad 9 \le t \le 14 \qquad y \qquad G(t) = 3At - \left(A^2 + B\right) \; 9 \le t \le 14$$

a) Calcular la función *B(t)* que relaciona los beneficios obtenidos con la hora del día. **(0.5 puntos)**

b) Sabiendo que a las 12 horas se obtiene el beneficio mínimo de 150 euros, determinar, justificando la respuesta, las constantes A y B. **(1.5 puntos)**

PROBLEMA 6 (2 puntos)

El valor (en euros) de cada acción de una determinada empresa del IBEX-35, V(t), durante las 8 horas de duración de la sesión bursátil, depende del tiempo, *t*, (en horas) que ha transcurrido desde que se inició dicha sesión, según la función:

$$V(t) = 60 + 84t - 27t^2 + 2t^3 \quad 0 \le t \le 8$$

Se pide, razonando las respuestas:

a) Determinar los intervalos de tiempo a lo largo de la sesión bursátil en que el valor de la acción se ha incrementado y los intervalos en que el valor de la acción ha disminuido. **(1.25 puntos)**

b) Establecer los valores inicial y final de la acción y representar gráficamente la evolución del valor de la acción a lo largo de la sesión bursátil. **(0.75 puntos)**

PROBLEMA 7 (2 puntos)

Determinar el área delimitada por la función $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ y el eje OX entre los valores $x = 0$ y $x = 4$, representando dicha función y el área que se pide. Razona las respuestas.

PROBLEMA 8 (2 puntos)

Cierto programa de televisión predice lluvia el 20% de los días. Si se sabe que el programa ha predicho lluvia, la probabilidad de que realmente llueva es de 0.9. Se pide, justificando las respuestas:

a) Calcular la probabilidad de que el programa prediga lluvia y realmente llueva. **(1 punto)**

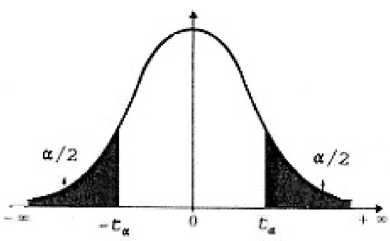
b) Si se sabe que el 15% de los días llueve, calcular la probabilidad de que o bien el programa prediga lluvia o bien realmente llueva. **(1 punto)**

PROBLEMA 9 (2 puntos)

El tiempo que se emplea en montar un determinado producto en una fábrica se distribuye de acuerdo con una distribución normal con desviación típica 10 minutos. Se cronometra el montaje de 49 productos, resultando un tiempo medio de 45 minutos. Hallar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 90%, para el tiempo medio de montaje de dicho producto. Razonar la respuesta.

PROBLEMA 10 (2 puntos)

Se quiere realizar un estudio sobre la proporción de clubes de fútbol en situación de bancarrota. Como dicha proporción es desconocida, asumimos de principio un valor P = 0.5. Se pide determinar el número mínimo de clubes que hay que examinar si deseamos calcular un intervalo de confianza para dicha proporción con un nivel confianza del 95% y cuya longitud sea inferior a 0.1. Razonar la respuesta.



α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	∞	2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.1	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690

SOLUCIONES

PROBLEMA 1 (2 puntos)

Calcular, justificando la respuesta, las matrices X e Y que verifican el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\begin{cases} 2X+3Y=\begin{pmatrix} 2 & 13 \\ 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ 3X-Y=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -13 & 1 \\ -14 & -4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2X+3Y=\begin{pmatrix} 2 & 13 \\ 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ 3X-Y=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -13 & 1 \\ -14 & -4 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} *(-3) \to -6X-9Y=\begin{pmatrix} -6 & -39 \\ -18 & 9 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \\ *(2) \quad \to 6X-2Y=\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -26 & 2 \\ -28 & -8 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \{\text{Sumamos las ecuaciones}\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -11Y=\begin{pmatrix} -6 & -39 \\ -18 & 9 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -26 & 2 \\ -28 & -8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -33 \\ -44 & 11 \\ -22 & -11 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{Y=\frac{-1}{11}\begin{pmatrix} 0 & -33 \\ -44 & 11 \\ -22 & -11 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3X-\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -13 & 1 \\ -14 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow 3X=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -13 & 1 \\ -14 & -4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -9 & 0 \\ -12 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{X=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -9 & 0 \\ -12 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}}$$

PROBLEMA 2 (2 puntos)
Sea A la matriz siguiente:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & x & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & x \end{pmatrix}$$

Se pide, justificando las respuestas:
a) Determinar para qué valores de *x* existe la inversa de A. **(1 punto)**
b) Para *x=1*, calcular la matriz *X* tal que *X·A=I+A*, siendo *I* la matriz identidad de orden 3. **(1 punto)**

a) La inversa de la matriz A existe si su determinante es no nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & x & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & x \end{vmatrix}=-4x-4+4-4x^2=-4x^2-4x$$

$$|A|=0 \Rightarrow -4x^2-4x=0 \Rightarrow -4x(x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x+1=0 \rightarrow x=-1 \end{cases}$$

La inversa de A existe para cualquier valor de *x* distinto de 0 y –1.

b) Para *x=1* existe la inversa de A. La matriz queda $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Despejamos X de la ecuación $X\cdot A=I+A$.

$$X\cdot A=I+A \Rightarrow X=(I+A)A^{-1}=A^{-1}+AA^{-1}=A^{-1}+I$$

Hallamos la inversa de A y determinamos la expresión de X.

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-4-4+4-4=-8\neq 0$$

$$A^{1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{-8}=\frac{1}{-8}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{-1}{8}\begin{pmatrix}-2 & -2 & 2\\ -4 & 0 & 4\\ 0 & 4 & -8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/4 & 1/4 & -1/4\\ 1/2 & 0 & -1/2\\ 0 & -1/2 & 1\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}+I=\begin{pmatrix}1/4 & 1/4 & -1/4\\ 1/2 & 0 & -1/2\\ 0 & -1/2 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \boxed{X=\begin{pmatrix}5/4 & 1/4 & -1/4\\ 1/2 & 1 & -1/2\\ 0 & -1/2 & 2\end{pmatrix}}$$

PROBLEMA 3 (2 puntos)
Un hotel cuenta con tres tipos de habitaciones: sencillas (1 cama), dobles (2 camas) y triples (3 camas). El número de habitaciones es de 195. El número de camas en habitaciones sencillas y dobles es de 300. Además, el número de habitaciones dobles es 2 veces el número conjunto de las sencillas y las triples. Calcular, justificando la respuesta, el número de habitaciones de cada tipo que hay en el hotel.

Llamamos "x" al número de habitaciones sencillas, "y" al número de habitaciones dobles y "z" al número de habitaciones triples,

"*El número de habitaciones es de 195*" → $x+y+z=195$

"*El número de camas en habitaciones sencillas y dobles es de 300*" → $x+2y=300$

"*El número de habitaciones dobles es 2 veces el número conjunto de las sencillas y las triples*" → $y=2(x+z)$

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=195 \\ x+2y=300 \\ y=2(x+z) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=195 \\ x+2y=300 \\ y=2x+2z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2x+2z+z=195 \\ x+2(2x+2z)=300 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x+3z=195 \\ x+4x+4z=300 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+z=65 \\ 5x+4z=300 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=65-z \\ 5x+4z=300 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5(65-z)+4z=300 \Rightarrow 325-5z+4z=300 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -z=-25 \Rightarrow \boxed{z=25} \Rightarrow \boxed{x=65-25=40} \Rightarrow \boxed{y=2\cdot 40+2\cdot 25=130}$$

El hotel cuenta con 40 habitaciones sencillas, 130 dobles y 25 triples.

PROBLEMA 4 (2 puntos)
Una empresa de compra y venta de vehículos usados compra coches y motocicletas, obteniendo un beneficio de 500 euros por cada coche y 400 euros por cada motocicleta al, posteriormente, venderlos. Se sabe que dispone de 300000 euros para comprar vehículos al precio de 3000 euros cada coche y 2000 euros cada motocicleta y que, por limitaciones de espacio, no puede comprar más de 125 vehículos. Calcular, justificando las respuestas, el número de coches y motocicletas que debe comprar para hacer máximos los beneficios y el valor de dichos beneficios máximos.

Llamamos "x" al número de coches que compra e "y" al número de motocicletas.

"Obteniendo un beneficio de 500 euros por cada coche y 400 euros por cada motocicleta" → El beneficio es $B(x,y)=500x+400y$.

Las restricciones son:

"Dispone de 300000 euros para comprar vehículos al precio de 3000 euros cada coche y 2000 euros cada motocicleta" → $3000x+2000y\le 300000$.

"No puede comprar más de 125 vehículos" → $x+y\le 125$

Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\ y\ge 0$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} 3000x+2000y\le 300000 \\ x+y\le 125 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x+2y\le 300 \\ y\le 125-x \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2y\le 300-3x \\ y\le 125-x \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$2y=300-3x$

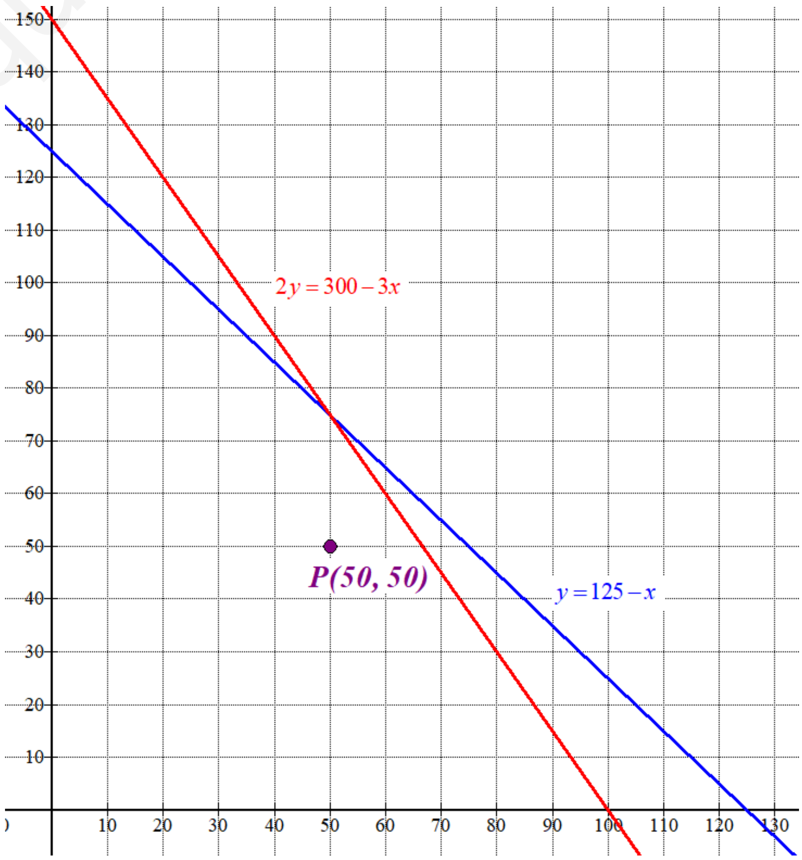
x	$y=\frac{300-3x}{2}$
0	150
100	0

$y=125-x$

x	$y=125-x$
0	125
125	0

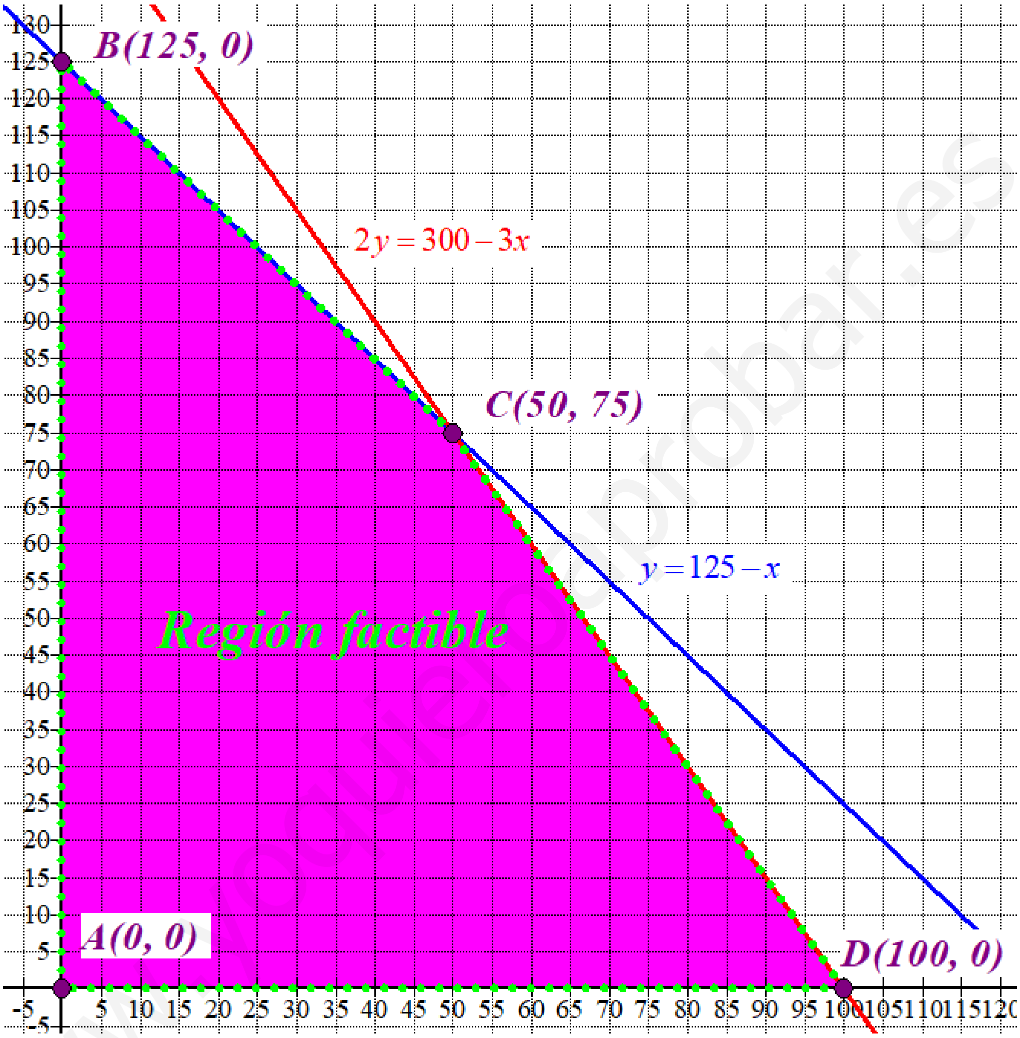
$x\ge 0;\ y\ge 0$

Primer cuadrante



Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 2y \leq 300-3x \\ y \leq 125-x \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de las rectas roja y azul.

Coloreamos de rosa la región factible e indicamos las coordenadas de sus vértices.



El valor máximo de la función Beneficios $B(x, y) = 500x + 400y$ está situado en uno de sus vértices, averiguamos en cual valorando la función en cada uno de ellos.

A(0, 0) → $B(0,0) = 0$

B(0, 125) → $B(0,125) = 0 + 400 \cdot 125 = 50000$

C(50, 75) → $B(50,75) = 500 \cdot 50 + 400 \cdot 75 = 55000$ ¡Máximo!

D(100, 0) → $B(100,0) = 50000$

El valor máximo es 55000 y se obtiene en el vértice C(50, 75).

El beneficio máximo se obtiene comprando y vendiendo 50 coches y 75 motocicletas. Siendo 55000 € los beneficios máximos que se pueden obtener.

PROBLEMA 5 (2 puntos)
Los ingresos, *I(t)*, y los gastos, *G(t)*, en euros, de una tienda de paquetería que está abierta desde las 9 hasta las 14 horas depende de la hora del día, según las siguientes expresiones:

$$I(t)=t^2+At \qquad 9\le t\le 14 \qquad y \qquad G(t)=3At-\left(A^2+B\right) \qquad 9\le t\le 14$$

a) Calcular la función *B(t)* que relaciona los beneficios obtenidos con la hora del día. **(0.5 puntos)**
b) Sabiendo que a las 12 horas se obtiene el beneficio mínimo de 150 euros, determinar, justificando la respuesta, las constantes A y B. **(1.5 puntos)**

a) Los beneficios es la diferencia entre los ingresos y los gastos.

$$B(t)=I(t)-G(t)=t^2+At-\left(3At-\left(A^2+B\right)\right)=t^2+At-3At+\left(A^2+B\right)$$

$$B(t)=t^2-2At+A^2+B \qquad 9\le t\le 14$$

b) Si a las 12 horas se obtiene el beneficio mínimo de 150 euros se cumplen dos cosas:

Primera. El beneficio a las 12 horas vale 150 → $B(12)=150$ →

$$B(12)=150=12^2-2A\cdot 12+A^2+B\Rightarrow 6=-24A+A^2+B$$

Segunda. Al ser un mínimo la derivada primera debe anularse → $B\,'(12)=0$ →

$$\left.\begin{array}{l} B'(t)=2t-2A \\ B'(12)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow 0=2\cdot 12-2A\Rightarrow 2A=24\Rightarrow \boxed{A=12}$$

Sustituimos el valor de A en la primera ecuación obtenida y obtendremos B.

$$\left.\begin{array}{l} 6=-24A+A^2+B \\ A=12 \end{array}\right\}\Rightarrow 6=-24\cdot 12+12^2+B\Rightarrow 6=-288+144+B\Rightarrow \boxed{B=150}$$

PROBLEMA 6 (2 puntos)
El valor (en euros) de cada acción de una determinada empresa del IBEX-35, V(t), durante las 8 horas de duración de la sesión bursátil, depende del tiempo, *t*, (en horas) que ha transcurrido desde que se inició dicha sesión, según la función:

$$V(t)=60+84t-27t^2+2t^3 \quad 0\le t\le 8$$

Se pide, razonando las respuestas:

a) Determinar los intervalos de tiempo a lo largo de la sesión bursátil en que el valor de la acción se ha incrementado y los intervalos en que el valor de la acción ha disminuido. **(1.25 puntos)**

b) Establecer los valores inicial y final de la acción y representar gráficamente la evolución del valor de la acción a lo largo de la sesión bursátil. **(0.75 puntos)**

a) Usamos la derivada para encontrar los puntos críticos de la función.

$$\left.\begin{matrix} V'(t)=84-54t+6t^2 \\ V'(t)=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 84-54t+6t^2=0 \Rightarrow 14-9t+t^2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t=\frac{9\pm\sqrt{(-9)^2-4(1)(14)}}{2}=\frac{9\pm 5}{2}=\begin{cases} \dfrac{9+5}{2}=7=t \\ \dfrac{9-5}{2}=2=t \end{cases}$$

Estudiamos el cambio de signo de la función antes, entre y después de estos valores.

En el intervalo $(0,2)$ tomamos *t = 1* y la derivada vale $V'(1)=84-54+6\cdot 1^2=36>0$. La función crece en $(0,2)$.

En el intervalo $(2,7)$ tomamos *t = 3* y la derivada vale $V'(3)=84-54\cdot 3+6\cdot 3^2=-24<0$. La función decrece en $(2,7)$.

En el intervalo $(7,8)$ tomamos *t = 7.5* y la derivada vale $V'(7.5)=84-54\cdot 7.5+6\cdot 7.5^2=16.5>0$. La función crece en $(7,8)$.

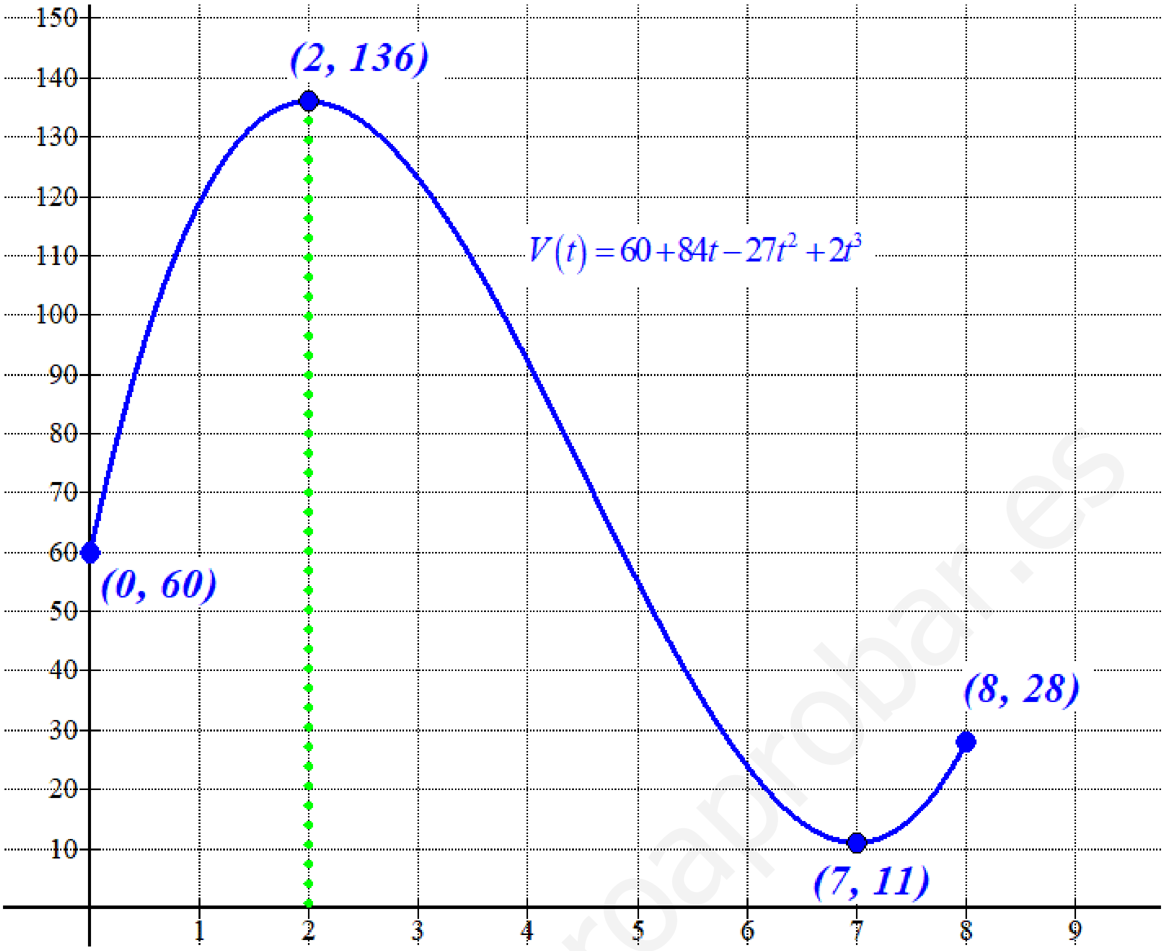
El valor de cada acción se incrementa desde la hora 0 a la hora 2 y también entre la 7ª y la 8ª hora. Disminuye entre la 2ª y la 7ª hora.

b) Hallamos V0) y V(8).

$$V(0)=60;\ V(8)=60+84\cdot 8-27\cdot 8^2+2\cdot 8^3=28$$

Para la representación gráfica obtenemos más valores de la función.

t	$V(t)$
0	60
2	136 Máximo
7	11 Mínimo
8	28

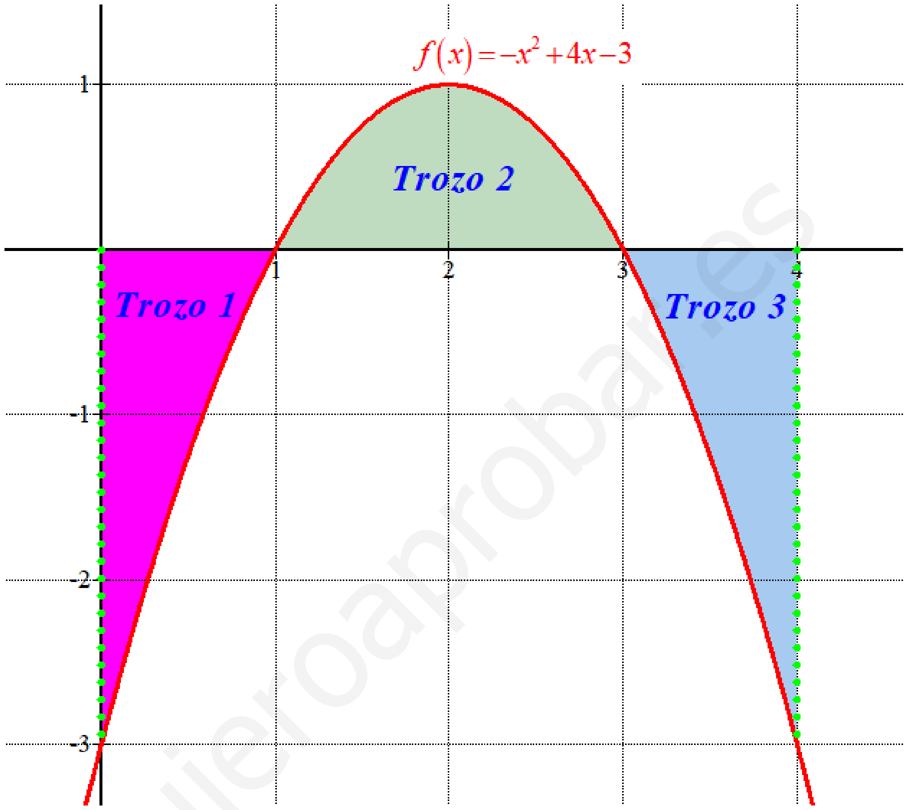


150
140
130
120
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
1
2
3
4
5
6
7
8
9
(2, 136)
(0, 60)
(8, 28)
(7, 11)
$V(t)=60+84t-27t^2+2t^3$

PROBLEMA 7 (2 puntos)
Determinar el área delimitada por la función $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ y el eje OX entre los valores $x = 0$ y $x = 4$, representando dicha función y el área que se pide. Razona las respuestas.

Dibujamos la gráfica de la parábola y de las dos rectas verticales.

x	$y = -x^2 + 4x - 3$
0	-3
1	0
2	1
3	0
4	-3



Área de trozo 1.

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 -x^2 + 4x - 3dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x\right]_0^1 = \left[-\frac{1^3}{3} + 2\cdot 1^2 - 3\cdot 1\right] - \left[-\frac{0^3}{3} + 2\cdot 0^2 - 3\cdot 0\right] = -\frac{4}{3}$$

El área del trozo 1 es 4/3 unidades cuadradas.

Área de trozo 2.

$$\int_1^3 f(x)dx = \int_1^3 -x^2 + 4x - 3dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x\right]_1^3 = \left[-\frac{3^3}{3} + 2\cdot 3^2 - 3\cdot 3\right] - \left[-\frac{1^3}{3} + 2\cdot 1^2 - 3\cdot 1\right] = \frac{4}{3}$$

El área del trozo 2 es 4/3 unidades cuadradas.

Área de trozo 3.
Por la simetría de la región el trozo 1 y el trozo 3 tienen el mismo valor de área.

El área total es la suma de las tres áreas calculadas → $\frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \boxed{4\,unidades\,cuadradas}$

PROBLEMA 8 (2 puntos)
Cierto programa de televisión predice lluvia el 20% de los días. Si se sabe que el programa ha predicho lluvia, la probabilidad de que realmente llueva es de 0.9. Se pide, justificando las respuestas:
a) Calcular la probabilidad de que el programa prediga lluvia y realmente llueva. **(1 punto)**
b) Si se sabe que el 15% de los días llueve, calcular la probabilidad de que o bien el programa prediga lluvia o bien realmente llueva. **(1 punto)**

Llamamos A al suceso "Predice lluvia" y B al suceso "Realmente llueve".

Sabemos que $P(A)=0.20$ y $P(B/A)=0.9$.

a) Nos piden calcular $P(A\cap B)$.

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \Rightarrow 0.9=\frac{P(A\cap B)}{0.2} \Rightarrow \boxed{P(A\cap B)=0.9\cdot 0.2=0.18}$$

b) Se sabe que $P(B)=0.15$. Nos piden calcular $P(A\cup B)$.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.2+0.15-0.18=\boxed{0.17}$$

PROBLEMA 9 (2 puntos)
El tiempo que se emplea en montar un determinado producto en una fábrica se distribuye de acuerdo con una distribución normal con desviación típica 10 minutos. Se cronometra el montaje de 49 productos, resultando un tiempo medio de 45 minutos. Hallar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 90%, para el tiempo medio de montaje de dicho producto. Razonar la respuesta.

Sea X = El tiempo que se emplea en montar un determinado producto.

X = N(μ, 10)

El tamaño de la muestra es $n = 49$ y la media de la muestra es $\overline{x} = 45$ minutos

El nivel de confianza del 90% significa que

$$1 - \alpha = 0{,}90 \rightarrow \alpha = 0{,}10 \rightarrow \alpha/2 = 0'05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}95 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}645}$$

Calculamos el error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}645 \cdot \frac{10}{\sqrt{49}} \simeq 2.35 \text{ minutos}$$

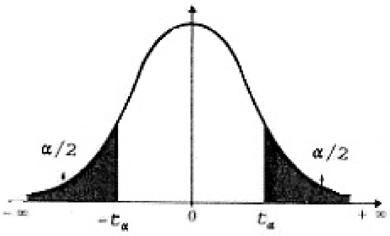
El intervalo de confianza es:

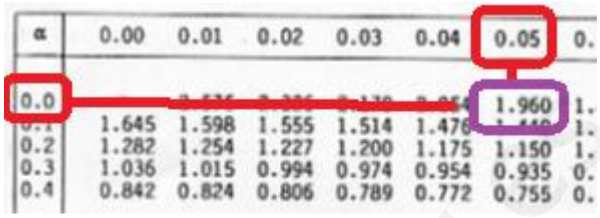
$$\left(\overline{x} - Error,\ \overline{x} + Error\right) = \left(45 - 2.35,\ 45 + 2.35\right) = \left(42.65,\ 47.35\right).$$

Con un nivel de confianza del 90 % el tiempo medio que se tara en montar un determinado producto está entre 42.65 y 47.35 minutos.

PROBLEMA 10 (2 puntos)
Se quiere realizar un estudio sobre la proporción de clubes de fútbol en situación de bancarrota. Como dicha proporción es desconocida, asumimos de principio un valor P = 0.5. Se pide determinar el número mínimo de clubes que hay que examinar si deseamos calcular un intervalo de confianza para dicha proporción con un nivel confianza del 95% y cuya longitud sea inferior a 0.1. Razonar la respuesta.

El nivel de confianza del 95% significa que $1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow$





α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.
0.0	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1.960	1.
0.1	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	[illegible]	1.
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.

Tenemos que $z_{\alpha/2}$ **= 1.96**

Como piden que la longitud del intervalo de confianza sea inferior a 0.1 y el error es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza tenemos que el error debe ser inferior a 0.05.

Utilizamos la fórmula del error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{P \cdot Q}{n}} \Rightarrow 0.05 = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{n}} \Rightarrow \frac{0.05}{1.96} = \sqrt{\frac{0.25}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{0.05}{1.96}\right)^2 = \frac{0.25}{n} \Rightarrow \boxed{n = \frac{0.25}{\left(\frac{0.05}{1.96}\right)^2} \simeq 384.16}$$

Como el tamaño de la muestra debe ser entero y mayor que el obtenido tenemos que el tamaño mínimo de la muestra es de 385 clubes de fútbol.