

1. La probabilidad de un suceso A es 0,35. La probabilidad de otro suceso B es 0,2. Por último, se sabe que la probabilidad de la intersección de los dos sucesos anteriores es 0,1. Hallar:
 - a) [0,5 puntos] La probabilidad de que ocurra el suceso A o el suceso B.
 - b) [0,5 puntos] La probabilidad de ocurra A y no B.
 - c) [0,5 puntos] La probabilidad de ocurra exactamente uno de ellos.
 - d) [0,5 puntos] Si ha ocurrido el suceso A, ¿cuál es la probabilidad de que ocurra también el suceso B?
 - e) [0,5 puntos] Si no ha ocurrido el suceso B, ¿cuál es la probabilidad de que no ocurra el suceso A?
2. Una compañía dedicada al transporte público explota tres líneas de una ciudad, de forma que el 60% de los autobuses cubre el servicio de la primera línea, el 30% cubre la segunda y el 10% cubre el servicio de la tercera línea. Se sabe que la probabilidad de que, diariamente, un autobús se averíe es del 2%, 4% y 1%, respectivamente, para cada línea.
 - a) [0,5 puntos] Realiza un diagrama de árbol donde se aprecie el experimento señalado con los posibles sucesos y sus probabilidades.
 - b) [1 punto] Determina la probabilidad de que, en un día, un autobús sufra una avería.
 - c) [1 punto] Si elegimos al azar un autobús de la compañía y no está averiado, ¿cuál es la probabilidad de dicho autobús cubra la tercera línea?
3. El tiempo de recuperación de los enfermos de un hospital sigue una distribución normal de media 7 días y desviación típica 3 días. Se pide:
 - a) [0,5 puntos] Probabilidad de que un enfermo esté menos de 5 días en el hospital.
 - b) [1 punto] Probabilidad de que para recuperarse necesite entre 9 y 15 días de estancia.
 - c) [1 punto] Si en el hospital hay 1500 enfermos, ¿cuántos de ellos necesitarán estar más de 10 días en el hospital?
4. Se ha medido la longitud de una muestra escogida al azar de 400 piezas de precisión hechas por una determinada máquina. Resultó una media de 1,3 cm y una desviación típica de 0,25 cm.
 - a) [1,5 puntos] Halla dos intervalos de confianza para la media, uno con un nivel de confianza del 95 % y otro con un nivel de confianza del 99 %.
 - b) [1 punto] Con una confianza del 92 % y tomando la misma desviación típica, ¿cuántas piezas tendríamos que medir para cometer un error máximo de un 0,05 cm?

Soluciones

1. La probabilidad de un suceso A es 0,35. La probabilidad de otro suceso B es 0,2. Por último, se sabe que la probabilidad de la intersección de los dos sucesos anteriores es 0,1. Hallar:

$$P(A) = 0,35; P(B) = 0,2; P(A \cap B) = 0,1.$$

- a) [0,5 puntos] La probabilidad de que ocurra el suceso A o el suceso B.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,35 + 0,2 - 0,1 = 0,45.$$

- b) [0,5 puntos] La probabilidad de ocurra A y no B.

$$P(A - B) = P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0,35 - 0,1 = 0,25.$$

- c) [0,5 puntos] La probabilidad de ocurra exactamente uno de ellos.

$$P(B - A) = P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(B \cap A) = 0,2 - 0,1 = 0,1.$$

Por tanto, la probabilidad de ocurra exactamente uno de ellos es:

$$P(A - B) + P(B - A) = 0,25 + 0,1 = 0,35.$$

- d) [0,5 puntos] Si ha ocurrido el suceso A, ¿cuál es la probabilidad de que ocurra también el suceso B?

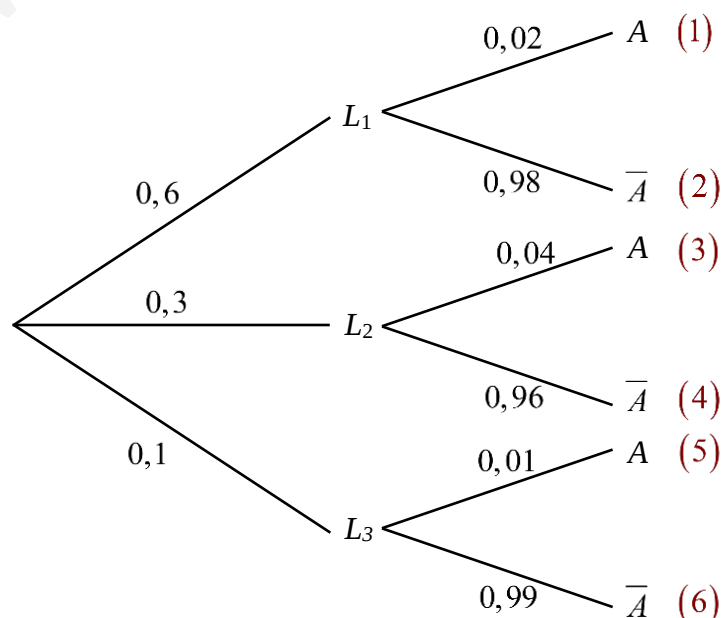
$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0,1}{0,35} \cong 0,2857.$$

- e) [0,5 puntos] Si no ha ocurrido el suceso B, ¿cuál es la probabilidad de que no ocurra el suceso A?

$$P(\bar{A}/\bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(\overline{A \cup B})}{1 - P(B)} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(B)} = \frac{1 - 0,45}{1 - 0,2} = \frac{0,55}{0,8} = 0,6875.$$

2. Una compañía dedicada al transporte público explota tres líneas de una ciudad, de forma que el 60% de los autobuses cubre el servicio de la primera línea, el 30% cubre la segunda y el 10% cubre el servicio de la tercera línea. Se sabe que la probabilidad de que, diariamente, un autobús se averíe es del 2%, 4% y 1%, respectivamente, para cada línea.

- a) [0,5 puntos] Realiza un diagrama de árbol donde se aprecie el experimento señalado con los posibles sucesos y sus probabilidades.



En el diagrama anterior L_1 , L_2 y L_3 son los sucesos “cubrir el servicio de la primera línea”, “de la segunda línea” y “de la tercera línea”, respectivamente. A es el suceso “que un autobús se averíe”.

- b) [1 punto]** Determina la probabilidad de que, en un día, un autobús sufra una avería.

$$P(A) = (1) + (3) + (5) = 0,6 \cdot 0,02 + 0,3 \cdot 0,04 + 0,1 \cdot 0,01 = 0,012 + 0,012 + 0,001 = 0,025.$$

- c) [1 punto]** Si elegimos al azar un autobús de la compañía y no está averiado, ¿cuál es la probabilidad de dicho autobús cubra la tercera línea?

$$P(L_3 / \bar{A}) = \frac{P(L_3 \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{(6)}{1 - P(A)} = \frac{0,1 \cdot 0,99}{1 - 0,025} = \frac{0,099}{0,975} \cong 0,1015.$$

- 3.** El tiempo de recuperación de los enfermos de un hospital sigue una distribución normal de media 7 días y desviación típica 3 días. Se pide:

Llamemos X al tiempo de recuperación de un enfermo. Se sabe que X sigue una normal $N(7, 3)$.

- a) [0,5 puntos]** Probabilidad de que un enfermo esté menos de 5 días en el hospital.

$$P(X < 5) = P\left(Z < \frac{5-7}{3}\right) = P(Z < -0,67) = 1 - P(Z \leq 0,67) = 1 - 0,7486 = 0,2514.$$

- b) [1 punto]** Probabilidad de que para recuperarse necesite entre 9 y 15 días de estancia.

$$P(9 \leq X \leq 15) = P\left(\frac{9-7}{3} \leq Z \leq \frac{15-7}{3}\right) = P(0,67 \leq Z \leq 2,67) = P(Z \leq 2,67) - P(Z \leq 0,67) = 0,9962 - 0,7486 = 0,2476.$$

- c) [1 punto]** Si en el hospital hay 1500 enfermos, ¿cuántos de ellos necesitarán estar más de 10 días en el hospital?

$$P(X > 10) = P\left(Z > \frac{10-7}{3}\right) = P(Z > 1) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0,8413 = 0,1587, \text{ lo que supone el } 15,87 \%.$$

Por tanto: $1500 \cdot 0,1587 \cong 238$ enfermos de los 1500 necesitarán estar más de 10 días en el hospital.

- 4.** Se ha medido la longitud de una muestra escogida al azar de 400 piezas de precisión hechas por una determinada máquina. Resultó una media de 1,3 cm y una desviación típica de 0,25 cm.

- a) [1,5 puntos]** Halla dos intervalos de confianza para la media, uno con un nivel de confianza del 95 % y otro con un nivel de confianza del 99 %.

Se tiene que, al 95 %, $z_{\alpha/2} = 1,96$ y que, al 99 %, $z_{\alpha/2} = 2,575$. Entonces los intervalos son los siguientes:

$$\text{Al 95 \% : } \left(1,3 - 1,96 \frac{0,25}{\sqrt{400}} ; 1,3 + 1,96 \frac{0,25}{\sqrt{400}}\right) = (1,3 - 0,0245 ; 1,3 + 0,0245) = (1,2775 ; 1,3245).$$

$$\text{Al 99 \% : } \left(1,3 - 2,575 \frac{0,25}{\sqrt{400}} ; 1,3 + 2,575 \frac{0,25}{\sqrt{400}}\right) = (1,3 - 0,0322 ; 1,3 + 0,0322) = (1,2678 ; 1,3322).$$

- b) [1 punto]** Con una confianza del 92 % y tomando la misma desviación típica, ¿cuántas piezas tendríamos que medir para cometer un error máximo de un 0,05 cm?

Al 92 %, es $z_{\alpha/2} = 1,75$. La fórmula del error máximo admisible es $E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Entonces:

$$0,05 = 1,75 \frac{0,25}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 1,75 \frac{0,25}{0,05} \Rightarrow \sqrt{n} = 8,75 \Rightarrow n = 76,56.$$

Tendríamos que medir al menos 77 piezas.