Evaluación para el Acceso a la Universidad. Convocatoria de 2023
Materia: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**
El examen está compuesto de tres secciones de dos bloques cada una. A su vez cada bloque tiene dos ejercicios. El alumno deberá elegir un bloque de cada una de las tres secciones. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Es necesario detallar el proceso de resolución de los ejercicios.

Sección 1 (3 puntos) Bloque 1

1. En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función $f(x,\ y) = -x - 5y + 10$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x - y \geq 0 \\ -4 \leq x \leq 4 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

a) Dibuja la región factible y determina sus vértices. (1.25 puntos)
b) Indica los puntos óptimos (máximo y mínimo) y sus respectivos valores. (0.25 puntos)

2. La discografía de un legendario grupo de rock se reedita en tres discos (I, II y III) y las ventas totales ascienden a 70000 unidades. Sabemos que del disco III se vendieron las mismas unidades que entre los otros dos discos juntos y que la diferencia entre las unidades vendidas del III y las del II equivalen al triple de la diferencia entre las unidades vendidas del II y las del I.
a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular qué cantidad de unidades de cada disco se vendieron. (0.75 puntos)
b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

Bloque 2

1. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + tx - 1 & si \ \ x \leq 1 \\ x + t & si \ \ x > 1 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = 1$? (0.5 puntos)
b) Para $t = 2$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(-\infty, 1)$. (0.5 puntos)
c) Para $t = 2$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(-\infty, 1)$. (0.5 puntos)

2. La función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ tiene un punto de inflexión en (2, –5) y la pendiente de la recta tangente en ese mismo punto es –12. Calcula razonadamente los valores de los parámetros a, b, y c. (1.5 puntos)

Sección 2 (3.5 puntos) Bloque 1

3. En un determinado instituto el 50% de los estudiantes prefiere como red social Facebook, pero un 30% de estos no publica habitualmente nada. El 35% prefiere Instagram, pero solo el 30% de los que prefieren esta plataforma hacen publicaciones habitualmente. Finalmente, el resto de los estudiantes prefiere TikTok y un 60% de estos no publica habitualmente.
a) Elegido un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no publique habitualmente nada en su red social preferida? (0.75 puntos)
b) Si se sabe que un estudiante publica habitualmente, ¿cuál es la probabilidad de que su red social preferida sea Instagram? (0.75 puntos)

4. Una asociación benéfica ha tomado una muestra de 9 personas y ha registrado las cantidades donadas por estas personas, obteniendo 60, 40, 55, 35, 20, 25, 50, 45 y 30 euros. Si el dinero donado sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 100$ euros^2,

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del dinero donado con un nivel de confianza del 97%: (1 punto)

b) Calcula el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 2 euros. (1 punto)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Bloque 2

3. Un teatro ha vendido las 660 entradas disponibles que tenía para un espectáculo. El número de entradas que se han vendido para jubilados es la cuarta parte de las entradas que se han vendido para adultos. Además, las entradas para niños equivalen al 10% de las que se han vendido entre adultos y jubilados.

a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular cómo se han repartido las entradas entre adultos, jubilados y niños. (0.75 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

4. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$,

a) Calcula $A \cdot B \cdot C^T$ (0.75 puntos)

b) Calcula $\frac{1}{3}B^2 - I$, donde I es la matriz identidad de orden 3. (0.75 puntos)

c) Razona si se puede calcular $(A-B)-C$ y $B \cdot C$ (No es necesario realizar las operaciones). (0.5 puntos)

Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1

5. De los 80 estudiantes solicitantes de una beca Erasmus en Italia, 50 son mujeres. Se seleccionan al azar y sin reposición a 3 estudiantes que serán los que disfruten de la beca Erasmus en ese destino. Calcular la probabilidad de que:

a) Los tres seleccionados sean mujeres. (0.5 puntos)

b) Los tres seleccionados sean del mismo sexo. (0.5 puntos)

c) Al menos dos de los seleccionados sean hombres. (0.5 puntos)

6. Un fabricante de motores para coches de Fórmula 1 ha tomado una muestra aleatoria de 81 motores para examinar su peso, proporcionando una media de 153 kg. Si se sabe que el peso de los motores sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 30$ kg,

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del peso de los motores con un nivel de confianza del 95%: (1 punto)

b) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 100 y un nivel de confianza del 93.12 %? (0.5 puntos)

c) El fabricante afirma que el peso medio de los motores es de 145 kg. ¿Se puede aceptar la afirmación del fabricante con un nivel de confianza del 92 %? Justificar la respuesta. (0.5 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Bloque 2

5. Se considera la función $f(x)=\begin{cases} -(x+t)^2+2 & si\ x\leq -2 \\ t-2 & si\ -2<x\leq 2 \\ x^2-(t+3)x+9 & si\ x>2 \end{cases}$

a) ¿Existe un valor de t para el que la función $f(x)$ es continua en $x = -2$ y en $x = 2$? (0.75 puntos)
b) Representa gráficamente la función $f(x)$ para $t = 3$. (0.75 puntos)

6. La altura, medida en metros, que alcanza una pelota lanzada verticalmente hacia arriba viene expresada en función del tiempo por $H(x)=20x-2x^2$ con x = tiempo en segundos y $0\leq x\leq 10$.

a) ¿Qué altura habrá alcanzado la pelota a los 3 segundos? (0.5 puntos)
b) ¿En qué momentos la pelota se encuentra a 32 metros de altura? (0.5 puntos)
c) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota? ¿En qué momento? (1 punto)

SOLUCIONES

Sección 1 (3 puntos) Bloque 1

1. En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función $f(x, y) = -x - 5y + 10$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x - y \geq 0 \\ -4 \leq x \leq 4 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

a) Dibuja la región factible y determina sus vértices. (1.25 puntos)
b) Indica los puntos óptimos (máximo y mínimo) y sus respectivos valores. (0.25 puntos)

a) Representamos las rectas que delimitan la región del plano que cumple las restricciones (Región factible).

$x - y = 0$

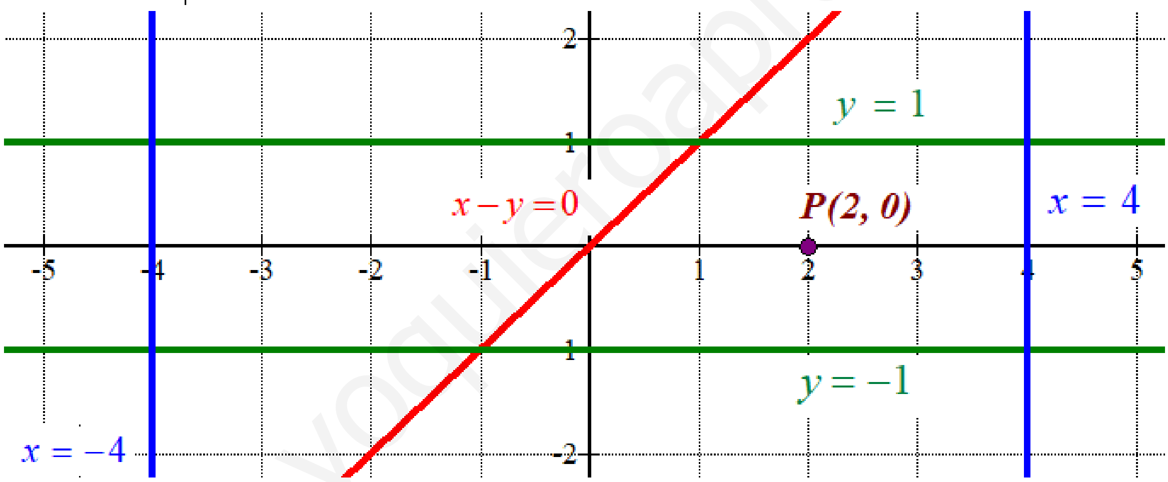
x	$y = x$
0	0
4	4

$y = -1$: Recta horizontal

$y = 1$: Recta horizontal

$x = -4$: Recta vertical

$x = 4$: Recta vertical

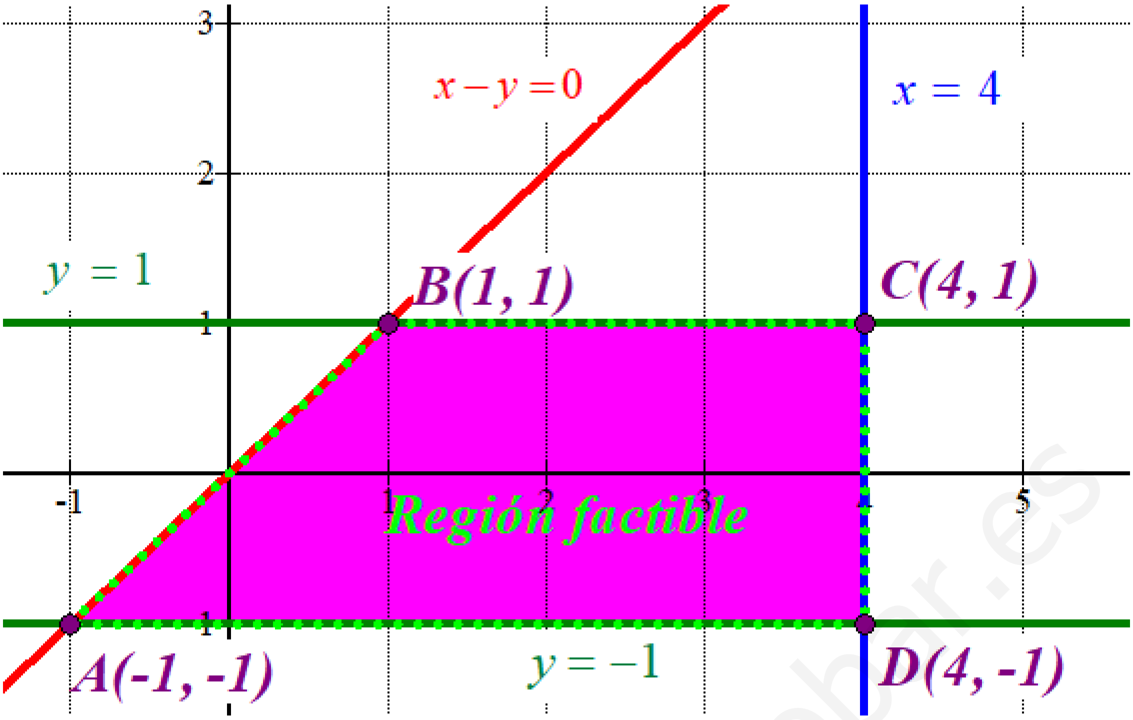


Como las restricciones son $\begin{cases} x \geq y \\ -4 \leq x \leq 4 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$ la región factible es la zona del plano situada entre las rectas horizontales verdes, entre las rectas verticales azules y por debajo de la recta roja.

Comprobamos si el punto P(2, 0) perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\begin{cases} 2 \geq 0 \\ -4 \leq 2 \leq 4 \\ -1 \leq 0 \leq 1 \end{cases} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

La región factible es la zona de color rosa del dibujo inferior.



b) Valoramos la función en cada vértice de la región factible.

A(–1, –1) → $f(-1,-1) = 1+5+10 = 16$ ¡Máximo!

B(1, 1) → $f(1,1) = -1-5+10 = 4$

C(4, 1) → $f(4,1) = -4-5+10 = 1$ ¡Mínimo!

D(4, –1) → $f(4,-1) = -4+5+10 = 11$

El máximo se alcanza en el vértice A(–1, –1) con un valor de 16.
El mínimo se alcanza en el vértice C(4, 1) con un valor de 1.

2. La discografía de un legendario grupo de rock se reedita en tres discos (I, II y III) y las ventas totales ascienden a 70000 unidades. Sabemos que del disco III se vendieron las mismas unidades que entre los otros dos discos juntos y que la diferencia entre las unidades vendidas del III y las del II equivalen al triple de la diferencia entre las unidades vendidas del II y las del I.
a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular qué cantidad de unidades de cada disco se vendieron. (0.75 puntos)
b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

a) Llamamos "x" al número de discos vendidos del tipo I, "y" al de discos tipo II y "z" al número de discos vendidos del tipo III.

"*Las ventas totales ascienden a 70000 unidades*" → $x+y+z=70000$

"*Del disco III se vendieron las mismas unidades que entre los otros dos discos juntos*" → $z=x+y$

"*La diferencia entre las unidades vendidas del III y las del II equivalen al triple de la diferencia entre las unidades vendidas del II y las del I*" → $z-y=3(y-x)$

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=70000 \\ z=x+y \\ z-y=3(y-x) \end{array}\right\}$$

b) Resolvemos el sistema.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=70000 \\ z=x+y \\ z-y=3(y-x) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+x+y=70000 \\ x+y-y=3(y-x) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+2y=70000 \\ x=3y-3x \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=35000 \\ 4x=3y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=35000-y \\ 4x=3y \end{array}\right\} \Rightarrow 4(35000-y)=3y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 140000-4y=3y \Rightarrow 7y=140000 \Rightarrow \boxed{y=\frac{140000}{7}=20000} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=350000-20000=15000} \Rightarrow \boxed{z=20000+15000=35000}$$

Se vendieron 15.000 discos del tipo I, 20.000 del tipo II y 35.000 del tipo III.

Bloque 2

1. Se considera la función $f(x)=\begin{cases} 2x^2+tx-1 & si \ \ x\le 1 \\ x+t & si \ \ x>1 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de *t* la función *f(x)* es continua en *x = 1*? (0.5 puntos)
b) Para *t = 2*, calcula los extremos relativos de la función *f(x)* en el intervalo (–∞, 1). (0.5 puntos)
c) Para *t = 2*, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f(x)* en (–∞, 1). (0.5 puntos)

a) Para que sea continua en $x=1$ deben de coincidir los limites laterales y el valor de la función en $x=1$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 2\cdot 1^2+t\cdot 1-1=1+t \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} x+t=1+t \\ f(1)=1+t \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)=1+t$$

La función es continua para cualquier valor de *t*.

b) Para *t = 2* la función queda $f(x)=\begin{cases} 2x^2+2x-1 & si \ \ x\le 1 \\ x+2 & si \ \ x>1 \end{cases}$.

En el intervalo (–∞, 1) la función es $f(x)=2x^2+2x-1$

Averiguamos cuando se anula la derivada de la función.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=4x+2 \\ f'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 4x+2=0 \Rightarrow 4x=-2 \Rightarrow x=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}\in(-\infty,1)$$

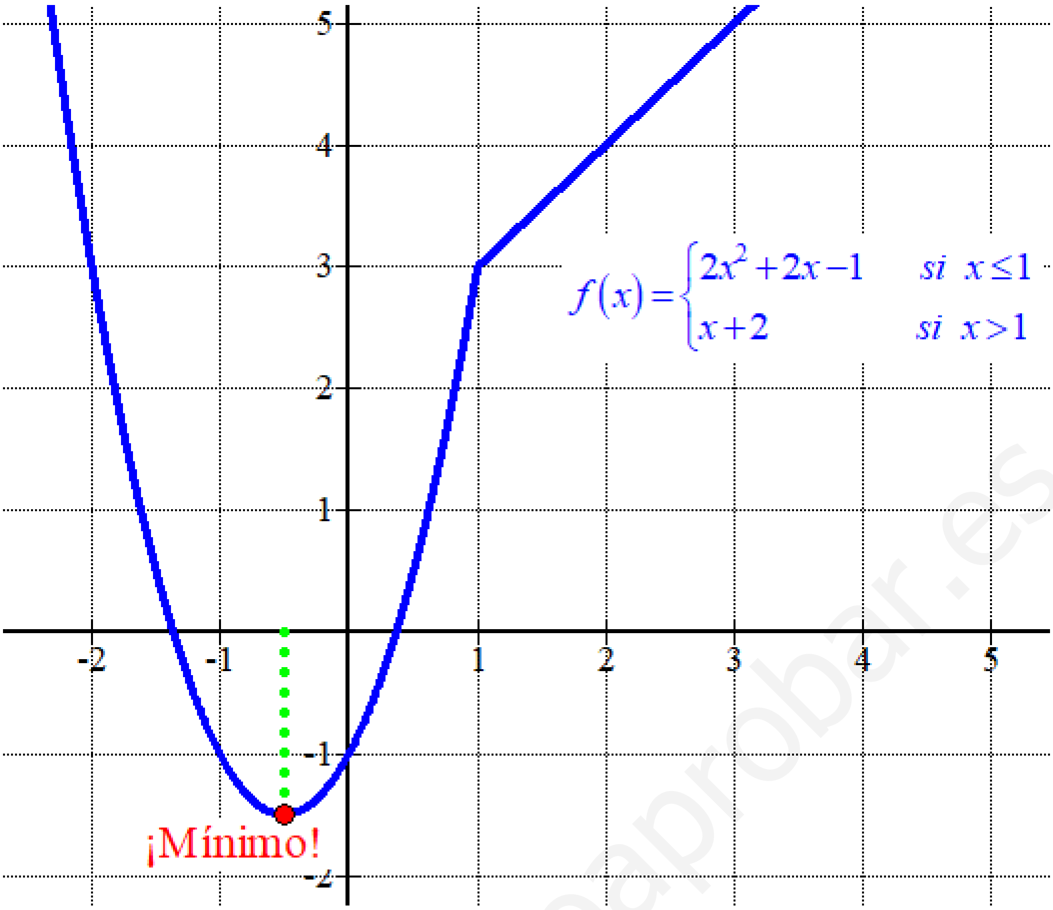
Sustituimos este valor en la segunda derivada para averiguar si es máximo o mínimo.

$$f''(x)=4x+2 \Rightarrow f''\left(\frac{-1}{2}\right)=4>0 \to x=\frac{-1}{2} \text{ es mínimo}$$

Como $f\left(\frac{-1}{2}\right)=2\left(\frac{-1}{2}\right)^2+2\left(\frac{-1}{2}\right)-1=\frac{1}{2}-1-1=\frac{-3}{2}$ la función tiene un mínimo en el punto de coordenadas $\left(\frac{-1}{2},\frac{-3}{2}\right)$.

c) Para *t = 2* la función es $f(x)=2x^2+2x-1$.

Hemos encontrado su mínimo en $x=\frac{-1}{2}$, la gráfica de la función es una parábola, por lo que la función decrece en $\left(-\infty,\frac{-1}{2}\right)$ y crece en $\left(\frac{-1}{2},1\right)$



$f(x)=\begin{cases}2x^2+2x-1 & si\ x\le 1\\ x+2 & si\ x>1\end{cases}$
¡Mínimo!

2. La función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ tiene un punto de inflexión en (2, –5) y la pendiente de la recta tangente en ese mismo punto es –12. Calcula razonadamente los valores de los parámetros *a*, *b*, y *c*. (1.5 puntos)

Si la función tiene un punto de inflexión en (2, –5) significa dos cosas: *f(2) = –5* y que *f ´´(2) = 0*.

$$f(2) = 5 \Rightarrow a\cdot 2^3 + b\cdot 2^2 + c = 0 \Rightarrow \boxed{8a + 4b + c = 5}$$

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + c \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx \Rightarrow f''(x) = 6ax + 2b$$

$$\left.\begin{array}{r} f''(x) = 6ax + 2b \\ f''(2) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 12a + 2b = 0 \Rightarrow 6a + b = 0 \Rightarrow \boxed{b = -6a}$$

Si la pendiente de la recta tangente en *x = 2* es –12 → $f'(2) = -12$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 3ax^2 + 2bx \\ f'(2) = -12 \end{array}\right\} \Rightarrow -12 = 12a + 4b \Rightarrow \boxed{-3 = 3a + b}$$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} 8a + 4b + c = -5 \\ b = -6a \\ -3 = 3a + b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 8a + 4(-6a) + c = -5 \to 8a - 24a + c = -5 \to -16a + c = -5 \\ -3 = 3a - 6a \to -3 = -3a \to \boxed{a = 1} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{b = -6\cdot 1 = -6} \\ -16 + c = -5 \to \boxed{c = 11} \end{array}\right.$$

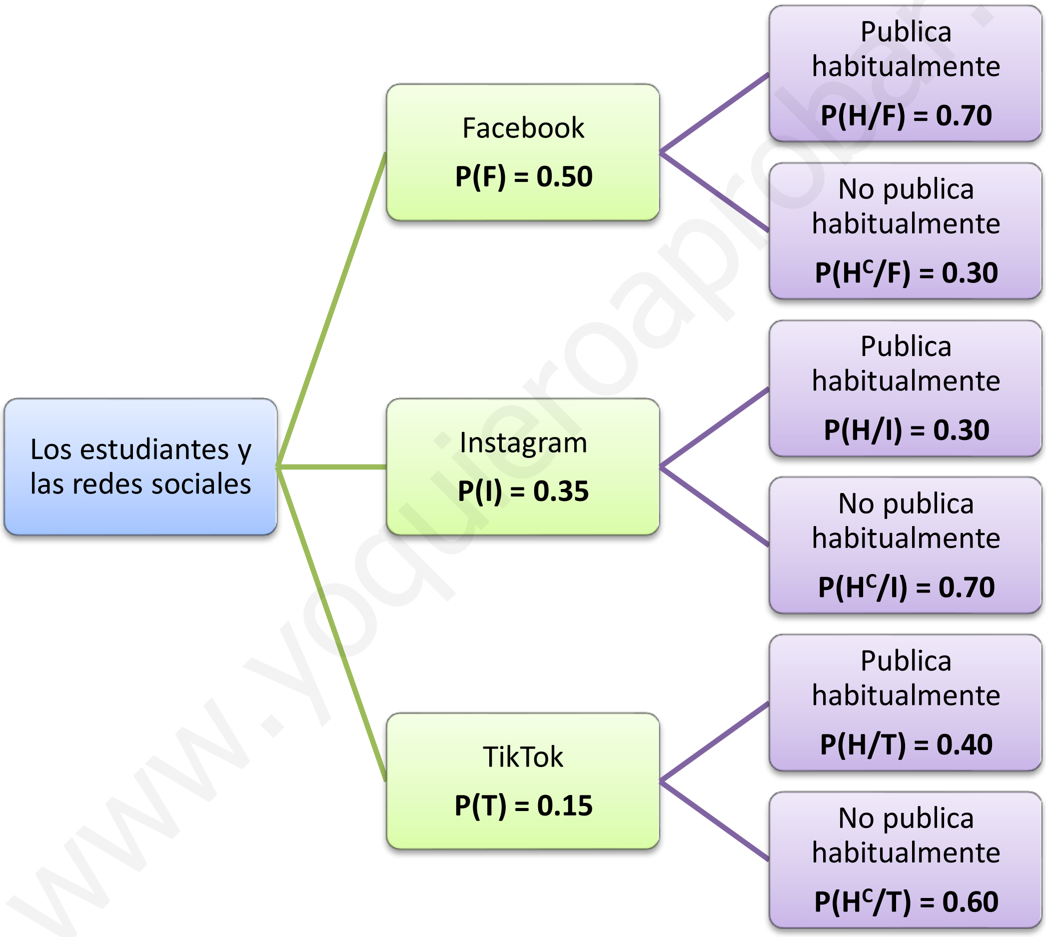
Los valores buscados son *a = 1*, *b = –6* y *c = 11*.

Sección 2 (3.5 puntos) Bloque 1

3. En un determinado instituto el 50% de los estudiantes prefiere como red social Facebook, pero un 30% de estos no publica habitualmente nada. El 35% prefiere Instagram, pero solo el 30% de los que prefieren esta plataforma hacen publicaciones habitualmente. Finalmente, el resto de los estudiantes prefiere TikTok y un 60% de estos no publica habitualmente.
a) Elegido un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no publique habitualmente nada en su red social preferida? (0.75 puntos)
b) Si se sabe que un estudiante publica habitualmente, ¿cuál es la probabilidad de que su red social preferida sea Instagram? (0.75 puntos)

Llamamos F = "Ser usuario de Facebook", I = "Ser usuario de Instagram", T = "Ser usuario de TikTok" y H = "Publicar habitualmente".

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$P\left(H^C\right)=P(F)P\left(H^C/F\right)+P(I)P\left(H^C/I\right)+P(T)P\left(H^C/T\right)=$$
$$=0.5\cdot 0.3+0.35\cdot 0.7+0.15\cdot 0.6=\boxed{0.485}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(I/H)=\frac{P(I\cap H)}{P(H)}=\frac{P(I)P(H/I)}{1-P\left(H^C\right)}=\frac{0.35\cdot 0.3}{1-0.485}=\boxed{\frac{21}{103}\simeq 0.2039}$$

4. Una asociación benéfica ha tomado una muestra de 9 personas y ha registrado las cantidades donadas por estas personas, obteniendo 60, 40, 55, 35, 20, 25, 50, 45 y 30 euros. Si el dinero donado sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 100$ euros^2,

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del dinero donado con un nivel de confianza del 97%: (1 punto)

b) Calcula el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 2 euros. (1 punto)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

X = Dinero donado.

Desviación típica = $\sigma = \sqrt{100} = 10$ euros

X = N(μ, 10)

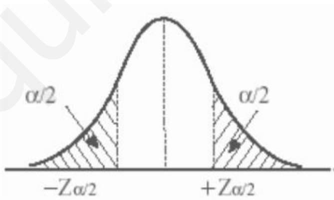
$$Media\ muestral = \bar{x} = \frac{60+40+55+35+20+25+50+45+30}{9} = 40\ €.$$

Tamaño de la muestra = *n* = *9*

a) Con un nivel de confianza del 97%

$1 - \propto = 0{,}97 \rightarrow \propto = 0{,}03 \rightarrow \propto/2 = 0'015 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}985 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2.17}$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	$\boxed{0.07}$	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	[illegible]	0.9812	0.9817
$\boxed{2.1}$	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	$\boxed{0.9850}$	0.9854	0.9857



Calculamos el error de la estimación.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{10}{\sqrt{9}} = 7.233$$

El intervalo de confianza para la media de las donaciones es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(40 - 7.233, 40 + 7.233\right) = \left(32.767, 47.233\right)$$

b) Tenemos que $Media\ muestral = \bar{x} = 40$ €, $z_{\alpha/2} = 2.17$ y Error < 2

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2 = 2.17 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2\sqrt{n} = 21.7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{21.7}{2} \Rightarrow n = \left(\frac{21.7}{2}\right)^2 \simeq 117.72$$

El tamaño mínimo de la muestra es un número entero mayor que el obtenido → 118 personas.

Bloque 2

3. Un teatro ha vendido las 660 entradas disponibles que tenía para un espectáculo. El número de entradas que se han vendido para jubilados es la cuarta parte de las entradas que se han vendido para adultos. Además, las entradas para niños equivalen al 10% de las que se han vendido entre adultos y jubilados.

a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular cómo se han repartido las entradas entre adultos, jubilados y niños. (0.75 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

a) Llamamos "x" al número de entradas para jubilados, "y" al número de entradas para adultos y "z" al número de entradas para niños.

"*Un teatro ha vendido las 660 entradas*" → $x+y+z=660$

"*El número de entradas que se han vendido para jubilados es la cuarta parte de las entradas que se han vendido para adultos*" → $x=\frac{y}{4}$

"L*as entradas para niños equivalen al 10% de las que se han vendido entre adultos y jubilados*" → $z=0.10(x+y)$

Reunimos las ecuaciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=660 \\ x=\frac{y}{4} \\ z=0.10(x+y) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=660 \\ 4x=y \\ 10z=x+y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=660 \\ 4x=y \\ x+y-10z=0 \end{array}\right\}$$

b) Resolvemos el sistema.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=660 \\ 4x=y \\ x+y-10z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+4x+z=660 \\ x+4x-10z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5x+z=660 \\ 5x-10z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} z=660-5x \\ x-2z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-2(660-5x)=0 \Rightarrow x-1320+10x=0 \Rightarrow 11x=1320 \Rightarrow \boxed{x=\frac{1320}{11}=120} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{z=660-5\cdot 120=60} \\ \boxed{y=4\cdot 120=480} \end{cases}$$

Se han vendido 120 entradas a jubilados, 480 a adultos y 60 a niños.

4. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&-1\\1&1&0\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0&2&2\end{pmatrix}$,

a) Calcula $A\cdot B\cdot C^T$ (0.75 puntos)

b) Calcula $\frac{1}{3}B^2-I$, donde I es la matriz identidad de orden 3. (0.75 puntos)

c) Razona si se puede calcular $(A-B)-C$ y $B\cdot C$ (No es necesario realizar las operaciones). (0.5 puntos)

a)

$$C=\begin{pmatrix}0&2&2\end{pmatrix}\Rightarrow C^T=\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B\cdot C^T=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&-1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+0+3&0-2+3&1-2+0\\0+0+2&0-1+2&0-1+0\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B\cdot C^T=\begin{pmatrix}2&1&-1\\2&1&-1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+2-2\\0+2-2\\0+2+0\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}}$$

b)

$$B^2=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&-1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&-1\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0+1&0+0+1&-1+0+0\\0+0-1&0+1-1&0+1+0\\-1+0+0&0-1+0&1-1+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&-1\\-1&0&1\\-1&-1&0\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3}B^2-I=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&1&-1\\-1&0&1\\-1&-1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/3-1&1/3&-1/3\\-1/3&0-1&1/3\\-1/3&-1/3&0-1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\frac{1}{3}B^2-I=\begin{pmatrix}-1/3&1/3&-1/3\\-1/3&-1&1/3\\-1/3&-1/3&-1\end{pmatrix}=\frac{-1}{3}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&3&-1\\1&1&3\end{pmatrix}}$$

c) La matriz A – B es posible obtenerla pues ambas matrices son de la misma dimensión 3×3 y su resultado es una matriz 3×3. Pero no es posible la siguiente operación pues A – B es de dimensión 3×3 y la matriz C es de dimensión 1×3.
$(A-B)-C$ no es posible calcularlo.

La matriz $B\cdot C$ no es posible calcularla pues la matriz B es de dimensiones 3×3 y la matriz C es de dimensiones 1×3. Para que sea posible el producto planteado deben coincidir el número de columnas de B (3) y el número de filas de C (1). Al no ser así el producto no se puede realizar.

$$\begin{array}{c} B \cdot C \\ 3\times\boxed{3 \cdot 1}\times 3 \end{array}$$

Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1

5. De los 80 estudiantes solicitantes de una beca Erasmus en Italia, 50 son mujeres. Se seleccionan al azar y sin reposición a 3 estudiantes que serán los que disfruten de la beca Erasmus en ese destino. Calcular la probabilidad de que:
a) Los tres seleccionados sean mujeres. (0.5 puntos)
b) Los tres seleccionados sean del mismo sexo. (0.5 puntos)
c) Al menos dos de los seleccionados sean hombres. (0.5 puntos)

Llamamos M1, M2 y M3 a los sucesos "Elegir una mujer en 1ª, 2ª o 3ª elección". La probabilidad de cada suceso depende de lo ocurrido anteriormente.

a) Elegir a tres mujeres es el suceso $M1 \cap M2 \cap M3$.

$$P(M1 \cap M2 \cap M3) = P(M1)P(M2/M1)P(M3/(M1 \cap M2)) =$$

$$= \frac{50}{80} \cdot \frac{49}{79} \cdot \frac{48}{78} = \boxed{\frac{245}{1027} \simeq 0.2386}$$

b) Esto ocurre eligiendo tres mujeres o tres hombres.
Es el suceso $(M1 \cap M2 \cap M3) \cup (M1^C \cap M2^C \cap M3^C)$.

$$P\left[(M1 \cap M2 \cap M3) \cup (M1^C \cap M2^C \cap M3^C)\right] =$$

$$= P(M1 \cap M2 \cap M3) + P(M1^C \cap M2^C \cap M3^C) =$$

$$= \frac{245}{1027} + \frac{30}{80} \cdot \frac{29}{79} \cdot \frac{28}{78} = \boxed{\frac{91}{316} \simeq 0.288}$$

c) Al menos dos de los seleccionados son hombres implica que uno es mujer y los otros dos hombres o los tres son hombres.
Este suceso es:
$(M1 \cap M2^C \cap M3^C) \cup (M1^C \cap M2 \cap M3^C) \cup (M1^C \cap M2^C \cap M3) \cup (M1^C \cap M2^C \cap M3^C)$
Su probabilidad es la suma de las probabilidades de cada uno de los cuatro sucesos.

$$\left.\begin{array}{l} P(M1 \cap M2^C \cap M3^C) = \frac{50}{80} \cdot \frac{30}{79} \cdot \frac{29}{78} \\ P(M1^C \cap M2 \cap M3^C) = \frac{30}{80} \cdot \frac{50}{79} \cdot \frac{29}{78} \\ P(M1^C \cap M2^C \cap M3) = \frac{30}{80} \cdot \frac{29}{79} \cdot \frac{50}{78} \\ P(M1^C \cap M2^C \cap M3^C) = \frac{30}{80} \cdot \frac{29}{79} \cdot \frac{28}{78} \end{array}\right\} \Rightarrow \Pr obabilidad = 3 \cdot \frac{50}{80} \cdot \frac{30}{79} \cdot \frac{29}{78} + \frac{30}{80} \cdot \frac{29}{79} \cdot \frac{28}{78} = \boxed{\frac{2581}{8216} \simeq 0.314}$$

6. Un fabricante de motores para coches de Fórmula 1 ha tomado una muestra aleatoria de 81 motores para examinar su peso, proporcionando una media de 153 kg. Si se sabe que el peso de los motores sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica σ = 30 kg,

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del peso de los motores con un nivel de confianza del 95%: (1 punto)

b) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 100 y un nivel de confianza del 93.12 %? (0.5 puntos)

c) El fabricante afirma que el peso medio de los motores es de 145 kg. ¿Se puede aceptar la afirmación del fabricante con un nivel de confianza del 92 %? Justificar la respuesta. (0.5 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

X = el peso de los motores.
Desviación típica = σ = 30 kg
X = N(μ, 30)

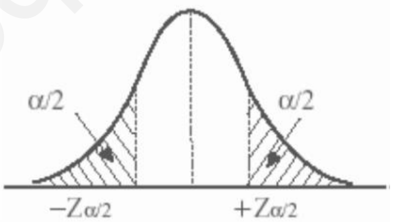
$Media\ muestral = \bar{x} = 153 kg$

Tamaño de la muestra = n = *81*

a) Con un nivel de confianza del 95 %

$$1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow \alpha/2 = 0'025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.96}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{30}{\sqrt{81}} \simeq 6.533 \text{ kg}$$

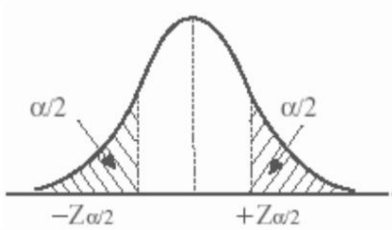
El intervalo de confianza para el peso medio de los motores es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = (153 - 6.533, 153 + 6.533) = (146.467, 159.533)$$

b) Con un nivel de confianza del 93.12 %

$$1 - \alpha = 0{,}9312 \rightarrow \alpha = 0{,}0688 \rightarrow \alpha/2 = 0'0344 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}9656 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.82}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.82 \cdot \frac{30}{\sqrt{100}} = \boxed{5.46}.$$

El error máximo es de 5.46 kg.

c) El valor de 145 kg no está en el intervalo calculado al 95%: Como al disminuir el nivel de confianza, disminuye la amplitud del intervalo, el valor de 145 kg tampoco estará en el intervalo de confianza al 92% y por tanto no se puede aceptar la afirmación.

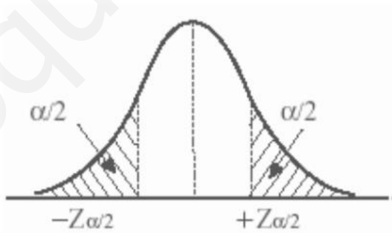
Lo podemos comprobar.

Con un nivel de confianza del 92 %

1 – ∝ = 0,92 → ∝ = 0,08 →∝/2 = 0’04 →1 – ∝/2 = 0,96 → $z_{\alpha/2}$ < **1.8**

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

No aparece en los datos proporcionados, pero es menor de 1.8.



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 1.8 \cdot \frac{30}{\sqrt{81}} = 6.$$

El intervalo de confianza para el peso medio de los motores es más estrecho que:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = (153-6, 153+6) = (147, 159)$$

El peso medio de 145 kg no pertenece a este intervalo y la afirmación no es correcta.

Bloque 2

5. Se considera la función $f(x)=\begin{cases} -(x+t)^2+2 & si\ x\le -2 \\ t-2 & si\ -2<x\le 2 \\ x^2-(t+3)x+9 & si\ x>2 \end{cases}$

a) ¿Existe un valor de t para el que la función $f(x)$ es continua en $x = -2$ y en $x = 2$? (0.75 puntos)
b) Representa gráficamente la función $f(x)$ para $t = 3$. (0.75 puntos)

a) Para que la función $f(x)$ sea continua en $x = -2$ deben coincidir los limites laterales con el valor de la función en $x = -2$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-} -(x+t)^2+2=-(-2+t)^2+2=-(t^2+4-4t)+2=-t^2+4t-2 \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+} t-2=t-2 \\ f(-2)=-t^2+4t-2 \\ \lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=f(-2) \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -t^2+4t-2=t-2\Rightarrow -t^2+3t=0\Rightarrow -t(t-3)=0\Rightarrow \begin{cases} \boxed{t=0} \\ \boxed{t=3} \end{cases}$$

Para que la función $f(x)$ sea continua en $x = 2$ deben coincidir los limites laterales con el valor de la función en $x = 2$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} t-2=t-2 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} x^2-(t+3)x+9=2^2-(t+3)2+9=-2t+7 \\ f(2)=t-2 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2) \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2t+7=t-2\Rightarrow -3t=-9\Rightarrow \boxed{t=3}$$

Para $t = 3$ la función es continua en $x = -2$ y en $x = 2$

b) Para $t = 3$ la función es continua.

La función queda $f(x)=\begin{cases} -(x+3)^2+2 & si\ x\le -2 \\ 1 & si\ -2<x\le 2 \\ x^2-6x+9 & si\ x>2 \end{cases}$

Hacemos una tabla de valores y representamos la función que es un trozo de parábola convexa (antes de –2), un trozo de recta (entre –2 y 2) y otro trozo de parábola cóncava (a partir de 2). Hallamos los vértices de cada parábola.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = -2(x+3) \\ f'(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -2(x+3) = 0 \Rightarrow \boxed{x = -3}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 2x-6 \\ f'(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x-6 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 3}$$

$x \leq -2$

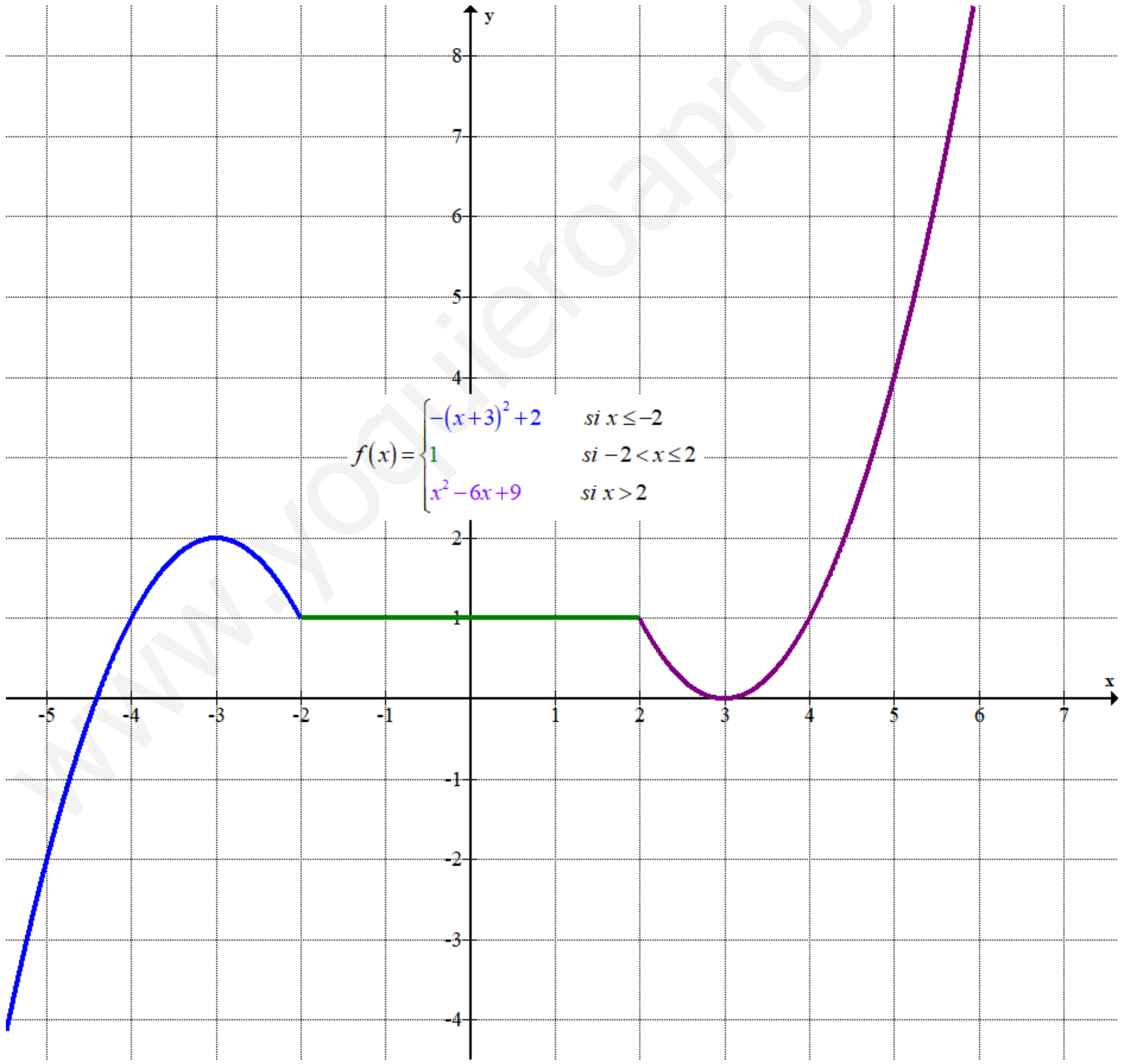
x	$y = -(x+3)^2 + 2$
-6	-7
-5	-2
-4	1
-3	2 *Máximo*
-2	1

$-2 < x \leq 2$

x	$y = 1$
-1	1
0	1
1	1
2	1

$x > 2$

x	$y = x^2 - 6x + 9$
2.5	0.25
3	0 *Mínimo*
3.5	0.25
4	1
5	4



6. La altura, medida en metros, que alcanza una pelota lanzada verticalmente hacia arriba viene expresada en función del tiempo por $H(x)=20x-2x^2$ con x = tiempo en segundos y $0\le x\le 10$.

a) ¿Qué altura habrá alcanzado la pelota a los 3 segundos? (0.5 puntos)
b) ¿En qué momentos la pelota se encuentra a 32 metros de altura? (0.5 puntos)
c) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota? ¿En qué momento? (1 punto)

a) Nos piden hallar H(3).

$$H(3)=20\cdot 3-2\cdot 3^2=60-18=42$$

Alcanza una altura de 42 metros.

b) Nos piden hallar x tal que $H(x) = 32$.

$$\left.\begin{array}{l} H(x)=20x-2x^2 \\ H(x)=32 \end{array}\right\} \Rightarrow 20x-2x^2=32 \Rightarrow -2x^2+20x-32=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-10x+16=0 \Rightarrow x=\frac{10\pm\sqrt{(-10)^2-4(1)(16)}}{2}=\frac{10\pm 6}{2}=\begin{cases}\dfrac{10+6}{2}=8=x \\ \dfrac{10-6}{2}=1=x\end{cases}$$

Se alcanza una altura de 32 metros en el primer segundo y a los 8 segundos.

c) Derivamos e igualamos a cero.

$$H(x)=20x-2x^2 \Rightarrow H'(x)=20-4x$$

$$H'(x)=0 \Rightarrow 20-4x=0 \Rightarrow 4x=20 \Rightarrow x=5$$

Vemos como es el signo de la segunda derivada en $x = 5$.

$$H'(x)=20-4x \Rightarrow H''(x)=-4 \Rightarrow H''(5)=-4<0 \rightarrow x=5 \text{ es máximo}$$

Se alcanza la altura máxima a los 5 segundos.
Como $H(5)=20\cdot 5-2\cdot 5^2=100-50=50$ la altura máxima que se alcanza es de 50 metros.