Universidad de Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)
***Curso 2022-2023***

# MATEMÁTICAS

- Responde en el pliego del examen a **cuatro preguntas cualesquiera** de entre las ocho que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2.5 puntos**.
- Indique en el pliego del examen la **agrupación de preguntas que responderá**: agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s).

---

**Problema 1.** Sea $a \in \mathbb{R}$ y $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

(a) **(0.75 puntos)** Calcula el determinante y el rango de P para cada valor de a.
(b) **(1 punto)** Para a = 1 ¿existe $P^{-1}$? En caso afirmativo calcúlala.
(c) **(0.75 puntos)** Para a = 1, calcula det(M) sabiendo que $PM = M^2$.

---

**Problema 2.** Dado $a \in \mathbb{R}$, se considera el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left.\begin{aligned} x - y + az &= -1 \\ 2x + y \quad &= 1 \\ y + 2z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

(a) **(1 punto)** Discute el sistema según los valores de a.
(b) **(0.75 puntos)** Resuelve el sistema para el caso $a = -3$ si es posible.
(c) **(0.75 puntos)** Encuentra, en caso de que exista, un valor de a que verifique $x = 1$. Calcula la solución en ese caso.

---

**Problema 3.** Sean $A, B \in \mathbb{R}$ y $f(x) = \dfrac{x^2 + A}{Bx - 1}$. Se pide:

(a) **(0.75 puntos)** Calcular A y B para que la gráfica de la función pase por el punto (0,–3) y tenga un extremo relativo en $x = -1$.
(b) **(1.25 puntos)** Para los valores de A = 3 y B = 1, estudia si la función tiene asíntotas y extremos relativos.
(c) **(0.5 puntos)** Para los valores A = 3 y B = 1, y basándose en los resultados obtenidos en el apartado anterior, realice un esbozo de la función.

---

**Problema 4. (2.5 puntos)** Se considera la función $f(x) = xe^{2x^2}$. Se pide:

(a) **(1.5 puntos)** Calcula una primitiva de f(x), que pase por el punto (0,–1). (Sugerencia: Puedes utilizar el cambio de variable $t = 2x^2$)
(b) **(1 punto)** Calcula el área encerrada por la gráfica de f, las rectas x = 0 y x = 1.

Universidad de Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad (EBAU)
***Curso 2022-2023***

**Problema 5.** Sea *s* la recta de ecuación $x-2=\frac{y-2}{-1}=z$ y *r* la recta que pasa por los puntos A=(1,0,1) y B=(2,1,2).
(a) **(1 punto)** Indica la posición relativa de *r* y *s*.
(b) **(0.75 puntos)** Calcula el plano paralelo a *r* y que contiene a *s*.
(c) **(0.75 puntos)** Calcula la distancia entre las rectas *r* y *s*.

**Problema 6.** Dados los planos $\pi \equiv x+y+z=3$, $\pi' \equiv x+y=3$ y el punto A=(2,1,6)

(a) **(0.75 puntos)** Calcula un vector director y un punto de la recta *r* intersección de los planos π y π´.
(b) **(1 punto)** Calcula el punto P de π tal que el segmento AP es perpendicular al plano π.
(c) **(0.75 puntos)** Calcula el punto A´ simétrico de A respecto del plano π.

**Problema 7.** Una imprenta compra la tinta a dos empresas distintas. En la empresa A compra el 60% de sus pedidos, y el resto a la empresa B. Se observa que el 1.6% de las cajas de tinta de la empresa A llegan con defecto, mientras que de la empresa B sólo el 0.9% son defectuosas. Se toma una caja al azar:
(a) **(1.25 punto)** Calcula la probabilidad de que la caja sea defectuosa.
(b) **(1.25 puntos)** Si la caja seleccionada no es defectuosa, calcule la probabilidad de que se haya comprado a la empresa A.

**Problema 8.** Las calificaciones de la asignatura Análisis Matemático I de la Facultad de Matemáticas siguen una distribución N(5, 2).
(a) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que un estudiante haya obtenido una nota mayor o igual que 7.5.
(b) **(0.75 puntos)** Calcula la probabilidad de que un estudiante haya obtenido una nota entre 3 y 5.
(c) **(1 punto)** Se modifica sistema de enseñanza de forma que la desviación típica ahora es 1.5 y la probabilidad de obtener una nota menor o igual que 6, sea 0.52. ¿Cuál sería la nueva media? ¿Ha funcionado el sistema aplicado?

* Algunos valores de la función de distribución N(0, 1) son: F(x) = P(Z ≤ x), F(0) = 0.5, F(1.25) = 0.8944, F(0.05) = 0.52, F(0.52) = 0.6985, F(0.8944) = 0.8133, F(1) = 0.8413.

## SOLUCIONES:

**Problema 1.** Sea $a \in \mathbb{R}$ y $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

(a) **(0.75 puntos)** Calcula el determinante y el rango de P para cada valor de a.
(b) **(1 punto)** Para a = 1 ¿existe $P^{-1}$? En caso afirmativo calcúlala.
(c) **(0.75 puntos)** Para a = 1, calcula det(M) sabiendo que PM = $M^2$.

(a)

$$|P| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -2+0+2a-0-2-0 = 2a-4$$

El rango de P es 3 si su determinante es no nulo.

$$|P| = 0 \Rightarrow 2a-4=0 \Rightarrow 2a=4 \Rightarrow \boxed{a=2}$$

Si $a \neq 2$ el determinante de P es no nulo y su rango es 3.

Si $a = 2$ el determinante de P es nulo y su rango no es 3. Averiguamos su rango.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

¿El rango de A es 2?
Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 3ª y calculamos su determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1+1 = 2 \neq 0$$

Si $a = 2$ el rango de P es 2.

*Resumiendo*: Si $a \neq 2$ el rango de P es 3 y si $a = 2$ el rango de P es 2.

(b)Para $a = 1$ la matriz P queda $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ y su determinante vale $2 \cdot 1 - 4 = -2 \neq 0$, por lo que existe la inversa de P. La calculamos.

$$P^{-1} = \frac{Adj\left(P^T\right)}{|P|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}}{-2} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{P^{-1} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ -1 & 1 & -1/2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

(c) Aplicando las propiedades de los determinantes tenemos que:

$$|PM| = |M^2| \Rightarrow |P|\cdot|M| = |M|^2 \Rightarrow |P|\cdot|M| = |M|\cdot|M| \Rightarrow \begin{cases} |M| \neq 0 \to |P| = |M| \to |M| = -2 \\ o \\ |M| = 0 \end{cases}$$

El determinante de la matriz M vale 0 o –2.

**Problema 2.** Dado $a \in \mathbb{R}$, se considera el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x - y + az = -1 \\ 2x + y \qquad = 1 \\ y + \ 2z = 1 \end{array}\right\}$$

(a) **(1 punto)** Discute el sistema según los valores de a.
(b) **(0.75 puntos)** Resuelve el sistema para el caso $a = -3$ si es posible.
(c) **(0.75 puntos)** Encuentra, en caso de que exista, un valor de a que verifique $x = 1$. Calcula la solución en ese caso.

a) La matriz de coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 0 + 2a - 0 + 4 + 0 = 2a + 6$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 2a + 6 = 0 \Rightarrow 2a = -6 \Rightarrow \boxed{a = -3}$$

Analizamos dos casos por separado.

CASO 1. Si $a \neq -3$.
En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. Si $a = -3$.
En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Analizamos el sistema utilizando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{rrrr} 2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 6 & 2 \\ \hline 0 & 3 & 6 & 3 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 2^a \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 3 \cdot \text{Fila } 3^a \\ \begin{array}{rrrr} 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & -1 & -3 & -1 \end{matrix}}^{A/B} \\ \begin{matrix} 0 & 3 & 6 & 3 \end{matrix} \\ \underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A} \ \ 0 \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2, al igual que el de A/B, pero es menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Para $a = -3$ el sistema es compatible indeterminado. Hallamos sus soluciones a partir del sistema triangular equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x-y-3z=-1 \\ 3y+6z=3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x-y-3z=-1 \\ y+2z=1 \rightarrow y=1-2z \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-1+2z-3z=-1 \Rightarrow x=z \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=\lambda \\ y=1-2\lambda, \ \lambda \in \mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}}$$

c) Si $a = -3$ en la expresión de las soluciones obtenida en el apartado anterior tomamos $\lambda = 1$ y la solución del sistema queda $\begin{cases} x=1 \\ y=1-2=-1 \\ z=1 \end{cases}$

**Problema 3.** Sean $A, B \in \mathbb{R}$ y $f(x) = \dfrac{x^2 + A}{Bx - 1}$. Se pide:

(a) **(0.75 puntos)** Calcular A y B para que la gráfica de la función pase por el punto (0,–3) y tenga un extremo relativo en $x = -1$.

(b) **(1.25 puntos)** Para los valores de A = 3 y B = 1, estudia si la función tiene asíntotas y extremos relativos.

(c) **(0.5 puntos)** Para los valores A = 3 y B = 1, y basándose en los resultados obtenidos en el apartado anterior, realice un esbozo de la función.

(a) Si la gráfica de la función pasa por el punto (0,–3) entonces f(0) = –3.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \dfrac{x^2 + A}{Bx - 1} \\ f(0) = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow -3 = \frac{0^2 + A}{B \cdot 0 - 1} \Rightarrow -3 = -A \Rightarrow \boxed{A = 3}$$

Si la función tiene un extremo relativo en $x = -1$ entonces $f´(-1) = 0$.

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{Bx - 1} \Rightarrow f´(x) = \frac{2x(Bx - 1) - (x^2 + 3)B}{(Bx - 1)^2} = \frac{2Bx^2 - 2x - Bx^2 - 3B}{(Bx - 1)^2} = \frac{Bx^2 - 2x - 3B}{(Bx - 1)^2}$$

$$f´(-1) = 0 \Rightarrow \frac{B(-1)^2 - 2(-1) - 3B}{(B(-1) - 1)^2} = 0 \Rightarrow \frac{B + 2 - 3B}{(-B - 1)^2} = 0 \Rightarrow \frac{2 - 2B}{(-B - 1)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 - 2B = 0 \Rightarrow -2B = -2 \Rightarrow \boxed{B = 1}$$

Los valores buscados son A = 3 y B = 1.

(b) Para los valores de A = 3 y B = 1 la función queda $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x - 1}$

Ya tiene un punto crítico en $x = -1$, visto en el apartado anterior.
Averiguamos si tiene alguno más.

$$\left.\begin{array}{l} f´(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2} \\ f´(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-3)}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \dfrac{2 + 4}{2} = \boxed{3 = x} \\ \dfrac{2 - 4}{2} = \boxed{-1 = x} \end{cases}$$

Comprobamos si son máximos o mínimos sustituyendo en la segunda derivada.

$$f'(x)=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} \Rightarrow f''(x)=\frac{(2x-2)(x-1)^2-2(x-1)(x^2-2x-3)}{(x-1)^4}$$

$$f''(x)=\frac{(2x-2)(x-1)-2(x^2-2x-3)}{(x-1)^3}$$

$$f''(-1)=\frac{(-2-2)(-1-1)-2\left((-1)^2-2(-1)-3\right)}{(-1-1)^3}=\frac{8}{-8}=-1<0 \rightarrow \text{Máximo}$$

$$f''(3)=\frac{(6-2)(3-1)-2(3^2-6-3)}{(3-1)^3}=\frac{8}{8}=1>0 \rightarrow \text{Mínimo}$$

La función presenta un máximo en $x = -1$ y un mínimo en $x = 3$.

Hallamos sus asíntotas.

El dominio de la función $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-1}$ es $\mathbb{R}-\{1\}$.

**Asíntota vertical**. $x = a$

¿ $x=1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3}{x-1}=\frac{4}{0}=\infty$$

$x=1$ es asíntota vertical

**Asíntota horizontal**. $y = b$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3}{x^2}}{\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{3}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{1+\frac{3}{\infty}}{\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty}}=\frac{1+0}{0-0}=\frac{1}{0}=\infty$$

No tiene asíntota horizontal.

**Asíntota oblicua**. $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+3}{x-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{x^2-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{1+0}{1-0}=1$$

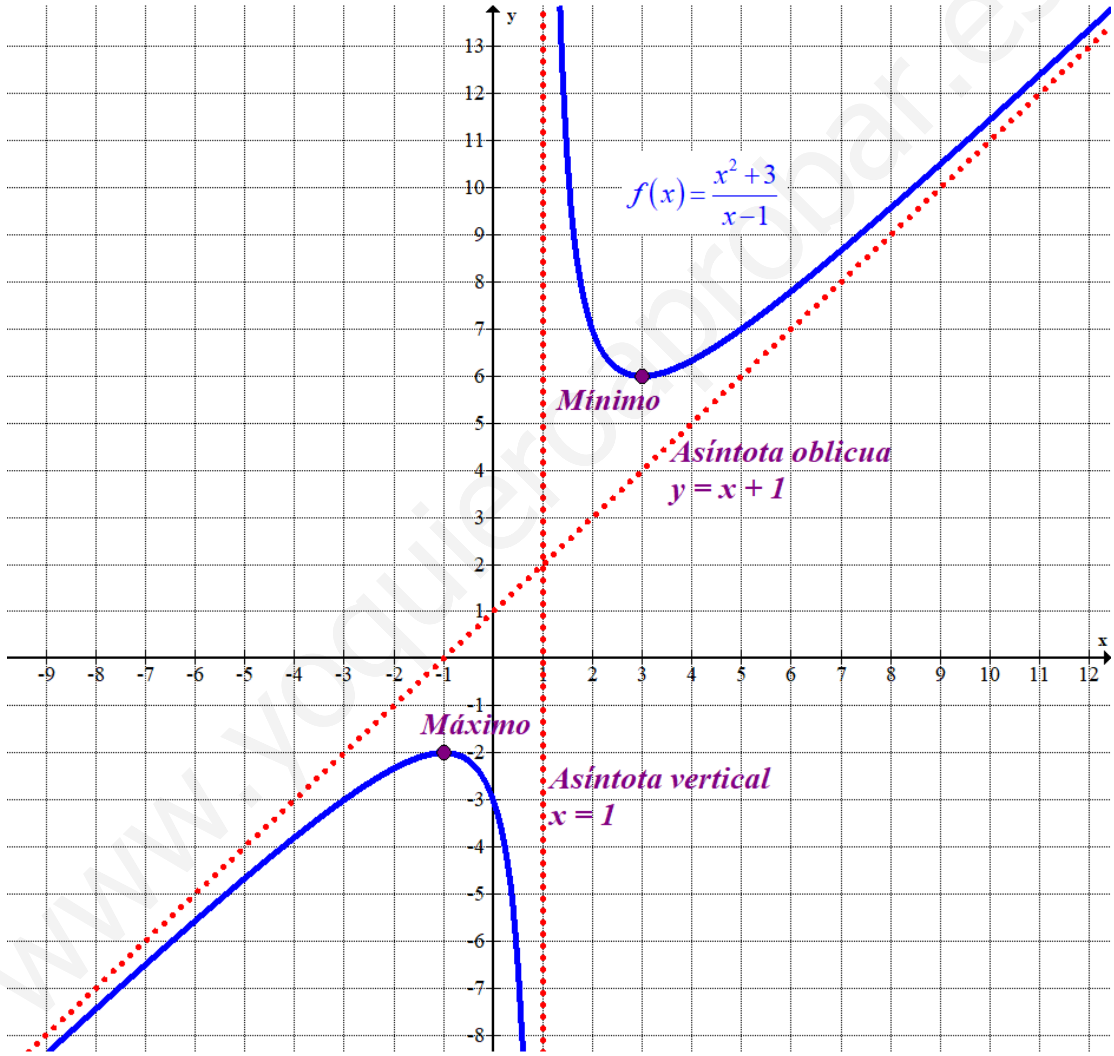
$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3-x^2+x}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+3}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}+\frac{3}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{3}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{1+0}{1-0}=1$$

$y=x+1$ es asíntota oblicua.

(c) Obtenemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función.

| $x$ | $y=\dfrac{x^2+3}{x-1}$ |
|---|---|
| $-2$ | $-7/3$ |
| $-1$ | $-2$ Máximo |
| $0$ | $-3$ |
| $2$ | $7$ |
| $3$ | $6$ Mínimo |
| $4$ | $19/3$ |



**Problema 4. (2.5 puntos)** Se considera la función $f(x)=xe^{2x^2}$. Se pide:

(a) **(1.5 puntos)** Calcula una primitiva de f(x), que pase por el punto (0,–1). (Sugerencia: Puedes utilizar el cambio de variable $t = 2x^2$)

(b) **(1 punto)** Calcula el área encerrada por la gráfica de f, las rectas x = 0 y x = 1.

(a)

$$F(x)=\int f(x)dx=\int xe^{2x^2}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ 2x^2=t\rightarrow 4xdx=dt\\ dx=\dfrac{1}{4x}dt\end{array}\right\}=\int xe^t\frac{1}{4x}dt=\frac{1}{4}\int e^t dt=\frac{1}{4}e^t=\boxed{\frac{1}{4}e^{2x^2}+K}$$

Como la primitiva pasa por (0, –1) se debe cumplir $F(0) = -1$.

$$\left.\begin{array}{l}F(x)=\dfrac{1}{4}e^{2x^2}+K\\ F(0)=-1\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{1}{4}e^{2\cdot 0^2}+K=-1\Rightarrow \frac{1}{4}+K=-1\Rightarrow K=-1-\frac{1}{4}=\frac{-5}{4}$$

La primitiva buscada es $F(x)=\frac{1}{4}e^{2x^2}-\frac{5}{4}$.

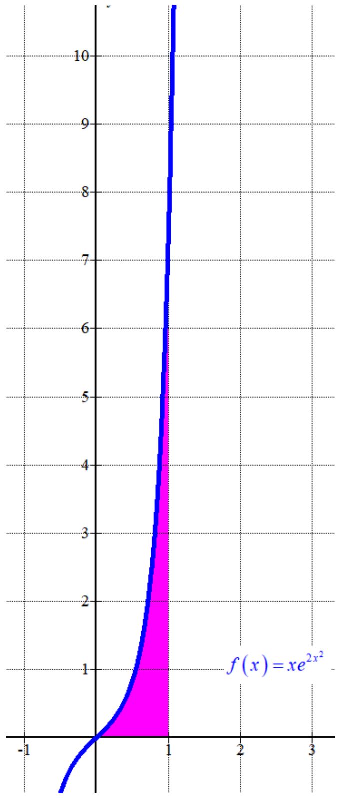
(b)Averiguamos los puntos de corte de la gráfica con el eje de abscisas (y = 0).

$$\left.\begin{array}{l}f(x)=xe^{2x^2}\\ y=0\end{array}\right\}\Rightarrow xe^{2x^2}=0\Rightarrow\left\{e^{2x^2}\neq 0\right\}\Rightarrow\boxed{x=0}$$

Como el punto de corte está en una de las rectas el área se calcula como la integral definida entre 0 y 1 de la función.

$$Área=\int_0^1 xe^{2x^2}dx=\left[\frac{1}{4}e^{2x^2}\right]_0^1=$$

$$=\left[\frac{1}{4}e^{2\cdot 1^2}\right]-\left[\frac{1}{4}e^{2\cdot 0^2}\right]=\boxed{\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{4}\simeq 1.597\ u^2}$$



**Problema 5.** Sea $s$ la recta de ecuación $x-2=\frac{y-2}{-1}=z$ y $r$ la recta que pasa por los puntos A=(1,0,1) y B=(2,1,2).
(a) **(1 punto)** Indica la posición relativa de $r$ y $s$.
(b) **(0.75 puntos)** Calcula el plano paralelo a $r$ y que contiene a $s$.
(c) **(0.75 puntos)** Calcula la distancia entre las rectas $r$ y $s$.

(a) Hallamos la ecuación, el vector director y un punto de la recta $r$.

$$\left.\begin{array}{l} A(1,0,1)\in r \\ B(2,1,2)\in r \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A(1,0,1)\in r \\ \overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{AB}=(2,1,2)-(1,0,1)=(1,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow r\equiv\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=\lambda \quad ,\ \lambda\in\mathbb{R} \\ z=1+\lambda \end{cases}$$

El vector director de la recta $s\equiv\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{1}$ es $\overrightarrow{u_s}=(1,-1,1)$.

Las coordenadas de los vectores directores de las rectas no son proporcionales, por lo que las rectas no son ni paralelas ni coincidentes.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s}=(1,-1,1) \\ \overrightarrow{v_r}=(1,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{1}\neq\frac{-1}{1}\neq\frac{1}{1}$$

Las rectas se cortan o cruzan. Determinamos su posición relativa calculando el valor del producto mixto $\left[\overrightarrow{u_s},\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{AC}\right]$, siendo C un punto de la recta $s$.

$$s\equiv\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{1}\Rightarrow C(2,2,0)$$

$$\overrightarrow{AC}=(2,2,0)-(1,0,1)=(1,2,-1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s}=(1,-1,1) \\ \overrightarrow{v_r}=(1,1,1) \\ \overrightarrow{AC}=(1,2,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{u_s},\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{AC}\right]=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=-1-1+2-1-1-2=-4\neq 0$$

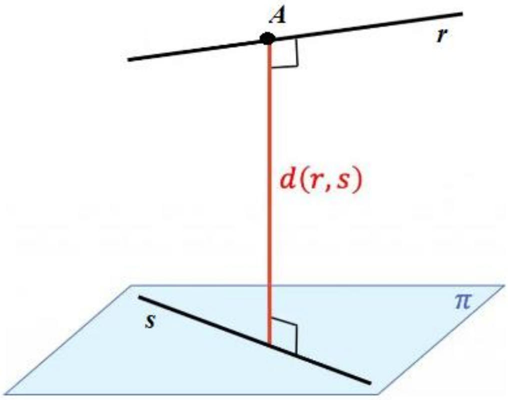
Al ser este producto mixto no nulo las rectas se cruzan (rectas no paralelas sin punto en común).

(b) El plano paralelo a $r$ y que contiene a $s$ tiene como vectores directores los vectores directores de las rectas y contiene el punto C(2,2,0) de la recta $s$.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}=\overrightarrow{u_s}=(1,-1,1) \\ \vec{v}=\overrightarrow{v_r}=(1,1,1) \\ C(2,2,0)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \pi\equiv\begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x+2+y-2+z+z-y+2-x+2=0\Rightarrow -2x+2z+4=0\Rightarrow \boxed{\pi\equiv x-z-2=0}$$

(c) La distancia entre las rectas $r$ y $s$ que se cruzan es la distancia de un punto de la recta $r$ al plano π hallado en el apartado anterior.




$$\left.\begin{array}{l}\pi \equiv x-z-2=0 \\ A(1,0,1)\in r\end{array}\right\} \Rightarrow d(r,s)=d(r,\pi)=d(A,\pi)=\frac{|1-1-2|}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\boxed{\sqrt{2}\ u}$$

**Problema 6.** Dados los planos $\pi \equiv x+y+z=3,\ \pi' \equiv x+y=3$ y el punto A=(2,1,6)

(a) **(0.75 puntos)** Calcula un vector director y un punto de la recta *r* intersección de los planos π y π´.
(b) **(1 punto)** Calcula el punto P de π tal que el segmento AP es perpendicular al plano π.
(c) **(0.75 puntos)** Calcula el punto A´ simétrico de A respecto del plano π.

(a) Obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta *r* intersección de los planos π y π´.

$$r \equiv \left.\begin{array}{l} \pi \equiv x+y+z=3 \\ \pi' \equiv x+y=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=3 \\ y=3-x \end{array}\right\} \Rightarrow x+3-x+z=3 \Rightarrow z=0 \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=0 \end{cases}$$

$$r \equiv \begin{cases} \overrightarrow{u_r}=(1,-1,0) \\ P_r(0,3,0) \end{cases}$$

Un vector director de la recta *r* es $\overrightarrow{u_r}=(1,-1,0)$ y un punto es $P_r(0,3,0)$.

(b) Si el segmento AP es perpendicular al plano π el vector $\overrightarrow{AP}$ debe tener coordenadas proporcionales al vector normal del plano.

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x+y+z=3 \Rightarrow \vec{n}=(1,1,1) \\ \overrightarrow{AP}=(a,b,c)-(2,1,6)=(a-2,b-1,c-6) \\ \overrightarrow{AP} \parallel \vec{n} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a-2}{1}=\frac{b-1}{1}=\frac{c-6}{1} \Rightarrow$$

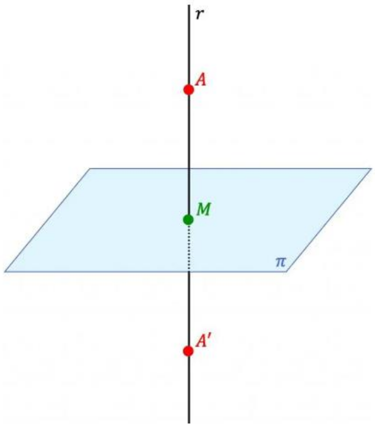
$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a-2}{1}=\dfrac{b-1}{1} \\ \dfrac{b-1}{1}=\dfrac{c-6}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-2=b-1 \\ b-1=c-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=b+1 \\ c=b+5 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(b+1,b,b+5)}$$

El punto P pertenece al plano π por lo que cumple su ecuación.

$$\left.\begin{array}{l} P(b+1,b,b+5) \in \pi \\ \pi \equiv x+y+z=3 \end{array}\right\} \Rightarrow b+1+b+b+5=3 \Rightarrow 3b=-3 \Rightarrow b=-1 \Rightarrow \boxed{P(0,-1,4)}$$

(c) Hallamos la recta perpendicular al plano que pasa por el punto A. Después, determinamos el punto M de corte de recta y plano. Dicho punto será el punto medio del segmento AA´. El punto A´ buscado lo obtendremos sumando al punto M el vector $\overrightarrow{AM}$.
La recta perpendicular al plano que pasa por el punto A tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_r}=\vec{n}=(1,1,1) \\ A(2,1,6) \in r \end{array}\right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=2+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=6+\lambda \end{cases}$$




Hallamos el punto M de corte de recta y plano.

$$\left.\begin{array}{l} r\equiv\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=6+\lambda \end{cases} \\ \pi\equiv x+y+z=3 \end{array}\right\}\Rightarrow 2+\lambda+1+\lambda+6+\lambda=3\Rightarrow 3\lambda=-6\Rightarrow\lambda=\frac{-6}{3}=-2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x=2-2=0 \\ y=1-2=-1\Rightarrow M(0,-1,4) \\ z=6-2=4 \end{cases}$$

Hallamos el punto A´.

$$\overrightarrow{AM}=(0,-1,4)-(2,1,6)=(-2,-2,-2)$$

$$A´=M+\overrightarrow{AM}=(0,-1,4)+(-2,-2,-2)=(-2,-3,2)$$

El punto simétrico de A respecto del plano π es $A´(-2,-3,2)$.

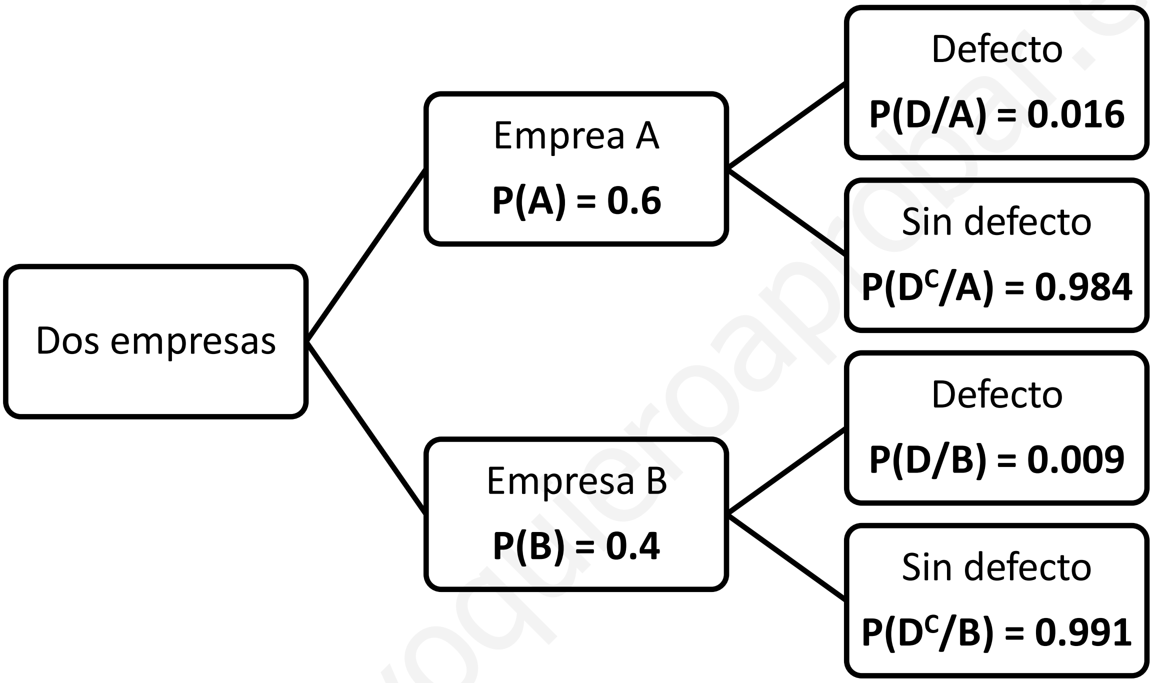
**Problema 7.** Una imprenta compra la tinta a dos empresas distintas. En la empresa A compra el 60% de sus pedidos, y el resto a la empresa B. Se observa que el 1.6% de las cajas de tinta de la empresa A llegan con defecto, mientras que de la empresa B sólo el 0.9% son defectuosas. Se toma una caja al azar:

(a) **(1.25 punto)** Calcula la probabilidad de que la caja sea defectuosa.

(b) **(1.25 puntos)** Si la caja seleccionada no es defectuosa, calcule la probabilidad de que se haya comprado a la empresa A.

Llamamos A = "la tinta procede de la empresa A", B = "la tinta procede de la empresa B", D = "Las cajas de tinta llegan con defecto",

Realizamos un diagrama de árbol.




a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D) = P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) = 0.6 \cdot 0.016 + 0.4 \cdot 0.009 = \boxed{0.0132}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/D^C) = \frac{P(A \cap D^C)}{P(D^C)} = \frac{P(A)P(D^C/A)}{1-P(D)} = \frac{0.6 \cdot 0.984}{1-0.0132} = \boxed{\frac{1476}{2467} \simeq 0.5983}$$

**Problema 8.** Las calificaciones de la asignatura Análisis Matemático I de la Facultad de Matemáticas siguen una distribución N(5, 2).
(a) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que un estudiante haya obtenido una nota mayor o igual que 7.5.
(b) **(0.75 puntos)** Calcula la probabilidad de que un estudiante haya obtenido una nota entre 3 y 5.
(c) **(1 punto)** Se modifica sistema de enseñanza de forma que la desviación típica ahora es 1.5 y la probabilidad de obtener una nota menor o igual que 6, sea 0.52. ¿Cuál sería la nueva media? ¿Ha funcionado el sistema aplicado?

* Algunos valores de la función de distribución N(0, 1) son: F(x) = P(Z ≤ x), F(0) = 0.5, F(1.25) = 0.8944, F(0.05) = 0.52, F(0.52) = 0.6985, F(0.8944) = 0.8133, F(1) = 0.8413.

Sea X = Las calificaciones de la asignatura Análisis Matemático I
X = N(5, 2).

(a) Nos piden $P(X \geq 7.5)$.

$$P(X \geq 7.5) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{7.5-5}{2}\right) = P(Z \geq 1.25) = 1 - P(Z \leq 1.25) =$$

$$= \left\{\begin{matrix} \text{Miramos en los datos} \\ F(1.25) = 0.8944 \end{matrix}\right\} = 1 - 0.8944 = \boxed{0.1056}$$

(b)

$$P(3 \leq X \leq 5) = P(X \leq 5) - P(X \leq 3) = \{Tipificamos\} = P\left(Z \leq \frac{5-5}{2}\right) - P\left(Z \leq \frac{3-5}{2}\right) =$$

$$= P(Z \leq 0) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 0) - P(Z \geq 1) = P(Z \leq 0) - [1 - P(Z \leq 1)] =$$

$$= \left\{\begin{matrix} \text{Miramos en los datos} \\ F(0) = 0.5 \\ F(1) = 0.8413 \end{matrix}\right\} = 0.5 - 1 + 0.8413 = \boxed{0.3413}$$

c) Tenemos X = N(μ, 1.5). Sabemos que $P(X \leq 6) = 0.52$.

$$P(X \leq 6) = \{Tipificamos\} = P\left(Z \leq \frac{6-\mu}{1.5}\right) = 0.52 \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \text{Miramos en los datos} \\ F(0.05) = 0.52 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{6-\mu}{1.5} = 0.05 \Rightarrow 6 - \mu = 0.075 \Rightarrow 6 - 0.075 = \mu \Rightarrow \boxed{\mu = 5.925}$$

La nueva media es de 5.925.
El nuevo sistema ha funcionado pues ha subido la nota media (de 5 a 5.925) y la dispersión de los datos ha disminuido (2 a 1.5).