

MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, **solo serán corregidas las 5 primeras respondidas**.

1. Números y Álgebra:

a) Calcule A si $(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Si $A = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ es invertible, obtenga los valores de x , y y z sabiendo que $\det(A - 3I) = 0$,

que $y \neq 0$ y que $(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Entiéndase que I es la matriz identidad.

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m , el sistema

$$\begin{cases} (m+1)x & + & z = 1 \\ (m+1)x & + & y & + & z = m+1 \\ (m+1)x & + & my & + & (m-1)z = m \end{cases}$$

3. Análisis

a) Enuncie los teoremas de Rolle y del valor medio del cálculo diferencial.

b) Explique si $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, está o no en las hipótesis del teorema del valor medio del cálculo diferencial. En caso de que lo esté, calcule un valor c para el cual se cumpla la tesis de ese teorema.

4. Análisis:

a) Calcule mediante cambio de variable las integrales $\int (\sin x)^5 \cos x dx$ y $\int (\ln x) / x dx$.

b) Calcule $\int (\ln x) / x dx$ empleando el método de integración por partes. Luego, obtenga algún valor de B tal que $\int_e^B (\ln x) / x dx = 3/2$.

5. Geometría:

a) Considérense el plano $\pi : ax + y + z = 1$, donde a es un parámetro real, y la recta

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{3}$$

Estudie la posición relativa de π y r en función de a y obtenga el valor de a que hace que π y r sean perpendiculares. Por último, razone si r puede estar contenida en π o no.

b) Si $\pi : -3x + y + z = 1$, diga qué valor tiene que tomar b para que $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y-b}{3} = \frac{z+1}{3}$ esté contenida en π .

6. Geometría:

Considérese el plano $\pi : 2x - y + z = 1$. Se pide:

a) Calcular la distancia de π al punto de corte de las rectas $r_1 : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 0 \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$ y

$$r_2 : \begin{cases} x = \mu \\ y = -1 + \mu, (\lambda, \mu \in \mathbb{R}), (\lambda, \mu \in \mathbb{R}). \\ z = 0 \end{cases}$$

b) Obtener el punto simétrico de $P(1,0,0)$ con respecto a π .

7. Estadística y Probabilidad:

a) Calcule $P(A|B)$ si $B \subset A$. Luego, si $P(C) = 0.5$ y $P(D) = 0.6$, explique si C y D pueden ser incompatibles. Por último, obtenga $P(E \cup F)$ y $P(E \cap \bar{F})$ si E y F son independientes, $P(E) = 0.3$ y $P(F) = 0.2$.

b) Se tira un dado siete veces. Calcule la probabilidad de que salgan exactamente dos seises.

8. Estadística y Probabilidad:

Para un determinado grupo de pacientes, la tensión arterial sistólica (medida en mmHg) sigue una distribución normal de media 123.6 y desviación típica 17.8. Calcule la probabilidad de que un paciente elegido al azar tenga una tensión comprendida entre 100 y 120 mmHg. Luego, obtenga el valor de la tensión que es superado por el 67% de los pacientes.

SOLUCIONES

1. Números y Álgebra:

a) Calcule A si $(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Si $A = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ es invertible, obtenga los valores de x, y y z sabiendo que $\det(A - 3I) = 0$, que $y \neq 0$ y que $(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Entiéndase que I es la matriz identidad.

a)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & a+b \\ c-d & c+d \end{pmatrix}$$

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a-b & c-d \\ a+b & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a-b=1 \\ c-d=0 \\ a+b=2 \\ c+d=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=b+1 \\ c=d \\ a+b=2 \\ c+d=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b+1+b=2 \rightarrow 2b=1 \rightarrow b=\frac{1}{2} \\ d+d=1 \rightarrow 2d=1 \rightarrow d=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2} \\ c=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

b) Se cumple que $\det(A - 3I) = 0$.

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z-3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - 3I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & x \\ y & z-3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -xy = 0 \Rightarrow \{y \neq 0\} \Rightarrow \boxed{x=0}$$

La matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ y & z \end{pmatrix}$. Se cumple que $(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

$$(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow (3z)A^{-1}A + I \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} A \Rightarrow (3z)I + A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ y & z \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3z & 0 \\ 0 & 3z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -3+4y & 4z \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3+3z & 0 \\ y & 4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -3+4y & 4z \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3+3z=6 \rightarrow 3z=3 \rightarrow \boxed{z=1} \\ 0=0 \\ y=-3+4y \rightarrow 3=3y \rightarrow \boxed{y=1} \\ 4z=4z \end{cases}$$

Los valores buscados son $x = 0$, $y = 1$, $z = 1$.

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m , el sistema

$$\begin{cases} (m+1)x & & + & & z = 1 \\ (m+1)x & + & y & + & z = m+1 \\ (m+1)x & + & my & + & (m-1)z = m \end{cases}$$

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} m+1 & 0 & 1 \\ m+1 & 1 & 1 \\ m+1 & m & m-1 \end{pmatrix}$, y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} m+1 & 0 & 1 & 1 \\ m+1 & 1 & 1 & m+1 \\ m+1 & m & m-1 & m \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula su determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} m+1 & 0 & 1 \\ m+1 & 1 & 1 \\ m+1 & m & m-1 \end{vmatrix} = (m+1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & m-1 \end{vmatrix} = (m+1)[m-1+m-1-m] = (m+1)(m-2)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow (m+1)(m-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m+1 = 0 \rightarrow m = -1 \\ m-2 = 0 \rightarrow m = 2 \end{cases}$$

Analizamos tres casos por separado.

CASO 1. $m \neq -1$ y $m \neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $m = -1$

El determinante de A es nulo. El sistema queda tan sencillo que lo resolvemos.

$$\begin{cases} \boxed{z = 1} \\ y + z = 0 \\ -y - 2z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + 1 = 0 \rightarrow \boxed{y = -1} \\ -y - 2 = -1 \rightarrow y = -1 \end{cases}$$

$$\text{Soluciones: } \begin{cases} x = t \\ y = -1, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{cases}$$

El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones)

CASO 3. $m = 2$

El determinante de A es nulo y su rango no es 3. Estudiamos el rango de A y de A/B usando el método de Gauss para obtener una matriz triangular equivalente.

$$A/B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 3 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \\ -3 \quad 0 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 2 \quad 0 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 3 \quad 1 \quad 1 \quad 3 \\ -3 \quad 0 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 1 \quad 0 \quad 2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 2 \quad 0 \quad 1 \\ 0 \quad -2 \quad 0 \quad -4 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{3 \quad 0 \quad 1 \quad 1}^{A/B} \\ 0 \quad 1 \quad 0 \quad 2 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad -3}_A \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es **incompatible**.

Resumiendo: Si $m \neq -1$ y $m \neq 2$ el sistema es compatible determinado, si $m = -1$ el sistema es compatible indeterminado y si $m = 2$ el sistema es incompatible.

3. Análisis

a) Enuncie los teoremas de Rolle y del valor medio del cálculo diferencial.

b) Explique si $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, está o no en las hipótesis del teorema del valor medio del cálculo diferencial. En caso de que lo esté, calcule un valor c para el cual se cumpla la tesis de ese teorema.

a) Enunciado del Teorema de Rolle:

Si $f(x)$ es una función que es **continua** en $[a, b]$, **derivable** en (a, b) y cumple que $f(a) = f(b)$, entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Enunciado del Teorema del valor medio.

Si $f(x)$ es una función real $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Si se cumple que $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y $f(x)$ es derivable en (a, b) , entonces se tiene que existe un punto $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

b) Esta función existe y es continua en el intervalo $[0, 1]$, pues el radicando es positivo.

Es derivable en $(0, 1)$.

La derivada de la función es $f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= \sqrt{1-1^2} = 0 \\ f(0) &= \sqrt{1-0^2} = 1 \\ f'(x) &= \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \\ c \in (0,1) / f'(c) &= \frac{f(1) - f(0)}{1-0} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{-c}{\sqrt{1-c^2}} = \frac{0-1}{1-0} = -1 \Rightarrow -c = -\sqrt{1-c^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{1-c^2} \Rightarrow c^2 = 1-c^2 \Rightarrow 2c^2 = 1 \Rightarrow c^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \{c \in (0,1)\} \Rightarrow \boxed{c = +\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

El valor buscado es $c = +\frac{\sqrt{2}}{2} \in (0,1)$

4. Análisis:

- a) Calcule mediante cambio de variable las integrales $\int (\sin x)^5 \cos x dx$ y $\int (\ln x) / x dx$.
- b) Calcule $\int (\ln x) / x dx$ empleando el método de integración por partes. Luego, obtenga algún valor de B tal que $\int_e^B (\ln x) / x dx = 3/2$.

a) La primera integral

$$\int (\sin x)^5 \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \sin x = t \rightarrow \cos x dx = dt \end{array} \right\} = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} = \frac{(\sin x)^6}{6} + K$$

La segunda integral

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \ln x = t \rightarrow \frac{1}{x} dx = dt \\ dx = x dt \end{array} \right\} = \int \frac{t}{x} x dt = \int t dt = \frac{t^2}{2} = \frac{(\ln x)^2}{2} + K$$

b) Usamos el método de integración por partes para obtener la expresión de la integral.

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Por partes} \\ \ln x = u \rightarrow \frac{1}{x} dx = du \\ dv = \frac{1}{x} dx \rightarrow v = \int \frac{1}{x} dx = \ln x \end{array} \right\} = (\ln x)(\ln x) - \int \ln x \frac{1}{x} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{\ln x}{x} dx = (\ln x)^2 - \int \ln x \frac{1}{x} dx \Rightarrow 2 \int \frac{\ln x}{x} dx = (\ln x)^2 \Rightarrow \int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + K$$

Calculamos la integral definida.

$$\int_e^B (\ln x) / x dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2} \right]_e^B = \left[\frac{(\ln B)^2}{2} \right] - \left[\frac{(\ln e)^2}{2} \right] = \frac{(\ln B)^2}{2} - \frac{1}{2}$$

Igualamos la expresión obtenida a 3/2 y determinamos el valor de B.

$$\int_e^B (\ln x) / x dx = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{(\ln B)^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{(\ln B)^2}{2} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow (\ln B)^2 = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln B = \sqrt{4} = \pm 2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \ln B = 2 \rightarrow B = e^2 \\ \ln B = -2 \rightarrow B = e^{-2} \end{array} \right.$$

Los valores buscados son $B = e^2$ y $B = e^{-2}$.

5. Geometría:

a) Considérense el plano $\pi : ax + y + z = 1$, donde a es un parámetro real, y la recta

$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{3}$. Estudie la posición relativa de π y r en función de a y obtenga el valor de a que hace que π y r sean perpendiculares. Por último, razone si r puede estar contenida en π o no.

b) Si $\pi : -3x + y + z = 1$, diga qué valor tiene que tomar b para que $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y-b}{3} = \frac{z+1}{3}$ esté contenida en π .

a) Obtenemos el vector director de la recta y el vector normal del plano.

$$\pi : ax + y + z = 1 \Rightarrow \vec{n} = (a, 1, 1)$$

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{3} \Rightarrow r : \begin{cases} \vec{v}_r = (2, 3, 3) \\ P_r(1, 0, -1) \end{cases}$$

Si los vectores son perpendiculares la recta y el plano son paralelos o la recta está contenida en el plano. En caso contrario son secantes (coinciden en un punto).

$$\left. \begin{matrix} \vec{n} = (a, 1, 1) \\ \vec{v}_r = (2, 3, 3) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v}_r = (a, 1, 1) \cdot (2, 3, 3) = 2a + 3 + 3 = 2a + 6$$

$$\vec{n} \cdot \vec{v}_r = 0 \Rightarrow 2a + 6 = 0 \Rightarrow 2a = -6 \Rightarrow \boxed{a = -3}$$

Analizamos que pasa si $a = -3$.

En este caso los vectores son perpendiculares y plano y recta son paralelos o la recta está contenida en el plano. Comprobamos si el punto $P_r(1, 0, -1)$ de la recta está en el plano.

$$\left. \begin{matrix} \pi : -3x + y + z = 1 \\ \text{¿} P_r(1, 0, -1) \in \pi \text{?} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \text{¿} -3 + 0 - 1 = 1 \text{? ¡¡No se cumple!!}$$

Para $a = -3$ la recta r y el plano π son paralelos.

Analizamos que pasa si $a \neq -3$.

Para $a \neq -3$ los vectores no son perpendiculares y la recta r y el plano π se cortan.

Buscamos para $a \neq -3$ un valor para el que recta y plano formen 90° . Para que esto ocurra deben tener coordenadas proporcionales el vector director de la recta y el vector normal del plano.

$$\left. \begin{matrix} \vec{n} = (a, 1, 1) \\ \vec{v}_r = (2, 3, 3) \\ \vec{n} \parallel \vec{v}_r \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{a = \frac{2}{3}}$$

Para $a = \frac{2}{3}$ recta y plano son secantes y además son perpendiculares.

La recta r solo puede ser paralela al plano ($a = -3$) o secante ($a \neq -3$).

La recta r no puede estar contenida en el plano.

- b) Para que la recta esté contenida en el plano deben cumplirse dos condiciones: 1ª el vector director de la recta y el normal del plano deben ser perpendiculares, 2ª un punto de la recta debe pertenecer al plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: -3x + y + z = 1 \rightarrow \vec{n} = (-3, 1, 1) \\ r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-b}{3} = \frac{z+1}{3} \rightarrow \vec{u}_r = (2, 3, 3) \\ \vec{n} \perp \vec{u}_r \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{u}_r = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (-3, 1, 1)(2, 3, 3) = 0 \Rightarrow -6 + 3 + 3 = 0 \quad \text{¡¡Se cumple!!}$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi: -3x + y + z = 1 \\ r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-b}{3} = \frac{z+1}{3} \rightarrow P_r(1, b, -1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow -3 + b - 1 = 1 \Rightarrow \boxed{b = 5}$$

El valor buscado es $b = 5$.

6. Geometría:

Considérese el plano $\pi : 2x - y + z = 1$. Se pide:

a) Calcular la distancia de π al punto de corte de las rectas $r_1 : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 0 \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$ y

$r_2 : \begin{cases} x = \mu \\ y = -1 + \mu, (\lambda, \mu \in \mathbb{R}), (\lambda, \mu \in \mathbb{R}). \\ z = 0 \end{cases}$

b) Obtener el punto simétrico de $P(1,0,0)$ con respecto a π .

a) Averiguamos el punto P de corte de las dos rectas.

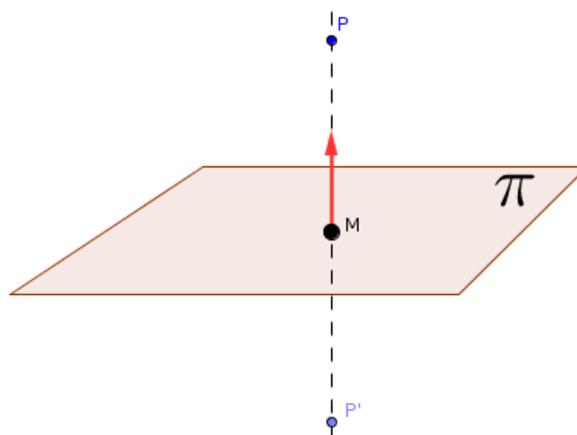
$$\begin{cases} r_1 : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 0 \\ z = -1 - \lambda \end{cases} \\ r_2 : \begin{cases} x = \mu \\ y = -1 + \mu \\ z = 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = 2 + \lambda \\ -1 + \mu = 0 \rightarrow \boxed{\mu = 1} \\ 0 = -1 - \lambda \rightarrow \boxed{\lambda = -1} \end{cases} \Rightarrow 1 = 2 - 1 \text{ ¡Se cumple!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 1 = 1 \\ y = 0 \\ z = -1 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(1,0,0)}$$

Hallamos la distancia del punto P al plano $\pi : 2x - y + z = 1$.

$$\left. \begin{matrix} \pi : 2x - y + z - 1 = 0 \\ P(1,0,0) \end{matrix} \right\} \Rightarrow d(P, \pi) = \frac{|2 - 0 + 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6} \approx 0.408 \text{ unidades}$$

b) Nos piden hallar las coordenadas del punto P' del dibujo.



Hallamos la recta perpendicular al plano que pasa por el punto P. Esta recta tendrá como vector director el vector normal del plano.

$$\pi : 2x - y + z = 1 \Rightarrow \vec{n} = (2, -1, 1) \Rightarrow r : \begin{cases} \vec{v}_r = \vec{n} = (2, -1, 1) \\ P(1, 0, 0) \in r \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = -\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

El punto M es la intersección de la recta r con el plano π .

$$\pi : 2x - y + z = 1 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = -\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \Rightarrow 2(1 + 2\alpha) - (-\alpha) + \alpha = 1 \Rightarrow 2 + 4\alpha + \alpha + \alpha = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = \frac{-1}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2 \frac{-1}{6} = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{-1}{6} = \frac{1}{6} \\ z = \frac{-1}{6} \end{cases} \Rightarrow M \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{-1}{6} \right)$$

El punto P' simétrico de P respecto del plano es el resultado de sumar al punto M el vector \overrightarrow{PM} .

$$\overrightarrow{PM} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{-1}{6} \right) - (1, 0, 0) = \left(\frac{-1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{-1}{6} \right)$$

$$P' = M + \overrightarrow{PM} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{-1}{6} \right) + \left(\frac{-1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{-1}{6} \right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3} \right)$$

El punto simétrico es $P' \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3} \right)$

7. a) Calcule $P(A|B)$ si $B \subset A$. Luego, si $P(C) = 0.5$ y $P(D) = 0.6$, explique si C y D pueden ser incompatibles. Por último, obtenga $P(E \cup F)$ y $P(E \cap \bar{F})$ si E y F son independientes, $P(E) = 0.3$ y $P(F) = 0.2$.

b) Se tira un dado siete veces. Calcule la probabilidad de que salgan exactamente dos seises.

a) Si $B \subset A$ entonces $B \cap A = B$.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = \boxed{1}$$

Dos sucesos C y D son incompatibles si su intersección es vacía y por tanto $P(C \cap D) = 0$

Si los suponemos incompatibles tenemos que $P(C \cap D) = 0$.

$$P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D) \Rightarrow P(C \cup D) = 0.5 + 0.6 - 0 = 1.1 > 1 \quad \text{¡¡Imposible!}$$

Los sucesos C y D son compatibles.

Al ser los sucesos E y F independientes se cumple que $P(E \cap F) = P(E)P(F)$.

$$P(E \cap F) = P(E)P(F) = 0.3 \cdot 0.2 = 0.06$$

Calculamos $P(E \cup F)$.

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) = 0.3 + 0.2 - 0.06 = \boxed{0.44}$$

Calculamos $P(E \cap \bar{F})$.

$$P(E) = P(E \cap F) + P(E \cap \bar{F}) \Rightarrow 0.3 = 0.06 + P(E \cap \bar{F}) \Rightarrow P(E \cap \bar{F}) = 0.3 - 0.06 = \boxed{0.24}$$

b) La variable X que cuenta el número de seises que salen al lanzar 7 veces un dado es una variable binomial con parámetros $n = 7$ y $p = P(\text{Sacar un 6 al lanzar un dado}) = 1/6$.
 $X = B(7, 1/6)$

Nos piden calcular $P(X = 2)$. Lo calculamos.

$$P(X = 2) = \binom{7}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \boxed{0.234}$$

8. Estadística y Probabilidad:

Para un determinado grupo de pacientes, la tensión arterial sistólica (medida en mmHg) sigue una distribución normal de media 123.6 y desviación típica 17.8. Calcule la probabilidad de que un paciente elegido al azar tenga una tensión comprendida entre 100 y 120 mmHg. Luego, obtenga el valor de la tensión que es superado por el 67% de los pacientes.

X es la variable que da la tensión arterial sistólica (medida en mmHg).

$$X = N(123.6, 17.8)$$

Nos piden hallar $P(100 \leq X \leq 120)$.

$$\begin{aligned} P(100 \leq X \leq 120) &= P(X \leq 120) - P(X \leq 100) = \{Tipificamos\} = \\ &= P\left(Z \leq \frac{120 - 123.6}{17.8}\right) - P\left(Z \leq \frac{100 - 123.6}{17.8}\right) = P(Z \leq -0.20) - P(Z \leq -1.33) = \\ &= P(Z \geq 0.2) - P(Z \geq 1.33) = 1 - P(Z \leq 0.2) - [1 - P(Z \leq 1.33)] = \\ &= P(Z \leq 1.33) - P(Z \leq 0.2) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.9082 - 0.5793 = \boxed{0.3289} \end{aligned}$$

También nos piden hallar “a” tal que $P(X \geq a) = 0.67$.

$$\begin{aligned} P(X \geq a) = 0.67 &\Rightarrow \{Tipificamos\} \Rightarrow P\left(\frac{X - 123.6}{17.8} \geq \frac{a - 123.6}{17.8}\right) = 0.67 \Rightarrow \\ &\Rightarrow P\left(Z \geq \frac{a - 123.6}{17.8}\right) = 0.67 > 0.5 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{a - 123.6}{17.8} \text{ Es negativo} \end{array} \right\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow P\left(Z \leq -\frac{a - 123.6}{17.8}\right) = P\left(Z \geq \frac{a - 123.6}{17.8}\right) = 0.67 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{a - 123.6}{17.8} = 0.44 \Rightarrow a - 123.6 = -0.44 \cdot 17.8 \Rightarrow \\ &\Rightarrow a = 123.6 - 0.44 \cdot 17.8 \Rightarrow \boxed{a = 115.768 \text{ mmHg}} \end{aligned}$$

La tensión debería ser superior a 115.768 mmHg.