UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2022-2023
Convocatoria:
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

El alumno contestará a SÓLO CINCO ejercicios de entre los planteados.
En caso contrario, el corrector corregirá los cinco que haya contestado primero.
Todas las preguntas tienen la misma puntuación. Es necesario justificar las respuestas.
Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

1.- (2 puntos) Sea

$$f(x)=\frac{x}{(x-2)(x-1)}$$

(i) Halla el dominio, asíntotas verticales y horizontales de la función *f*, en caso de que existan.
(ii) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y máximos y mínimos relativos si los hubiera.

2.- (2 puntos) Halla el área del recinto encerrado por las gráficas de las parábolas $y=x^2-2x+1$ e $y=-2x^2+2x$.

3.- (2 puntos) Calcula los siguientes límites:

(i) $\lim_{x\to 0}\left(e^x+x^3\right)^{\frac{1}{x}}$

(ii) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x+2}-\frac{x^2+1}{x-2}\right)$

4.- (2 puntos) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real *a* y resuélvelo en los casos en que es compatible determinado e indeterminado.

$$\begin{cases} x+(a+1)y+z=a \\ x+y+(a+1)z=a \\ (a+1)x+y+z=a \end{cases}$$

5.- (2 puntos) Dada una matriz de tamaño 4×4 cuyo determinante es igual a 2. Calcula el valor del determinante de la matriz resultante al realizar las siguientes operaciones:

(i) Se traspone la matriz.
(ii) Se cambian entre sí la primera y la cuarta columna.
(iii) Se multiplica la tercera columna por –4.
(iv) Se multiplica toda la matriz por 4.

6.- (2 puntos) Determina para qué valores del parámetro real *a* la matriz A:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a-1 & a^2-1 & 1 \\ a^2-1 & a-1 & a+1 \end{pmatrix}$$

Tiene inversa. Calcula, si es posible, la matriz inversa de A para $a = 2$.

7.- (2 puntos) Determina la posición relativa de la recta

$$\frac{x-3}{0}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-5}{1}$$

y el plano de ecuación $3x+2y-11z+3=0$.

8.- (2 puntos) Halla el punto simétrico del punto *A(0, 2, 3)* respecto al plano π de ecuación $x+y-z=4$
.

9.- (2 puntos) En una empresa automovilística se ha recibido un lote de piezas de coches de tipos A, B y C. El 80 % corresponde al coche de tipo A, el 10 % al B y el resto al C. Se ha observado que hay piezas que están defectuosas en los siguientes porcentajes: el 10 % de A, el 20 % de B y el 5 % de C. Se elige una pieza al azar. Calcula:
(i) la probabilidad de coger una pieza defectuosa.
(ii) si sabemos que la pieza es defectuosa, la probabilidad de que sea del tipo A.

10.- (2 puntos) La edad media de un jugador de la NBA sigue una distribución normal de media 26 años y desviación típica 5 años. Si se elige un jugador al azar, halla:

(i) La probabilidad de que su edad sea superior o igual a 31 años.
(ii) La probabilidad de que su edad esté entre 21 y 31 años.

(Véase la tabla simplificada de la normal tipificada que aparece al final del examen)

Tabla simplificada de la distribución normal tipificada

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

SOLUCIONES

1.- (2 puntos) Sea

$$f(x)=\frac{x}{(x-2)(x-1)}$$

(i) Halla el dominio, asíntotas verticales y horizontales de la función *f*, en caso de que existan.
(ii) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y máximos y mínimos relativos si los hubiera.

(i) El dominio son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$(x-2)(x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \to x=2 \\ x-1=0 \to x=1 \end{cases}$$

El dominio es $\mathbb{R}-\{1,2\}$.

Asíntota vertical. $x=a$

¿ $x=1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x}{(x-2)(x-1)}=\frac{1}{0}=\infty$$

$x=1$ es asíntota vertical.

¿ $x=2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x}{(x-2)(x-1)}=\frac{2}{0}=\infty$$

$x=2$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y=b$.

$$b=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2-3x+2}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}+\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}=\frac{\frac{1}{\infty}}{1-\frac{3}{\infty}+\frac{2}{\infty}}=\frac{0}{1}=0$$

$y=0$ es asíntota horizontal.

La función tiene dos asíntotas verticales: $x=1$, $x=2$ y una asíntota horizontal $y=0$.

(ii) Usamos la función derivada.

$$f(x)=\frac{x}{(x-2)(x-1)}=\frac{x}{x^2-3x+2}\Rightarrow f'(x)=\frac{1\cdot(x^2-3x+2)-x(2x-3)}{(x^2-3x+2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{x^2-3x+2-2x^2+3x}{\left(x^2-3x+2\right)^2}=\frac{-x^2+2}{\left(x^2-3x+2\right)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{-x^2+2}{\left(x^2-3x+2\right)^2}=0\Rightarrow -x^2+2=0\Rightarrow x^2=2\Rightarrow \boxed{x=\pm\sqrt{2}}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores. Añadimos los valores excluidos del dominio.

En el intervalo $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)$ tomamos x = *–2* y la derivada vale

$f'(-2)=\dfrac{-(-2)^2+2}{\left((-2)^2-3(-2)+2\right)^2}=\dfrac{-2}{144}<0$. La función decrece en $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)$.

En el intervalo $\left(-\sqrt{2},1\right)$ tomamos x = *0* y la derivada vale $f'(0)=\dfrac{-0^2+2}{\left(0^2-0+2\right)^2}=\dfrac{2}{4}>0$. La función crece en $\left(-\sqrt{2},1\right)$.

En el intervalo $\left(1,+\sqrt{2}\right)$ tomamos x = *1.1* y la derivada vale

$f'(1.1)=\dfrac{-1.1^2+2}{\left(1.1^2-3\cdot 1.1+2\right)^2}=\dfrac{0.79}{+}>0$. La función crece en $\left(1,+\sqrt{2}\right)$.

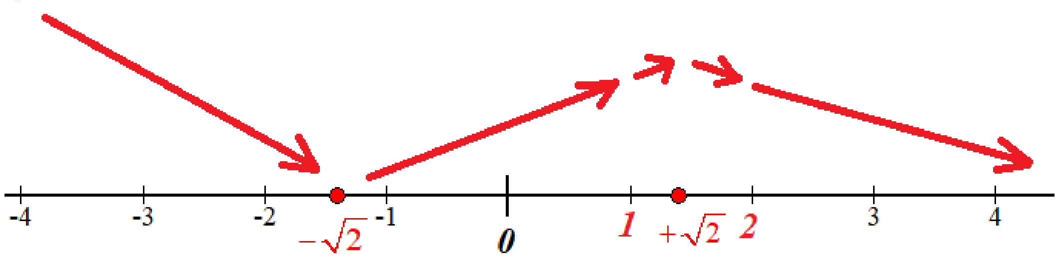
En el intervalo $\left(+\sqrt{2},2\right)$ tomamos x = *1.5* y la derivada vale

$f'(1.5)=\dfrac{-1.5^2+2}{\left(1.5^2-3\cdot 1.5+2\right)^2}=\dfrac{-0.25}{+}<0$. La función decrece en $\left(+\sqrt{2},2\right)$.

En el intervalo $(2,+\infty)$ tomamos x = *3* y la derivada vale $f'(3)=\dfrac{-3^2+2}{\left(3^2-3\cdot 3+2\right)^2}=\dfrac{-7}{4}<0$.

La función decrece en $(2,+\infty)$.

La función decrece en $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)\cup\left(+\sqrt{2},2\right)\cup(2,+\infty)$ y crece en $\left(-\sqrt{2},1\right)\cup\left(1,+\sqrt{2}\right)$.



La función presenta un mínimo relativo en $x=-\sqrt{2}$ y un máximo relativo en $x=+\sqrt{2}$.

2.- (2 puntos) Halla el área del recinto encerrado por las gráficas de las parábolas $y = x^2 - 2x + 1$ e $y = -2x^2 + 2x$.

Determinamos los puntos de corte de ambas gráficas.

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 2x + 1 \\ y = -2x^2 + 2x \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = -2x^2 + 2x \Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(3)(1)}}{2(3)} = \frac{4 \pm 2}{6} = \begin{cases} \dfrac{4+2}{6} = 1 = x \\ \dfrac{4-2}{6} = \dfrac{1}{3} = x \end{cases}$$

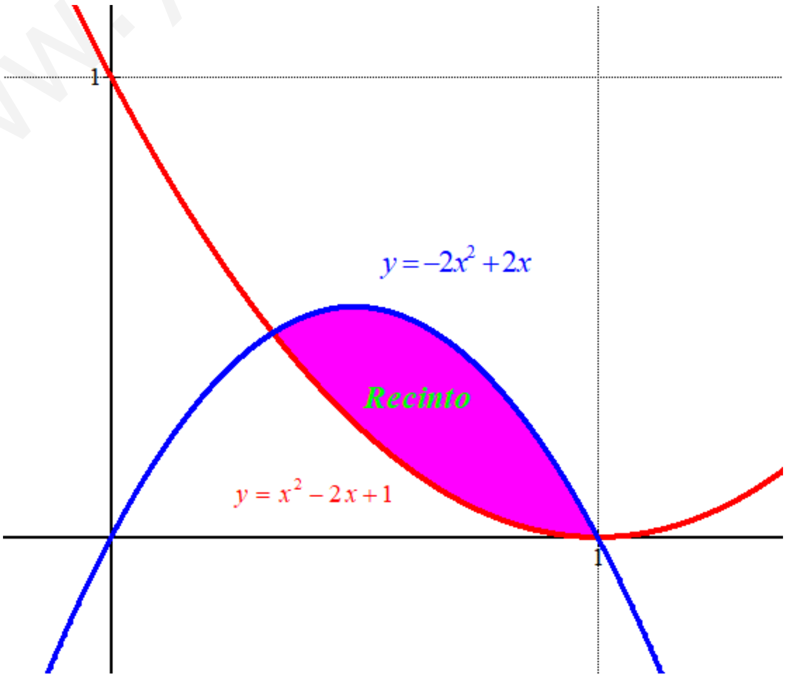
El área del recinto será el valor absoluto de la integral definida entre 1/3 y 1 de la diferencia de las dos funciones.

$$\int_{1/3}^{1} -2x^2 + 2x - \left(x^2 - 2x + 1\right) dx = \int_{1/3}^{1} -3x^2 + 4x - 1 dx =$$

$$= \left[-x^3 + 2x^2 - x\right]_{1/3}^{1} = \left[-1^3 + 2 \cdot 1^2 - 1\right] - \left[-\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}\right] =$$

$$= -1 + 2 - 1 + \frac{1}{27} - \frac{2}{9} + \frac{1}{3} = \frac{1-6+9}{27} = \boxed{\frac{4}{27} \simeq 0.1489}$$

El área tiene un valor de $\frac{4}{27} \simeq 0.1489$ unidades cuadradas.



3.- (2 puntos) Calcula los siguientes límites:

(i) $\lim_{x\to 0}\left(e^x+x^3\right)^{\frac{1}{x}}$

(ii) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x+2}-\frac{x^2+1}{x-2}\right)$

(i)

$$\lim_{x\to 0}\left(e^x+x^3\right)^{\frac{1}{x}}=\left(e^0+0^3\right)^{\frac{1}{0}}=1^\infty=\text{Indeterminación (nº e)}=$$

$$=e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(e^x+x^3-1\right)}=\ldots$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(e^x+x^3-1\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+x^3-1}{x}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación(L´Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+3x^2}{1}=\lim_{x\to 0}e^x+3x^2=e^0+3\cdot 0^2=1$$

$$\ldots=e^1=\boxed{e}$$

(ii)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x+2}-\frac{x^2+1}{x-2}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\left(x^2-1\right)\left(x-2\right)-\left(x^2+1\right)\left(x+2\right)}{\left(x+2\right)\left(x-2\right)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x^2-x+2-\left(x^3+2x^2+x+2\right)}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^3}-2x^2-x+\cancel{2}-\cancel{x^3}-2x^2-x-\cancel{2}}{x^2-4}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-4x^2-2x}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{4x^2}{x^2}-2\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-4-2\frac{1}{x}}{1-\frac{4}{x^2}}=\frac{-4-2\frac{1}{\infty}}{1-\frac{4}{\infty}}=\frac{-4}{1}=\boxed{-4}$$

4.- (2 puntos) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible determinado e indeterminado.

$$\begin{cases} x+(a+1)y+z=a \\ x+y+(a+1)z=a \\ (a+1)x+y+z=a \end{cases}$$

Consideramos la matriz de coeficientes A asociada al sistema $A=\begin{pmatrix} 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \\ a+1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Y la matriz ampliada $A/B=\begin{pmatrix} 1 & a+1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a+1 & a \\ a+1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$.

Calculamos el determinante de A y comprobamos cuando se anula.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \\ a+1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1+(a+1)^3+1-(a+1)-(a+1)-(a+1)=$$

$$=1+(a+1)^3+1-3a-3=-1-3a+a^3+3a^2+3a+1=a^3+3a^2$$

$$|A|=0\Rightarrow a^3+3a^2=0\Rightarrow a^2(a+3)=0\Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a+3=0\rightarrow a=-3 \end{cases}$$

Estudiamos tres situaciones diferentes.

CASO 1. $a\neq 0;\ a\neq -3$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3 al igual que el de la matriz ampliada A/B e igual que el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado y tiene una única solución.

Lo resolvemos utilizando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & a+1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a+1 & a \\ a+1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}\Rightarrow \left\{\begin{array}{llll} Fila\,2^a & -\,Fila\,1^a & & \\ 1 & 1 & a+1 & a \\ -1 & -a-1 & -1 & -a \\ \hline 0 & -a & a & 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{llll} Fila\,3^a & -Fila\,1^a & & \\ a+1 & 1 & 1 & a \\ -1 & -a-1 & -1 & -a \\ \hline a & -a & 0 & 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 1 & a \\ 0 & -a & a & 0 \\ a & -a & 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} x+(a+1)y+z=a \\ -ay+az=0 \\ ax-ay \quad =0 \end{array}\right\} \Rightarrow \{a\neq 0\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+(a+1)y+z=a \\ -y+z=0 \\ x-y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+(a+1)y+z=a \\ z=y \\ x=y \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y+(a+1)y+y=a \Rightarrow (a+3)y=a \Rightarrow \{a\neq -3\} \Rightarrow \boxed{y=\frac{a}{a+3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=y=z=\frac{a}{a+3}}$$

La solución cuando el sistema es compatible determinado ($a\neq 0;\ a\neq -3$) es $x=y=z=\dfrac{a}{a+3}$.

CASO 2. $a=0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
Determinamos la compatibilidad del sistema usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Fila\,2^a \quad -Fila\,1^a \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} Fila\,3^a \quad -Fila\,1^a \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones.

A partir de la matriz equivalente obtenida seguimos resolviendo el sistema,

$$x+y+z=1 \Rightarrow x=1-y-z \Rightarrow \begin{cases} x=1-\alpha-\beta \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{cases}$$

Las soluciones del sistema compatible indeterminado ($a=0$) es $\begin{cases} x=1-\alpha-\beta \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{cases}$ con $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$

CASO 3. $a=-3$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
Determinamos la compatibilidad del sistema usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & -3\\ 1 & 1 & -2 & -3\\ -2 & 1 & 1 & -3\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}Fila\,2^{a}\ -Fila\,1^{a}\\ \begin{array}{cccc}1 & 1 & -2 & -3\\ -1 & 2 & -1 & 3\\ \hline 0 & 3 & -3 & 0\end{array}\rightarrow \text{Nueva Fila } 2^{a}\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}Fila\,3^{a}\ +2\cdot Fila\,1^{a}\\ \begin{array}{cccc}-2 & 1 & 1 & -3\\ 2 & -4 & 2 & -6\\ \hline 0 & -3 & 3 & -9\end{array}\rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{a}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & -3\\ 0 & 3 & -3 & 0\\ 0 & -3 & 3 & -9\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}Fila\,3^{a}\ +Fila\,2^{a}\\ \begin{array}{cccc}0 & -3 & 3 & -9\\ 0 & 3 & -3 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & -9\end{array}\rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{a}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}\overbrace{\begin{matrix}\underbrace{\begin{matrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 3 & -3\\ 0 & 0 & 0\end{matrix}}_{A} & \begin{matrix}-3\\ 0\\ -9\end{matrix}\end{matrix}}^{A/B}\end{pmatrix}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Tienen rangos distintos.
El sistema es incompatible.

5.- (2 puntos) Dada una matriz de tamaño 4×4 cuyo determinante es igual a 2. Calcula el valor del determinante de la matriz resultante al realizar las siguientes operaciones:

(i) Se traspone la matriz.
(ii) Se cambian entre sí la primera y la cuarta columna.
(iii) Se multiplica la tercera columna por –4.
(iv) Se multiplica toda la matriz por 4.

Si llamamos A a la matriz del ejercicio tenemos que $|A|=2$.

(i) Por las propiedades de los determinantes tenemos que $|A|=|A^T|$.
El determinante de la matriz traspuesta es 2.

(ii) Por las propiedades de los determinantes sabemos que el determinante cambia de signo. El determinante valdría –2.

(iii) Por las propiedades de los determinantes tenemos que el determinante de la nueva matriz es el determinante de A multiplicado por –4, es decir, vale –8.

(iv) Por las propiedades de los determinantes tenemos que el determinante de la nueva matriz es el determinante de A multiplicado por $(4)^4$, por ser la matriz A de orden 4.
El determinante vale $(4)^4\cdot 2=512$

6.- (2 puntos) Determina para qué valores del parámetro real a la matriz A:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a-1 & a^2-1 & 1 \\ a^2-1 & a-1 & a+1 \end{pmatrix}$$

Tiene inversa. Calcula, si es posible, la matriz inversa de A para $a = 2$.

Para que tenga inversa la matriz debe tener determinante no nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a-1 & a^2-1 & 1 \\ a^2-1 & a-1 & a+1 \end{vmatrix}=\left(a^2-1\right)(a+1)+\left(a^2-1\right)-(a-1)(a+1)-(a-1)=$$

$$=(a-1)(a+1)(a+1)+(a-1)(a+1)-(a-1)(a+1)-(a-1)=$$

$$=(a-1)\left[(a+1)(a+1)+(a+1)-(a+1)-1\right]=$$

$$=(a-1)\left[a^2+2a+1+a+1-a-1-1\right]=$$

$$=(a-1)\left[a^2+2a\right]=(a-1)a(a+2)$$

$$|A|=0\Rightarrow(a-1)a(a+2)=0\Rightarrow\begin{cases} a=1 \\ a=0 \\ a=-2 \end{cases}$$

La matriz A tiene inversa cuando "a" es distinto de 0, 1 y –2.

Para $a = 2$ la matriz tiene inversa. La calculamos.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}\Rightarrow|A|=9+3-3-1=8\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}}{8}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -8 & 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -3/8 & 1/8 \\ 0 & 3/8 & -1/8 \\ -1 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}}$$

7.- (2 puntos) Determina la posición relativa de la recta

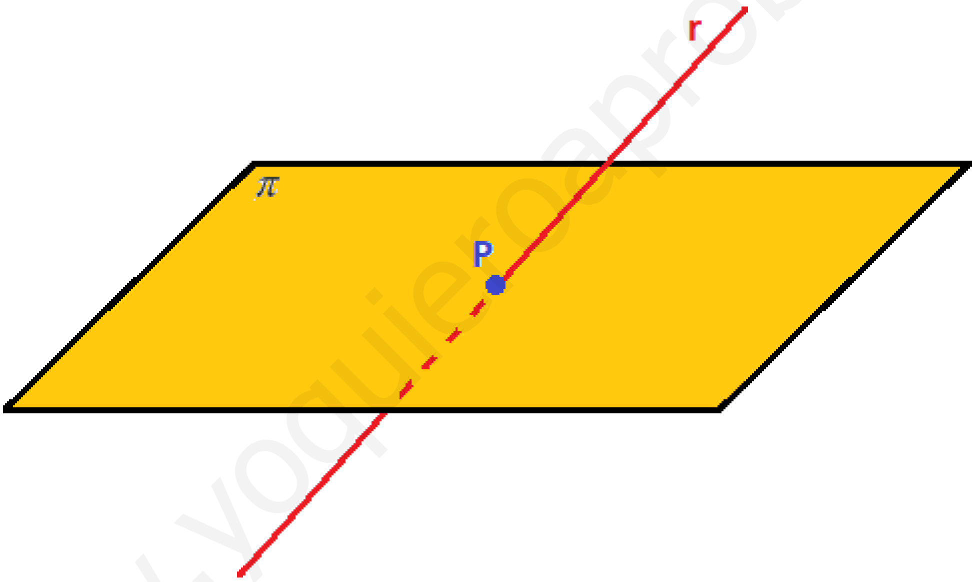
$$\frac{x-3}{0}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-5}{1}$$

y el plano de ecuación $3x+2y-11z+3=0$.

Obtenemos el vector director de la recta y el vector normal del plano. Comprobamos si son ortogonales o no (paralelos - coincidentes o secantes).

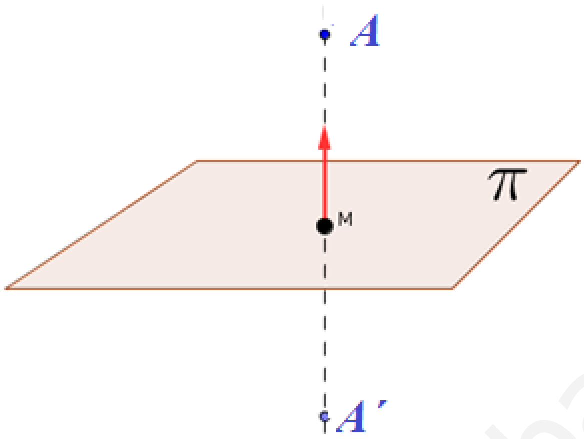
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x-3}{0}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-5}{1} \Rightarrow \vec{v}=(0,1,1) \\ \\ 3x+2y-11z+3=0 \Rightarrow \vec{n}=(3,2,-11) \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v}\cdot\vec{n}=(0,1,1)(3,2,-11)=2-11=-9\neq 0$$

Al ser el producto escalar distinto de 0 los vectores no son perpendiculares → plano y recta son secantes (coinciden en un punto).



8.- (2 puntos) Halla el punto simétrico del punto *A(0, 2, 3)* respecto al plano π de ecuación $x+y-z=4$

Nos piden hallar las coordenadas del punto A´ del dibujo.



Hallamos la recta *r* perpendicular al plano que pasa por el punto A. Esta recta tendrá como vector director el vector normal del plano.

$$\pi: x+y-z=4 \Rightarrow \vec{n}=(1,1,-1) \Rightarrow r:\begin{cases} \vec{v_r}=\vec{n}=(1,1,-1) \\ A(0,2,3)\in r \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} x=t \\ y=2+t \\ z=3-t \end{cases}$$

El punto M es la intersección de la recta *r* con el plano π.

$$\left.\begin{array}{l} \pi: x+y-z=4 \\ r:\begin{cases} x=t \\ y=2+t \\ z=3-t \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow t+2+t-3+t=4 \Rightarrow 3t=5 \Rightarrow t=\frac{5}{3} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{3} \\ y=2+\frac{5}{3}=\frac{11}{3} \\ z=3-\frac{5}{3}=\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{5}{3},\frac{11}{3},\frac{4}{3}\right)$$

El punto A´ simétrico de A respecto del plano es el resultado de sumar al punto M el vector $\overrightarrow{AM}$.

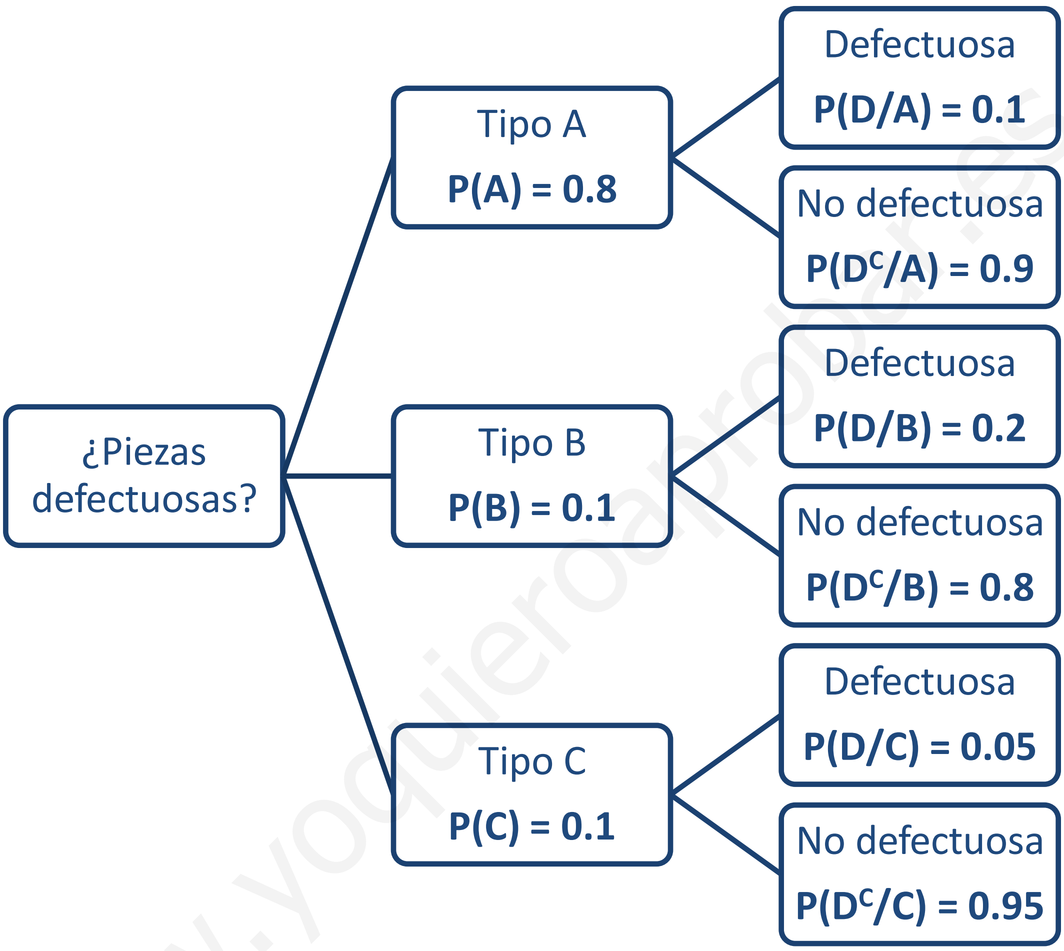
$$\overrightarrow{AM}=\left(\frac{5}{3},\frac{11}{3},\frac{4}{3}\right)-(0,2,3)=\left(\frac{5}{3},\frac{5}{3},\frac{-5}{3}\right)$$

$$A´=M+\overrightarrow{AM}=\left(\frac{5}{3},\frac{11}{3},\frac{4}{3}\right)+\left(\frac{5}{3},\frac{5}{3},\frac{-5}{3}\right)=\left(\frac{10}{3},\frac{16}{3},\frac{-1}{3}\right)$$

El punto simétrico es $A´\left(\frac{10}{3},\frac{16}{3},\frac{-1}{3}\right)$

9.- (2 puntos) En una empresa automovilística se ha recibido un lote de piezas de coches de tipos A, B y C. El 80 % corresponde al coche de tipo A, el 10 % al B y el resto al C. Se ha observado que hay piezas que están defectuosas en los siguientes porcentajes: el 10 % de A, el 20 % de B y el 5 % de C. Se elige una pieza al azar. Calcula:
(i) la probabilidad de coger una pieza defectuosa.
(ii) si sabemos que la pieza es defectuosa, la probabilidad de que sea del tipo A.

Hacemos un diagrama de árbol.



(i) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D) = P(A \cap D) + P(A \cap D) + P(A \cap D) =$$

$$= P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C) =$$

$$= 0.8 \cdot 0.1 + 0.1 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.05 = \boxed{0.105}$$

(ii) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0.8 \cdot 0.1}{0.105} = \boxed{\frac{16}{21} \simeq 0.7619}$$

10.- (2 puntos) La edad media de un jugador de la NBA sigue una distribución normal de media 26 años y desviación típica 5 años. Si se elige un jugador al azar, halla:

(i) La probabilidad de que su edad sea superior o igual a 31 años.
(ii) La probabilidad de que su edad esté entre 21 y 31 años.

(Véase la tabla simplificada de la normal tipificada que aparece al final del examen)

X = Edad de un jugador de la NBA.
X = N(26, 5)

(i) Nos piden $P(X \geq 31)$.

$$P(X \geq 31) = \{Tipificamos\} = P\left(Z \geq \frac{31-26}{5}\right) = P(Z \geq 1) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1) = \left\{\begin{matrix}\text{Buscamos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\} = 1 - 0.8413 = \boxed{0.1587}$$

(ii) Nos piden $P(21 \leq X \leq 31)$.

$$P(21 \leq X \leq 31) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{21-26}{5} \leq Z \leq \frac{31-26}{5}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1) =$$

$$= P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 1) - P(Z \geq 1) = P(Z \leq 1) - [1 - P(Z \leq 1)] =$$

$$= 2P(Z \leq 1) - 1 = \left\{\begin{matrix}\text{Buscamos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\} = 2 \cdot 0.8413 - 1 = \boxed{0.6826}$$