



Universidad
Zaragoza

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE 2023
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC.SS. II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo. La nota final será el resultado de sumar las puntuaciones obtenidas en las preguntas realizadas y dividir dicha suma para tres.

1.- (10 puntos) Responda a las siguientes cuestiones:

a.- (5 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ y la ecuación

matricial $XB + A = C$, determine razonadamente el orden (dimensión) de la matriz X para que la ecuación matricial esté bien planteada. Despeje la matriz X y resuelva dicha ecuación matricial.

b.- (5 puntos) Calcule, utilizando técnicas matriciales, la solución del sistema de ecuaciones lineales:

$$\left. \begin{aligned} 2x - 5y + 3z &= 1 \\ x - y + z &= 1 \\ 3x + 3y + z &= 5 \end{aligned} \right\}$$

2.- (10 puntos) Emilia quiere fertilizar sus campos de cultivo utilizando sacos de fertilizantes de dos marcas comerciales, A y B . Por cuestiones medioambientales debe comprar como máximo 100 sacos. Un saco del fertilizante A cuesta 4 € y uno del B cuesta 6 €. Un saco del fertilizante A contiene 3 unidades de nitrógeno, 5 de fósforo y 1 de potasio, mientras que un saco del B contiene 2 unidades de cada nutriente. Los terrenos estarán bien fertilizados con al menos 180 unidades de nitrógeno, al menos 200 de fósforo y, al menos, 80 de potasio. ¿Cuál es el gasto mínimo que tiene que hacer Emilia y qué debe comprar para satisfacer las necesidades nutricionales de los cultivos?

3.- (10 puntos) El coste total de fabricación, en euros, de cierto producto viene dado por la función $C(x) = x^2 + 80x + 10.000$, donde x representa el número de unidades producidas y vendidas.

a.- (5 puntos) Si cada producto se vende a 400 euros, plantee la función beneficio (ingresos menos costes) en función del número de unidades producidas y vendidas. Determine el número de unidades del producto que deben venderse para que el beneficio sea máximo (justificando que lo es). ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?

b.- (5 puntos) ¿En qué nivel de producción se minimiza el coste medio por unidad $CM(x) = \frac{C(x)}{x}$?

4.- (10 puntos) Dada $f(x) = \frac{mx^3 - 1}{x^2}$.

a.- (6 puntos) Determine el valor del parámetro m para que la función tenga un extremo relativo en $x = -1$. Razone si se trata de un máximo o un mínimo relativo.

b.- (4 puntos) Calcule el valor de m para que $\int_1^2 f(x) dx = 4$

5.- (10 puntos) Responda a las siguientes cuestiones:

a.- (6 puntos) La probabilidad de que un autobús escolar llegue con retraso en un día nublado es de 0,08 y en un día despejado 0,004. Durante un periodo de 20 días ha habido 8 días nublados y 12 días despejados. Para un día elegido al azar, ¿cuál será la probabilidad de que el autobús llegue con retraso?

b.- (4 puntos) De los sucesos A y B de un mismo experimento aleatorio se sabe que: $P(A) = 3/8$, $P(B) = 5/8$ y $P(A \cup B) = 3/4$. Calcule $P(A \cap B)$, $P(A/B)$ y $P(A \cap \bar{B})$. Justifique si A y B son dos sucesos independientes.

6.- (10 puntos) Se pretende analizar el consumo anual en alimentación y bebidas en los hogares españoles. Dicha variable sigue una distribución normal con una desviación típica de 3.000 euros.

a.- (5 puntos) Si deseamos obtener un intervalo de confianza al 96% para la media de dicha variable ¿cuántas familias tenemos que encuestar para que la amplitud del intervalo no sea superior de 2.000 euros?

b.- (4 puntos) En una muestra de 60 hogares se obtuvo un consumo medio anual en alimentación y bebidas de 17.000 euros, halle el intervalo de confianza al 96% para la media de dicha variable.

c.- (1 punto) Si desde una asociación de consumidores se afirma «el consumo anual medio en alimentación y bebidas en hogares es de 20.000 euros al año». Razone, a la vista del apartado b.- si hay motivos para dudar de su afirmación.

k	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	k
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359	0,0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753	0,1
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141	0,2
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517	0,3
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879	0,4
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224	0,5
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549	0,6
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389	0,9
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621	1,0
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830	1,1
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015	1,2
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177	1,3
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319	1,4
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441	1,5
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545	1,6
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633	1,7
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706	1,8
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767	1,9
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817	2,0
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857	2,1
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890	2,2
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916	2,3
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936	2,4
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952	2,5
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964	2,6
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	2,7
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981	2,8
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986	2,9
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990	3,0
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993	3,1
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995	3,2
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997	3,3
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	3,4
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	3,5
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	3,6

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIONES

1.- (10 puntos) Responda a las siguientes cuestiones:

a.- (5 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ y la ecuación

matricial $XB + A = C$, determine razonadamente el orden (dimensión) de la matriz X para que la ecuación matricial esté bien planteada. Despeje la matriz X y resuelva dicha ecuación matricial.

b.- (5 puntos) Calcule, utilizando técnicas matriciales, la solución del sistema de ecuaciones lineales:

$$\left. \begin{aligned} 2x - 5y + 3z &= 1 \\ x - y + z &= 1 \\ 3x + 3y + z &= 5 \end{aligned} \right\}$$

a.- Si consideramos la matriz X de dimensiones $m \times n$ tenemos que

$$\begin{aligned} XB + A &= C \\ m \times \boxed{n \cdot 3} \times 3 + 2 \times 3 &\rightarrow 2 \times 3 \end{aligned}$$

El producto XB es posible cuando $n = 3$ obteniéndose una matriz $m \times 3$.

Para que sea posible la suma $XB + A$ la matriz debe ser de dimensiones 2×3 , por lo que m debe ser 2.

La matriz X es de dimensiones 2×3 .

Despejamos la matriz X en la ecuación matricial.

$$XB + A = C \Rightarrow XB = C - A \Rightarrow X = (C - A)B^{-1}$$

Comprobamos que la matriz B es invertible y calculamos su inversa.

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - 1 = -1 \neq 0$$

$$B^{-1} = \frac{\text{Adj}(B^T)}{|B|} = \frac{\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}}{-1} = -\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Lo aplicamos a la obtención de la matriz X.

$$X = (C - A)B^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+0-2 & 0+0+1 & -6+0+5 \\ -1+0-4 & 0+0+2 & 2+0+10 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -5 & 2 & 12 \end{pmatrix}$$

b.- Obtenemos la expresión matricial del sistema.

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ 3x + 3y + z = 5 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}}_B \Rightarrow AX = B$$

La ecuación matricial se resuelve despejando $X \rightarrow AX = B \rightarrow X = A^{-1}B$.

Hallamos la inversa de la matriz A y calculamos la expresión de X.

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ 3x + 3y + z = 5 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}}_B \Rightarrow AX = B$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 15 + 9 + 9 + 5 - 6 = 0$$

No existe la inversa de A. El sistema no es compatible determinado.

Lo resolvemos utilizando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3}^a - 3 \cdot \text{Fila 2}^a \\ 3 \quad 3 \quad 1 \quad 5 \\ -3 \quad 3 \quad -3 \quad -3 \\ \hline 0 \quad 6 \quad -2 \quad 2 \rightarrow \text{Nueva Fila 3}^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 1}^a - 2 \cdot \text{Fila 2}^a \\ 2 \quad -5 \quad 3 \quad 1 \\ -2 \quad 2 \quad -2 \quad -2 \\ \hline 0 \quad -3 \quad 1 \quad -1 \rightarrow \text{Nueva Fila 1}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{\text{Fila } 2^a \leftrightarrow \text{Fila } 1^a\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + 2 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 6 \quad -2 \quad 2 \\ 0 \quad -6 \quad 2 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema triangular equivalente obtenido.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - y + z = 1 \\ -3y + z = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - y + z = 1 \\ \boxed{z = -1 + 3y} \end{array} \right\} \Rightarrow x - y - 1 + 3y = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 2 - 2y \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases}}, \lambda \in \mathbb{R}$$

2.- (10 puntos) Emilia quiere fertilizar sus campos de cultivo utilizando sacos de fertilizantes de dos marcas comerciales, A y B. Por cuestiones medioambientales debe comprar como máximo 100 sacos. Un saco del fertilizante A cuesta 4 € y uno del B cuesta 6 €. Un saco del fertilizante A contiene 3 unidades de nitrógeno, 5 de fósforo y 1 de potasio, mientras que un saco del B contiene 2 unidades de cada nutriente. Los terrenos estarán bien fertilizados con al menos 180 unidades de nitrógeno, al menos 200 de fósforo y, al menos, 80 de potasio. ¿Cuál es el gasto mínimo que tiene que hacer Emilia y qué debe comprar para satisfacer las necesidades nutricionales de los cultivos?

a.- Llamamos x = número de sacos A, y = número de sacos B.

Completamos una tabla con los datos del problema.

	Nº unidades de nitrógeno	Nº unidades de fósforo	Nº unidades de potasio	Coste
Nº sacos A (x)	$3x$	$5x$	x	$4x$
Nº sacos B (y)	$2y$	$2y$	$2y$	$6y$
TOTALES	$3x + 2y$	$5x + 2y$	$x + 2y$	$4x + 6y$

Queremos minimizar los costes: $C(x, y) = 4x + 6y$

Las restricciones son:

“Debe comprar como máximo 100 sacos” $\rightarrow x + y \leq 100$

“Los terrenos estarán bien fertilizados con al menos 180 unidades de nitrógeno, al menos 200 de fósforo y, al menos, 80 de potasio” $\rightarrow 3x + 2y \geq 180$; $5x + 2y \geq 200$; $x + 2y \geq 80$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0$; $y \geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 100 \\ 3x + 2y \geq 180 \\ 5x + 2y \geq 200 \\ x + 2y \geq 80 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Representamos la región factible, empezando por dibujar las rectas que la delimitan.

$$y = 100 - x$$

$$3x + 2y = 180$$

$$5x + 2y = 200$$

$$x + 2y = 80$$

$$x \geq 0; y \geq 0$$

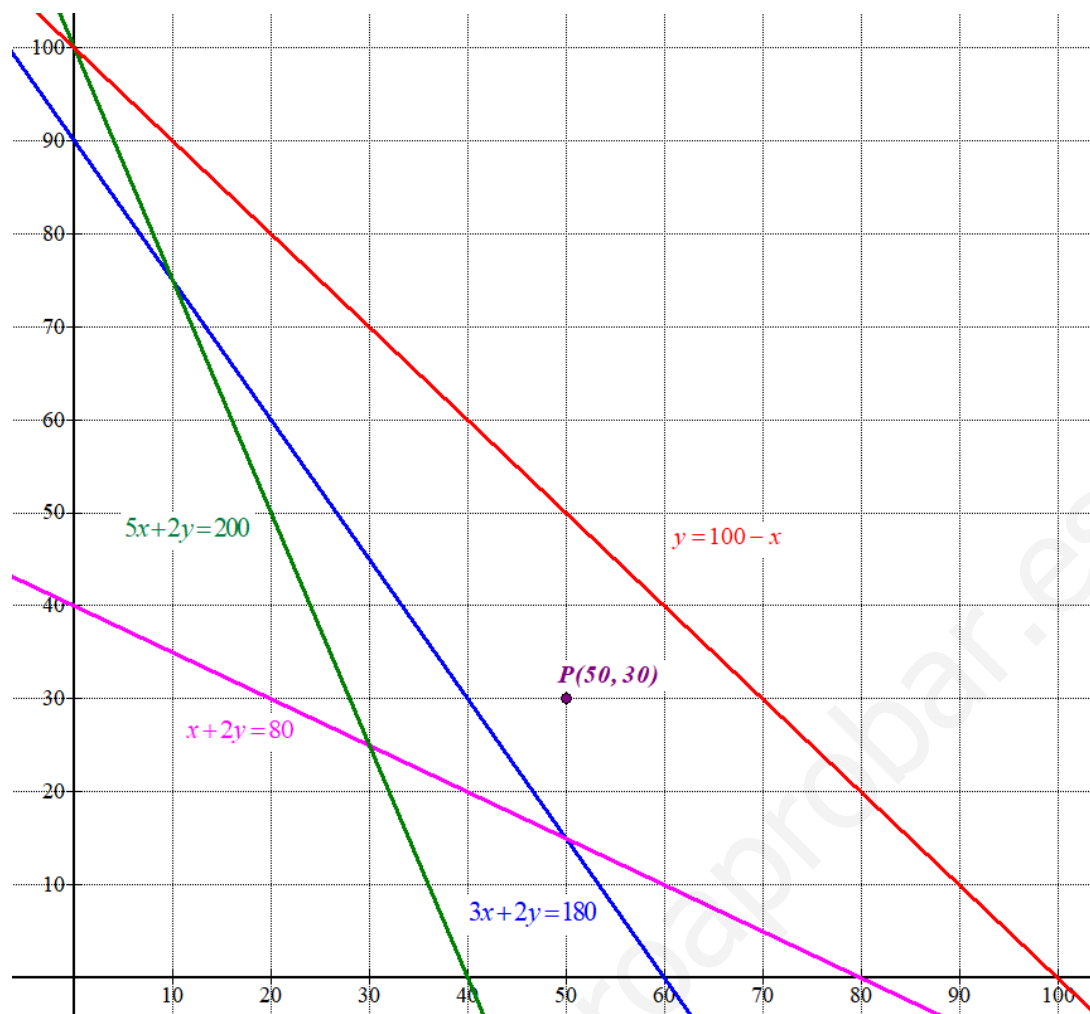
x	$y = 100 - x$
0	120
70	50
120	0

x	$y = \frac{180 - 3x}{2}$
0	78
45	60
70	50

x	$y = \frac{200 - 5x}{2}$
0	60
10	60

x	$y = \frac{80 - x}{2}$
0	60
10	60

Primer cuadrante



Como las restricciones son

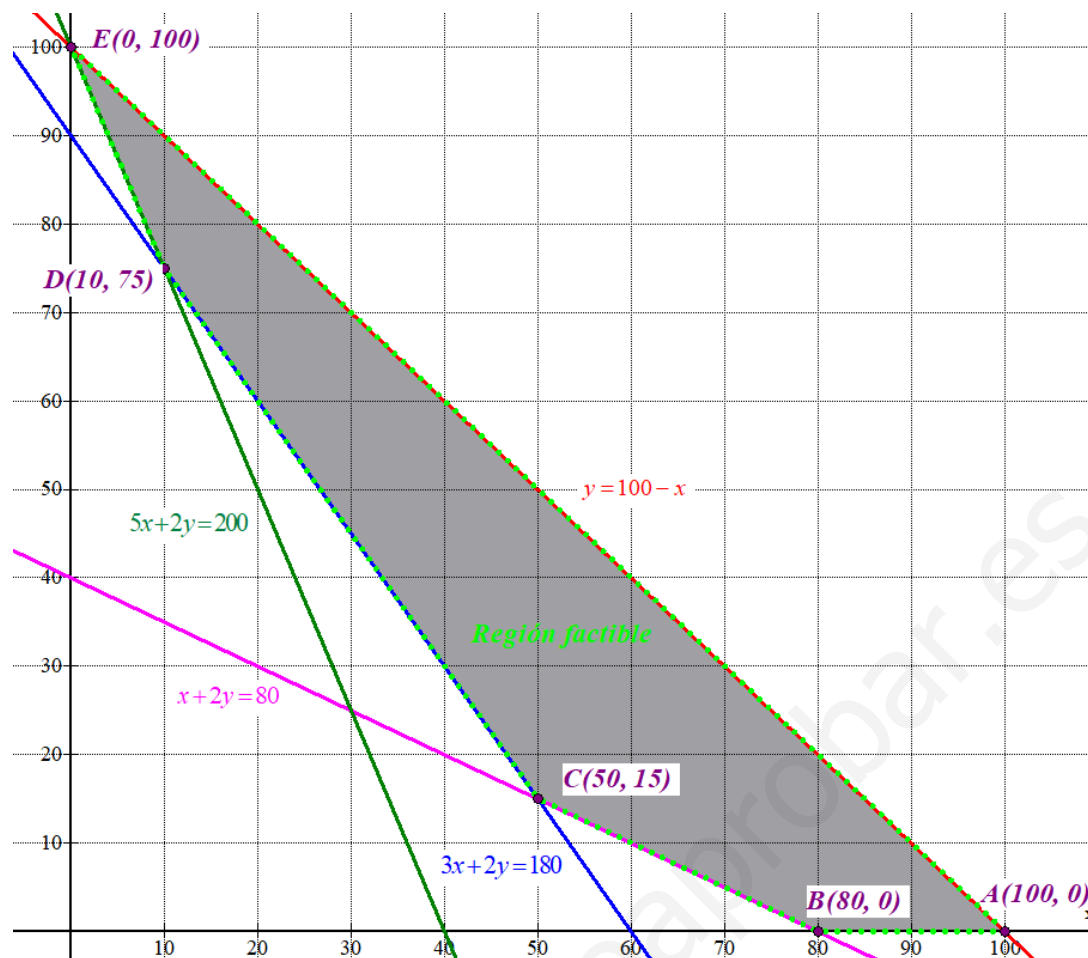
$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 100 \\ 3x + 2y \geq 180 \\ 5x + 2y \geq 200 \\ x + 2y \geq 80 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante}$$

que está por debajo de la recta roja y por encima de las rectas azul, rosa y verde.

Comprobamos que el punto $P(50, 30)$ perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 50 + 30 \leq 100 \\ 3 \cdot 50 + 2 \cdot 30 \geq 180 \\ 5 \cdot 50 + 2 \cdot 30 \geq 200 \\ 50 + 2 \cdot 30 \geq 80 \\ 50 \geq 0; 30 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible e indicamos las coordenadas de sus vértices.



Valoramos la función costes $C(x, y) = 4x + 6y$ en cada uno de sus vértices, en busca del valor mínimo.

$$A(100, 0) \rightarrow C(100, 0) = 400$$

$$B(80, 0) \rightarrow C(80, 0) = 320$$

$$C(50, 15) \rightarrow C(50, 15) = 200 + 90 = 290 \text{ ¡Mínimo!}$$

$$D(10, 75) \rightarrow C(10, 75) = 40 + 450 = 490$$

$$E(0, 100) \rightarrow C(0, 100) = 600$$

El valor mínimo es 290 y se obtiene en el punto $C(50, 15)$.

Con 50 sacos A y 15 sacos B nos ajustamos a las restricciones y obtenemos un mínimo coste de 290 €.

3.- (10 puntos) El coste total de fabricación, en euros, de cierto producto viene dado por la función $C(x) = x^2 + 80x + 10.000$, donde x representa el número de unidades producidas y vendidas.

a.- (5 puntos) Si cada producto se vende a 400 euros, plantee la función beneficio (ingresos menos costes) en función del número de unidades producidas y vendidas. Determine el número de unidades del producto que deben venderse para que el beneficio sea máximo (justificando que lo es). ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?

b.- (5 puntos) ¿En qué nivel de producción se minimiza el coste medio por unidad $CM(x) = \frac{C(x)}{x}$?

a.- Los ingresos son $I(x) = 400x$, por lo que la función beneficios es:

$$B(x) = I(x) - C(x) = 400x - (x^2 + 80x + 10.000) = -x^2 + 320x - 10000$$

Utilizamos la derivada para hallar sus puntos críticos.

$$B(x) = -x^2 + 320x - 10000 \Rightarrow B'(x) = -2x + 320$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 320 = 0 \Rightarrow 2x = 320 \Rightarrow x = \frac{320}{2} = 160$$

Comprobamos si el punto crítico obtenido es máximo o mínimo usando el signo de la segunda derivada.

$$B'(x) = -2x + 320 \Rightarrow B''(x) = -2 \Rightarrow B''(160) = -2 < 0 \Rightarrow x = 160 \text{ es máximo}$$

El beneficio es máximo con 160 unidades producidas y vendidas.

$$B(160) = -160^2 + 320 \cdot 160 - 10000 = 15600$$

El beneficio máximo que se puede obtener es de 15600 €.

b.- Obtenemos la expresión del coste medio.

$$CM(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{x^2 + 80x + 10.000}{x} = x + 80 + \frac{10000}{x}$$

$$\left. \begin{array}{l} CM'(x) = 1 - \frac{10000}{x^2} \\ CM'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - \frac{10000}{x^2} = 0 \Rightarrow 1 = \frac{10000}{x^2} \Rightarrow x^2 = 10000 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{10000} = +100}$$

Estudiamos el signo de la derivada segunda en $x = 100$.

$$CM'(x) = 1 - \frac{10000}{x^2} = 1 - 10000x^{-2} \Rightarrow CM''(x) = -(-2)10000x^{-3} = \frac{20000}{x^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CM''(100) = \frac{20000}{100^3} > 0 \Rightarrow \boxed{x = 100 \text{ es mínimo}}$$

El coste medio se minimiza en un nivel de producción de 100 unidades.

4.- (10 puntos) Dada $f(x) = \frac{mx^3 - 1}{x^2}$.

a.- (6 puntos) Determine el valor del parámetro m para que la función tenga un extremo relativo en $x = -1$. Razone si se trata de un máximo o un mínimo relativo.

b.- (4 puntos) Calcule el valor de m para que $\int_1^2 f(x) dx = 4$

a.- Para que la función tenga un extremo relativo en $x = -1$ la derivada debe anularse $\rightarrow f'(-1) = 0$.

$$f'(x) = \frac{(3mx^2)x^2 - 2x(mx^3 - 1)}{x^4} = \frac{3mx^4 - 2mx^4 + 2x}{x^4} = \frac{mx^4 + 2x}{x^4} = \frac{mx^3 + 2}{x^3}$$

$$f'(-1) = 0 \Rightarrow \frac{m(-1)^3 + 2}{(-1)^3} = 0 \Rightarrow \frac{-m + 2}{-1} = 0 \Rightarrow -m + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{m = 2}$$

El valor del parámetro es $m = 2$.

La función queda $f(x) = \frac{2x^3 - 1}{x^2}$.

Para decidir si es máximo o mínimo calculamos el signo de la derivada segunda en $x = -1$.

$$f'(x) = \frac{2x^3 + 2}{x^3} \Rightarrow f''(x) = \frac{6x^2x^3 - 3x^2(2x^3 + 2)}{(x^3)^2} = \frac{6x^5 - 6x^5 - 6x^2}{x^6} = \frac{-6x^2}{x^6} = \frac{-6}{x^4}$$

$$f''(-1) = \frac{-6}{(-1)^4} = -6 < 0 \Rightarrow \boxed{x = -1 \text{ es máximo relativo}}$$

En $x = -1$ hay un máximo relativo.

b.- Calculamos la integral indefinida.

$$\int f(x) dx = \int \frac{mx^3 - 1}{x^2} dx = \int \frac{mx^3}{x^2} - \frac{1}{x^2} dx = \int mx - x^{-2} dx = m \frac{x^2}{2} - \frac{x^{-1}}{-1} = \frac{m}{2} x^2 + \frac{1}{x}$$

Lo aplicamos a lo pedido.

$$\int_1^2 f(x) dx = \left[\frac{m}{2} x^2 + \frac{1}{x} \right]_1^2 = \left[\frac{m}{2} 2^2 + \frac{1}{2} \right] - \left[\frac{m}{2} 1^2 + \frac{1}{1} \right] = 2m + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} m - 1 = \frac{3}{2} m - \frac{1}{2}$$

$$\int_1^2 f(x) dx = 4 \Rightarrow \frac{3}{2} m - \frac{1}{2} = 4 \Rightarrow 3m - 1 = 8 \Rightarrow 3m = 9 \Rightarrow \boxed{m = 3}$$

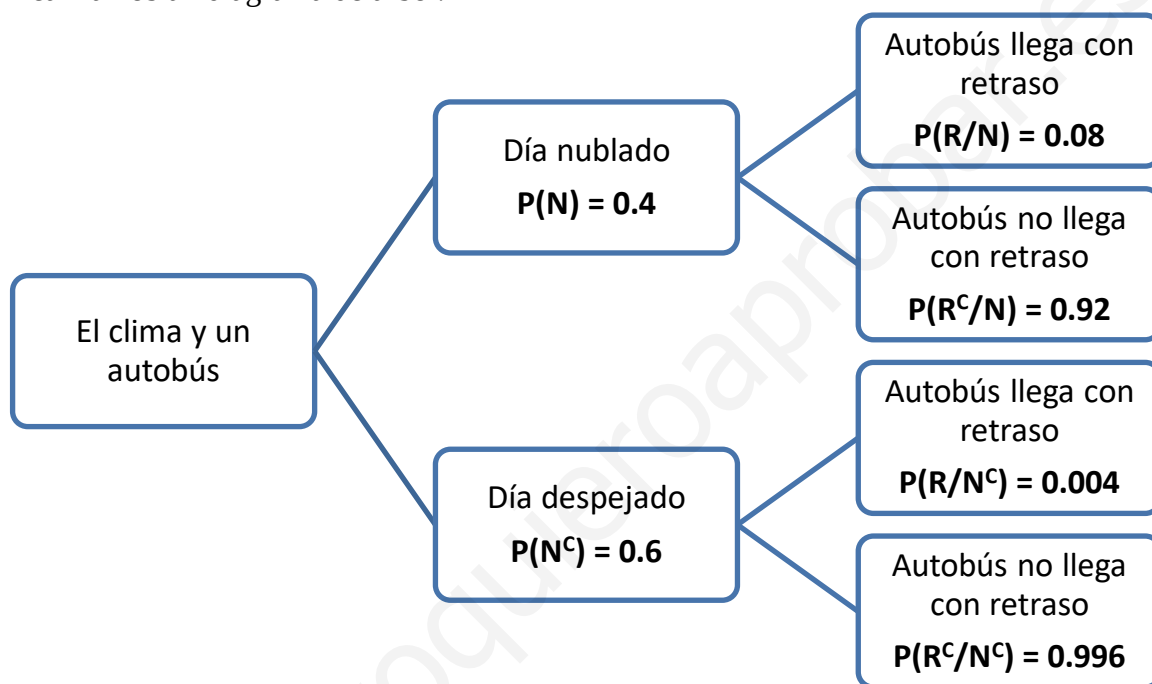
El valor del parámetro es $m = 3$.

5.- (10 puntos) Responda a las siguientes cuestiones:

a.- (6 puntos) La probabilidad de que un autobús escolar llegue con retraso en un día nublado es de 0,08 y en un día despejado 0,004. Durante un periodo de 20 días ha habido 8 días nublados y 12 días despejados. Para un día elegido al azar, ¿cuál será la probabilidad de que el autobús llegue con retraso?

b.- (4 puntos) De los sucesos A y B de un mismo experimento aleatorio se sabe que: $P(A) = 3/8$, $P(B) = 5/8$ y $P(A \cup B) = 3/4$. Calcule $P(A \cap B)$, $P(A/B)$ y $P(A \cap \bar{B})$. Justifique si A y B son dos sucesos independientes.

a.- La probabilidad de que un día sea nublado es $8/20 = 0.4$ y de que sea despejado es 0.6. Llamamos N al suceso “Día nublado” y R al suceso “el autobús llega con retraso”. Realizamos un diagrama de árbol.



Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(R) = P(N)P(R/N) + P(N^c)P(R/N^c) =$$

$$= 0.4 \cdot 0.08 + 0.6 \cdot 0.004 = \boxed{0.0344}$$

b.- Aplicamos la fórmula de la probabilidad de la unión de sucesos.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{3}{8} + \frac{5}{8} - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{8} + \frac{5}{8} - \frac{3}{4} = \boxed{\frac{1}{4} = 0.25}$$

Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{8}} = \frac{8}{20} = \boxed{\frac{2}{5} = 0.4}$$

Calculamos $P(A \cap \bar{B})$

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \Rightarrow \frac{3}{8} = \frac{1}{4} + P(A \cap \bar{B}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A \cap \bar{B}) = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{8} = 0.125}$$

Para que los sucesos A y B sean independientes debe cumplirse $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap B) = \frac{1}{4} = 0.25 \\ P(A)P(B) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{15}{64} = 0.234375 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$$

Los sucesos A y B no son independientes.

6.- (10 puntos) Se pretende analizar el consumo anual en alimentación y bebidas en los hogares españoles. Dicha variable sigue una distribución normal con una desviación típica de 3.000 euros.

a.- (5 puntos) Si deseamos obtener un intervalo de confianza al 96% para la media de dicha variable ¿cuántas familias tenemos que encuestar para que la amplitud del intervalo no sea superior de 2.000 euros?

b.- (4 puntos) En una muestra de 60 hogares se obtuvo un consumo medio anual en alimentación y bebidas de 17.000 euros, halle el intervalo de confianza al 96% para la media de dicha variable.

c.- (1 punto) Si desde una asociación de consumidores se afirma «el consumo anual medio en alimentación y bebidas en hogares es de 20.000 euros al año». Razone, a la vista del apartado **b.-** si hay motivos para dudar de su afirmación.

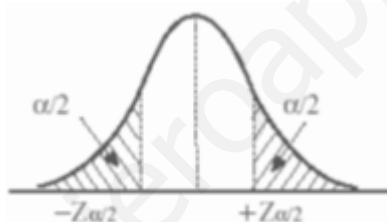
Sea X la variable aleatoria que mide el consumo anual en alimentación y bebidas en los hogares españoles.

$$X = N(\mu, 3000)$$

- a.** Si la amplitud del intervalo no es superior a 2000 € entonces el error no debe ser superior a $2000/2 = 1000$ €.

Para un nivel de confianza del 96%

$$1 - \alpha = 0,96 \rightarrow \alpha = 0,04 \rightarrow \alpha/2 = 0,02 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,98 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.055$$



Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1000 = 2.055 \cdot \frac{3000}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1000\sqrt{n} = 2.055 \cdot 3000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2.055 \cdot 3000}{1000} \Rightarrow n = \left(\frac{2.055 \cdot 3000}{1000} \right)^2 \approx \boxed{38.007}$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser un número entero superior al obtenido. El tamaño mínimo es de 39 hogares españoles.

- b.-** Para un nivel de confianza del 96% tenemos que $z_{\alpha/2} = 2.055$. $n = 60$. $\bar{x} = 17000$.

Calculamos el error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.055 \cdot \frac{3000}{\sqrt{60}} \approx 795.9$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (17000 - 795.9, 17000 + 795.9) = (16204.1, 17795.9)$$

- c.-** Como 20000 no pertenece al intervalo de confianza hallado con un nivel de confianza del 96% podemos afirmar que es dudosa su afirmación.