

CINEMÁTICA

Movimiento Armónico Simple (M.A.S.)

1. Una pelota bota repetidamente sobre un suelo horizontal, y en cada rebote alcanza la altura h :
 - a) Este movimiento, ¿es periódico? En caso afirmativo, calcula el período.

Se trata de un movimiento periódico, pues presenta las mismas características cada cierto intervalo de tiempo constante, por ejemplo, el comprendido entre dos contactos consecutivos con el suelo.

El movimiento descrito es una sucesión de caídas libres desde la altura h sin velocidad inicial, y lanzamientos verticales ascendentes hasta la misma altura. En cada bote, la velocidad final de la caída es, en módulo, la inicial de la ascensión. El tiempo que tarda la pelota en llegar al suelo desde la altura h es $t = \sqrt{2h/g}$, que es el mismo tiempo que invertirá en volver a alcanzar la altura h . Por tanto, el período del movimiento será el doble de este tiempo: $T = 2\sqrt{2h/g}$.

- b) ¿Se trata de un M.A.S.?

Es un movimiento periódico, pero no es un M.A.S. Los argumentos son varios. Por ejemplo, en este caso la velocidad máxima se alcanza en el suelo, y se anula en h (en un M.A.S. la velocidad máxima se alcanza en la posición de equilibrio y se anula en los extremos). Tampoco la aceleración cambia de sentido (siempre es $-g$), ni existe un punto en el que se anule, como sucede en el M.A.S. Por último, en las ecuaciones que describen el movimiento de la pelota no aparecen funciones armónicas.

2. Encuentra la expresión que relaciona, en un M.A.S., la velocidad con la elongación.

Partimos de:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi_0)$$

$$v(t) = A\omega \cos(\omega t + \phi_0)$$

Como $\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$, podemos escribir:

$$x^2(t) = A^2 \sin^2(\omega t + \phi_0)$$

$$\begin{aligned} v^2(t) &= A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \phi_0) = A^2 \omega^2 [1 - \sin^2(\omega t + \phi_0)] = \\ &= A^2 \omega^2 - \underbrace{A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \phi_0)}_{x^2(t)} = \\ &= A^2 \omega^2 - \omega^2 x^2(t) \end{aligned}$$

$$v^2(t) = \omega^2 (A^2 - x^2(t))$$

$$v(t) = \omega \sqrt{A^2 - x^2(t)}$$

3. Un punto material oscila con M.A.S. de amplitud 2cm y frecuencia 10Hz. Calcula la velocidad y la aceleración en el instante $t = 0,25s$. ¿Qué valores máximos pueden alcanzar ambas magnitudes? Supón fase inicial nula.

$$A = 2cm = 0,02m$$

$$f = 10Hz \rightarrow \omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 10 = 20\pi$$

$$\phi_0 = 0$$

ELONGACIÓN $\rightarrow x(t) = 0,02 \sin(20\pi t) \text{ (m)}$

VELOCIDAD $\rightarrow v(t) = 0,02 \cdot 20\pi \cos(20\pi t) = 0,4\pi \cos(20\pi t) \text{ (m/s)}$

ACELERACIÓN $\rightarrow a(t) = 0,4\pi \cdot 20\pi (-\sin(20\pi t)) =$
 $= -8\pi^2 \sin(20\pi t) \text{ (m/s}^2\text{)}$

Para $t = 0,25$ segundos:

$$x(0,25s) = 0,02 \sin(20\pi \cdot 0,25) = 0$$

$$v(0,25s) = 0,4\pi \cos(20\pi \cdot 0,25) = -0,4\pi$$

$$a(0,25s) = -8\pi^2 \sin(20\pi \cdot 0,25) = 0$$

¡OJO! Calculadlos en RADIANES (no grados)

De donde se concluye que en $t = 0,25s$ está en la posición de equilibrio, en su recorrido hacia la izquierda.

Los valores máximos de las magnitudes son:

$$v_{\max} = \pm 0,4\pi \text{ (m/s)} \quad a_{\max} = \pm 8\pi^2 \text{ (m/s}^2\text{)}$$

4. La aceleración de un M.A.S. es, en cm/s^2 , $a = -16\pi x$ y la amplitud del movimiento, $A = 4cm$. Se ha empezado a estudiar el movimiento cuando la aceleración adquiere su valor absoluto máximo en los desplazamientos positivos. Determina:

- Las ecuaciones del movimiento.
- La velocidad y aceleración máxima.
- La velocidad y aceleración cuando la elongación es la mitad de la amplitud.

$$\left. \begin{array}{l} a = -16\pi^2 x \text{ (cm/s}^2\text{)} \\ A = 4cm \end{array} \right\} \text{ Como } \boxed{a = -\omega^2 x} \text{ se concluye que}$$

$$\omega^2 = 16\pi^2$$

$$\omega = 4\pi$$

Ⓐ Del enunciado se deduce que cuando $t=0$ la posición es $x = +A$, ya que la aceleración máxima se da en los extremos del movimiento. Con este dato calcula ϕ_0 :

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi_0)$$

$$x(t=0) = A \sin(\phi_0) = A \rightarrow \sin(\phi_0) = 1 \rightarrow \phi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ (rad)}$$

ELONGACIÓN $\rightarrow x(t) = 0,04 \sin(4\pi t + \pi/2) \text{ (m)}$

VELOCIDAD $\rightarrow v(t) = 0'04 \cdot 4\pi \cdot \cos(4\pi t + \pi/2) =$
 $= 0'16\pi \cos(4\pi t + \pi/2) \text{ (m/s)}$

ACELERACIÓN $\rightarrow a(t) = 0'16\pi \cdot 4\pi (-\sin(4\pi t + \pi/2)) =$
 $= -0'64\pi^2 \sin(4\pi t + \pi/2) \text{ (m/s}^2\text{)}$

⑥ $v_{\max} = \pm 0'16\pi \text{ (m/s)} \quad a_{\max} = \pm 0'64\pi^2 \text{ (m/s}^2\text{)}$

⑦ $x = \frac{A}{2} = 2\text{cm} = 0'02\text{m}$

$v = \omega \sqrt{A^2 - x^2} = 4\pi \sqrt{0'04^2 - 0'02^2} = 0'435 \text{ (m/s)}$

$a = -\omega^2 x = -(4\pi)^2 \cdot 0'02 = -3'158 \text{ (m/s}^2\text{)}$

5. El movimiento de un oscilador armónico simple, en unidades SI, viene dado por la expresión: $x(t) = 0,5 \cdot \sin(0,2 \cdot t)$
 Determina la amplitud, el período y la frecuencia de las oscilaciones. ¿Dónde se encuentra el móvil en $t = 0$?

$x(t) = 0'5 \cdot \sin(0'2 \cdot t)$

AMPLITUD
 $A = 0'5\text{m}$

FRECUENCIA ANGULAR
 $\omega = 0'2 = 2\pi f$

$$\left\{ \begin{array}{l} f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{0'2}{2\pi} = 0'032 \text{ (Hz)} \\ T = \frac{1}{f} = \frac{1}{0'032} = 10\pi \text{ (s)} \end{array} \right.$$

$x(t=0) = 0'5 \cdot \sin(0'2 \cdot 0) = 0'5 \cdot \sin(0) = 0 \text{ (Equilibrio)}$

6. En un M.A.S. la velocidad máxima es 40m/s, y la aceleración máxima, 45m/s².
 Calcula la frecuencia y la amplitud de las oscilaciones.

$v_{\max} = 40 \text{ (m/s)} = A\omega$

$a_{\max} = 45 \text{ (m/s}^2\text{)} = A\omega^2$

$\frac{v_{\max}}{a_{\max}} = \frac{40}{45} = \frac{A\omega}{A\omega^2} = \frac{1}{\omega} \rightarrow \omega = \frac{a_{\max}}{v_{\max}} = \frac{45}{40} = 1'125 \text{ rad/s}$

$\rightarrow \omega = 2\pi f \rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = 0'18 \text{ Hz}$

$\Rightarrow A = \frac{v_{\max}}{\omega} = \frac{40}{1'125} = 35'56 \text{ (m)}$

7. Una partícula describe un M.A.S. con un período de 2s. En el instante inicial se encuentra a 3cm del origen, acercándose a él a 5cm/s:

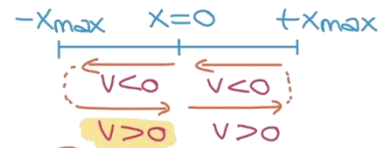
- Escribe las ecuaciones del movimiento.
- Calcula la velocidad y aceleración máximas.
- Determina x , v y a para $t = 0,5\text{s}$.

$$T = 2s$$

$$x(t=0) = -0.03 \text{ (m)}$$

$$v(t=0) = +0.05 \text{ (m/s)}$$

La velocidad es positiva cuando se desplaza hacia el semieje positivo y viceversa



$$\textcircled{a} \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ (rad/s)}$$

$$x(t=0) = A \sin(\pi t + \phi_0) = A \sin(\phi_0) = -0.03$$

$$v(t=0) = A \cdot \pi \cos(\pi t + \phi_0) = A \cdot \pi \cos(\phi_0) = 0.05$$

Se divide:

$$\frac{x(t=0)}{v(t=0)} = \frac{A \sin(\phi_0)}{A \pi \cos(\phi_0)} = \frac{1}{\pi} \tan(\phi_0) = \frac{-0.03}{0.05} = -0.6$$

$$\phi_0 = \arctan(-0.6\pi) = -1.08 \text{ (rad)}$$

$$\Rightarrow A = \frac{-0.03}{\sin(-1.08)} = 0.034 \text{ (m)}$$

ELONGACIÓN $\rightarrow x(t) = 0.034 \cdot \sin(\pi t - 1.08) \text{ (m)}$

VELOCIDAD $\rightarrow v(t) = 0.034 \cdot \pi \cos(\pi t - 1.08) = 0.11 \cos(\pi t - 1.08) \text{ (m/s)}$

ACELERACIÓN $\rightarrow a(t) = -0.11\pi \sin(\pi t - 1.08) = -0.34 \sin(\pi t - 1.08) \text{ (m/s}^2\text{)}$

$$\textcircled{b} v_{\max} = \pm 0.11 \text{ (m/s)}$$

$$a_{\max} = \pm 0.34 \text{ (m/s}^2\text{)}$$

$$\textcircled{c} x(t=0.5s) = 0.034 \sin(\pi \cdot 0.5 - 1.08) = 0.016 \text{ (m)}$$

$$v(t=0.5s) = 0.11 \cos(\pi \cdot 0.5 - 1.08) = 0.097 \text{ (m/s)}$$

$$a(t=0.5s) = -0.34 \sin(\pi \cdot 0.5 - 1.08) = -0.16 \text{ (m/s}^2\text{)}$$

M.A.S. como proyección del M.C.U.

8. Un móvil describe un M.C.U. ($R = 0.5m$, $f = 0.2Hz$). En $t_0 = 0$ se encuentra en la posición más alta de la circunferencia. Escribe las ecuaciones de los M.A.S. que resultan de las proyecciones sobre los ejes X e Y, y demuestra que el desfase entre ambos M.A.S. es de $\pi/2$ (cuando en uno de los movimientos una de las magnitudes es máxima, en el otro es cero, y viceversa).

Para describir las ecuaciones del M.A.S. resultantes de las proyecciones de X e Y, la amplitud coincide con el radio que describe el móvil ($A = 0.5m$).

La frecuencia angular la calculamos de esta forma:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 0,2 = 1,26 \text{ rad/s}$$

Así las ecuaciones quedan como:

$$\begin{aligned} x(t) &= A \sin(\omega t + \phi) = 0,5 \sin(1,26t) \quad [m] \\ y(t) &= A \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = 0,5 \sin\left(1,26t + \frac{\pi}{2}\right) \quad [m] \end{aligned}$$

Hemos tomado como $\phi = 0$ en el eje X, por tanto, el eje Y tendrá $\phi = \pi/2$, pues es la diferencia que hay entre uno y otro. Además, así se cumple que si $t = 0$, $x(t) = 0$ e $y(t) = 0,5m$, que es la posición máxima.

El desfase viene determinado por la diferencia en las fases iniciales. Si en $x(t)$ no hay fase inicial y en $y(t)$ es $\pi/2$, podemos decir que el desfase entre ambas es de $\pi/2$. También, se cumple lo que hemos explicado antes: cuando uno de ellos es máximo, el otro es cero.

9. Demuestra que el período de un M.A.S. coincide con el del M.C.U. del que procede.

En el M.C.U., si sustituimos la velocidad angular por la velocidad lineal, la expresión que obtenemos es:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi R}{v}$$

En el M.A.S., la frecuencia angular la sustituimos por el valor de la velocidad lineal:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi A}{v}$$

En un M.A.S., el máximo recorrido que puede hacer un movimiento es la amplitud. En el caso de un M.C.U., esta amplitud es constante, y se denomina radio. Por eso, podemos decir que, idealmente, ambos períodos coinciden.

10. Sabiendo que el ángulo plano, expresado en radianes, es una magnitud adimensional, analiza la homogeneidad de las ecuaciones del M.C.U. y del M.A.S.

Para el M.C.U. se demuestra la homogeneidad de sus ecuaciones:

$$\phi = \phi_0 + \omega t \begin{cases} [\Delta\phi] = 1 \text{ (adimensional)} \\ [\omega t] = T^{-1} \cdot T = 1 \text{ (adimensional)} \end{cases}$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \begin{cases} [\Delta\omega] = T^{-1} \\ [\alpha t] = T^{-2} \cdot T^{-1} = T^{-1} \end{cases}$$

Para el caso de un M.A.S.:

$$x = A \sin(\omega t + \phi) \begin{cases} [x] = L \\ [A \sin(\omega t + \phi)] = L \end{cases}$$

$$v = A \omega \cos(\omega t + \phi) \begin{cases} [v] = LT^{-1} \\ [A \omega \cos(\omega t + \phi)] = LT^{-1} \end{cases}$$

$$a = A \omega^2 \sin(\omega t + \phi) \begin{cases} [a] = LT^{-2} \\ [A \omega^2 \sin(\omega t + \phi)] = LT^{-2} \end{cases}$$

Debemos recordar que las funciones trigonométricas no tienen unidades y, por tanto, son adimensionales.

11. Si proyectamos sobre el eje X un M.C.U.A., ¿resulta un M.A.S.? El movimiento, ¿es periódico?

Si se proyecta sobre el eje X un M.C.U.A., el movimiento resultante no es un M.A.S., ya que la velocidad angular varía con el tiempo, haciendo que varíen también la frecuencia angular y el período. Por tanto, no se trata de un movimiento periódico.