EJERCICIO 1

a) Enuncia el Teorema de del valor medio de Lagrange y da su interpretación geométrica.

b) Calcula un punto del intervalo $[0,\ 2]$ en el que la recta tangente a la gráfica de $f(x)=3x^2+2x+1$ sea paralela a la cuerda (o segmento) que une los puntos de la gráfica de $f(x)$ en $x=0$ y $x=2$.

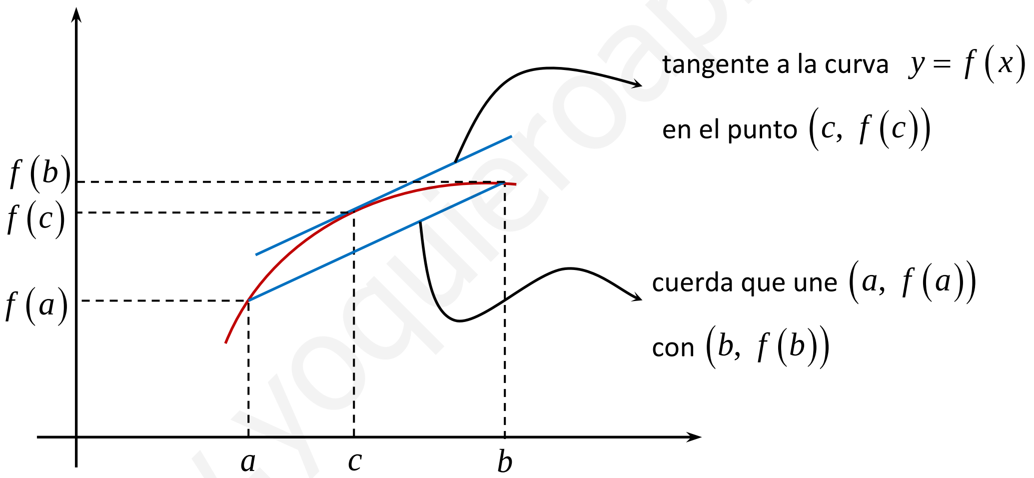
Solución

a) **Teorema del valor medio de Lagrange.**

Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a,\ b]$ y derivable en el abierto $(a,\ b)$. Entonces existe por lo menos un punto $c\in(a,\ b)$ tal que

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)\Leftrightarrow f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Geométricamente, el teorema de Lagrange asegura que existe al menos un punto c, comprendido entre a y b, tal que la tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto $(c,\ f(c))$ es paralela a la cuerda que une $(a,\ f(a))$ con $(b,\ f(b))$.



b) La función derivada de f es $f'(x)=6x+2$. Tomando $a=0$ y $b=2$, y según el teorema del valor medio, existe al menos un punto $c\in(0,\ 2)$ tal que $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Por tanto: $6c+2=\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}\Rightarrow 6c+2=\dfrac{17-1}{2}\Rightarrow 6c+2=8\Rightarrow 6c=6\Rightarrow c=1$.

El ejercicio acaba aquí, pero es conveniente visualizar la situación.

La recta que pasa por los puntos $(a,\ f(a))=(0,\ 1)$ y $(b,\ f(b))=(2,\ f(2))$ tiene por ecuación $y=mx+n$.

EJERCICIO 2

Calcula la integral

$$\int\frac{x+2}{x^3+x^2}\,dx$$

Solución

Descompongamos la fracción $\frac{x+2}{x^3+x^2}$ en fracciones simples:

$$\frac{x+2}{x^3+x^2}=\frac{x+2}{x^2(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}=\frac{Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^2}{x^2(x+1)}\Rightarrow Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^2=x+2.$$

En la última igualdad anterior vamos a sustituir x por algunos valores para obtener A, B y C:

- Si $x=0$, entonces $B=2$.
- Si $x=-1$, entonces $C=1$
- Si $x=1$, entonces $2A+2B+C=3\Rightarrow 2A+4+1=3\Rightarrow 2A=-2\Rightarrow A=-1$

De este modo $\frac{x+2}{x^3+x^2}=\frac{x+2}{x^2(x+1)}=\frac{-1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x+1}$. Por tanto:

$$\int\frac{x+2}{x^3+x^2}dx=\int\left(\frac{-1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x+1}\right)dx=\int\frac{-1}{x}dx+\int\frac{2}{x^2}dx+\int\frac{1}{x+1}dx=-\ln x-\frac{2}{x}+\ln(x+1)+C.$$

EJERCICIO 3

Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\qquad \text{y} \qquad B=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

se pide:

a) Calcula A^n cuando $n\in\mathbb{N}$ es par.

b) Resuelve la ecuación matricial $6A^{20}X=B-3AX$, donde X es una matriz cuadrada de orden 3. (Indicación: Sustituye de inicio el valor de A^{20} para facilitar los cálculos).

Solución

a) $A^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I$

$A^3=A^2\cdot A=I\cdot A=A$; $A^4=A^3\cdot A=A\cdot A=A^2=I$; $A^5=A^4\cdot A=I\cdot A=A$, $A^6=A^5\cdot A=A\cdot A=A^2=I$,...

De aquí podemos deducir que $A^n=I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ cuando $n\in\mathbb{N}$ es par.

b) $6A^{20}X=B-3AX\Rightarrow 6IX=B-3AX\Rightarrow 6IX+3AX=B\Rightarrow(6I+3A)X=B\Rightarrow X=(6I+3A)^{-1}B$.

$6I+3A=\begin{pmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&0&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&3\\0&3&0\\3&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&0&3\\0&9&0\\3&0&6\end{pmatrix}$. Llamemos $D=6I+3A$ y hallemos su inversa:

$$|D|=\begin{vmatrix}6&0&3\\0&9&0\\3&0&6\end{vmatrix}=324-81=243\,;\ D^d=\begin{pmatrix}54&0&-27\\0&27&0\\-27&0&54\end{pmatrix}$$. Entonces:

$$D^{-1}=\frac{1}{|D|}\left(D^d\right)^t=\frac{1}{243}\begin{pmatrix}54&0&-27\\0&27&0\\-27&0&54\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}54/243&0&-27/243\\0&27/243&0\\-27/243&0&54/243\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/9&0&-1/9\\0&1/9&0\\-1/9&0&2/9\end{pmatrix}.$$

Finalmente: $X=D^{-1}B=\begin{pmatrix}2/9&0&-1/9\\0&1/9&0\\-1/9&0&2/9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/3&0&-1/3\\0&1/3&0\\-1/3&0&2/3\end{pmatrix}$.

EJERCICIO 4

Dadas las rectas

$$r\equiv\frac{x+1}{2}=y=\frac{z-1}{3}\qquad\qquad s\equiv\begin{cases}x=\lambda\\y=a+\lambda\\z=-\lambda\end{cases}\quad\lambda\in\mathbb{R}$$

a) Calcula el valor del parámetro $a\in\mathbb{R}$ para que r y s se corten en un punto. Da dicho punto de corte.

b) Para el valor de a obtenido, calcula la ecuación general del plano π que contiene a r y s.

Solución

a) Un punto y un vector director de r son, respectivamente, $A(-1,0,1)$ y $\vec{u}=(2,1,3)$. Un punto de s es $B(0,a,0)$ y un vector director de s es $\vec{v}=(1,1,-1)$. Para que las rectas se corten en un punto (sean secantes) debe de ocurrir que $rango(\vec{u},\vec{v})=rango\left(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AB}\right)=2$, que es lo mismo que decir que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen distinta dirección y, además, el vector $\overrightarrow{AB}$ está contenido en el plano determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Claramente $rango(\vec{u},\vec{v})=2$, ya que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son proporcionales. Para que $rango\left(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AB}\right)=2$ el determinante formado por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{AB}$ ha de ser igual a dos:

$$\begin{vmatrix}2&1&3\\1&1&-1\\1&a&-1\end{vmatrix}=(-2-1+3a)-(3-1-2a)=5a-5=0\Rightarrow a=1.$$

Para hallar el punto de corte vamos a escribir la ecuación general de cada una de las recta y luego resolveremos el sistema formado por ambas.

$$r\equiv\frac{x+1}{2}=y=\frac{z-1}{3}\Rightarrow r\equiv\begin{cases}x+1=2y\\3y=z-1\end{cases}\Rightarrow r\equiv\begin{cases}x-2y=-1\\3y-z=-1\end{cases}.$$

$$s\equiv\begin{cases}x=\lambda\\y=1+\lambda\\z=-\lambda\end{cases}\Rightarrow s\equiv\frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-1}\Rightarrow s\equiv\begin{cases}x=y-1\\-y+1=z\end{cases}\Rightarrow s\equiv\begin{cases}x-y=-1\\y+z=1\end{cases}$$

El sistema formado por ambas rectas es $\begin{cases} x-2y=-1 \\ 3y-z=-1 \\ x-y=-1 \\ y+z=1 \end{cases}$. Como sabemos que tiene solución única podemos eliminar una ecuación: $\begin{cases} x-2y=-1 \\ 3y-z=-1 \\ x-y=-1 \end{cases}$. Ahora, restando la primera y tercera ecuaciones: $-y=0 \Rightarrow y=0$. De aquí se obtiene que $x=-1$ y que $z=1$. Así pues, el punto de corte de ambas rectas es $r \cap s = P(-1,0,1)$

b) Tomaremos como punto del plano π el punto de corte de r y s: $P(-1,0,1)$, y los vectores directores del plano, los vectores directores de r y s: $\vec{u}=(2,1,3)$ y $\vec{v}=(1,1,-1)$. Así, la ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-x-1+3y+2z-2)-(z-1-2y+3x+3)=0 \Rightarrow \pi \equiv -4x+5y+z-5=0 .$$

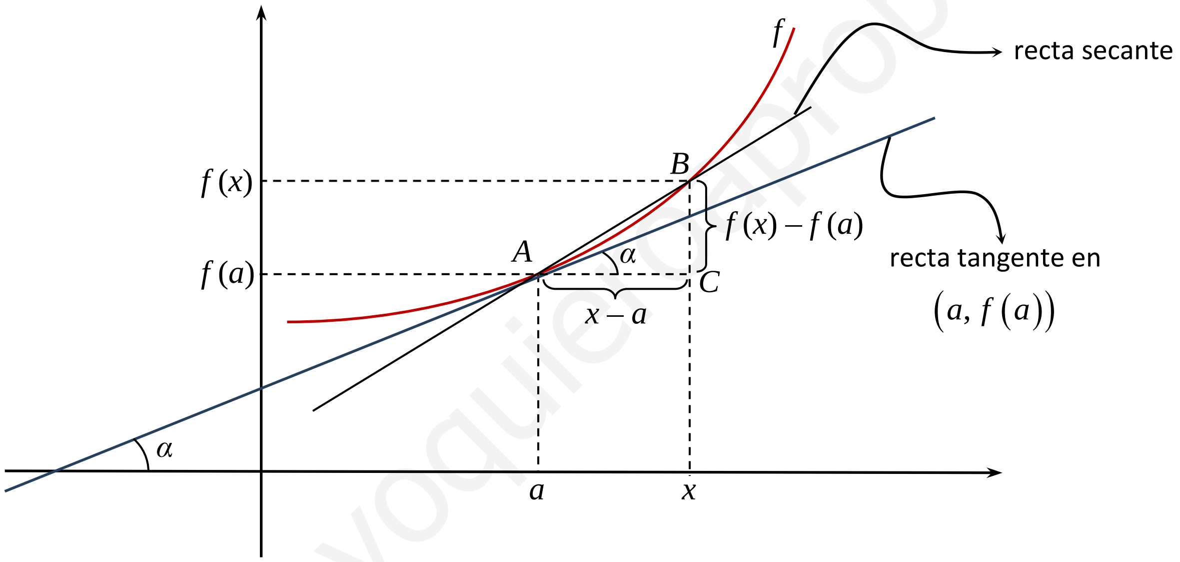
EJERCICIO 1

a) Interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto.

b) Encuentra el punto de la función $f(x)=x^4-8x^3+18x^2+30x+1$ en el que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ es mínima. Encuentra también el punto donde la pendiente es máxima.

Solución

a) La derivada de una función f en un punto a es el límite del cociente $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ cuando $x\to a$, caso de existir. Esto quiere decir que la derivada es la tangente trigonométrica del ángulo α que forma la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a,\ f(a))$ con el eje OX, o lo que es lo mismo, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a,\ f(a))$. Ver figura.



Como se puede observar, la recta secante que pasa por los puntos $(x,\ f(x))$, $(a,\ f(a))$ se convierte, en el paso al límite, cuando $x\to a$, en la recta tangente en el punto $(a,\ f(a))$. Por tanto cada cociente $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ pasa de ser la tangente trigonométrica del ángulo A del triángulo rectángulo ABC, a la tangente trigonométrica del ángulo α, que forma la recta tangente con el eje OX, es decir, la pendiente de la recta tangente.

b) Como $f'(x)=4x^3-24x^2+36x+30$, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en un punto genérico $x=t$ es $g(t)=4t^3-24t^2+36t+30$. Derivando esta función "pendiente" e igualando a cero obtenemos los posibles máximos o mínimos de la misma:

$g'(t)=12t^2-48t+36=0\Rightarrow t^2-4t+3=0\Rightarrow\begin{cases}t_1=1\\t_2=3\end{cases}$. Volviendo a derivar la función g: $g''(t)=24t-48$

Entonces:

- $g''(1)=24\cdot1-48=-24<0\Rightarrow t=1$ es un máximo de g, es decir, $x=1$ es un punto de f de pendiente máxima.

Sustituyendo en la ecuación de f: $f(1)=1^4-8\cdot 1^3+18\cdot 1^2+30\cdot 1+1=1-8+18+30+1=42$.

Así, el punto donde la pendiente es máxima es $(1,\ 42)$.

- $g''(3)=24\cdot 3-48=24>0 \Rightarrow t=3$ es un mínimo de g, es decir, $x=3$ es un punto de f de pendiente mínima. Sustituyendo en la ecuación de f:
  $f(3)=3^4-8\cdot 3^3+18\cdot 3^2+30\cdot 3+1=81-216+162+90+1=118$.
  Así, el punto donde la pendiente es mínima es $(3,\ 118)$.

EJERCICIO 2

Encuentra una primitiva $F(x)$ de la función

$$f(x)=\left(x^2+1\right)e^x$$

tal que $F(0)=5$.

Solución

Hemos de encontrar una función $F(x)$ tal que $F'(x)=f(x)$ y tal que $F(0)=5$. Hallemos en primer lugar la integral indefinida de f y luego impongamos la condición.

Para calcular la integral procederemos por el método de integración por partes:

$$\int\left(x^2+1\right)e^x dx=\begin{bmatrix} u=x^2+1 & dv=e^x dx \\ du=2xdx & v=e^x \end{bmatrix}=\left(x^2+1\right)e^x+\int 2xe^x dx=\left(x^2+1\right)e^x-2\int xe^x dx=(*)$$

Volviendo a integrar por partes se tiene:

$$(*)=\left(x^2+1\right)e^x-2\int xe^x dx=\begin{bmatrix} u=x & dv=e^x dx \\ du=dx & v=e^x \end{bmatrix}=\left(x^2+1\right)e^x-2\left(xe^x-\int e^x dx\right)=$$

$$=\left(x^2+1\right)e^x-2\left(xe^x-e^x\right)+C=\left(x^2+1\right)e^x-2xe^x+2e^x+C=\left(x^2-2x+3\right)e^x+C.$$

Entonces una primitiva de f es la función $F(x)=\left(x^2-2x+3\right)e^x+C$.

Como $F(0)=5$, entonces $F(0)=\left(0^2-2\cdot 0+3\right)e^0+C=5 \Rightarrow 3+C=5 \Rightarrow C=2$.

Así pues, la función que se pide es $F(x)=\left(x^2-2x+3\right)e^x+2$.

EJERCICIO 3

Dada la matriz

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & -b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & -b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix},\quad a,\ b\in\mathbb{R},\ a\neq 0,\ b\neq 0$$

se pide:

a) Calcula $A\cdot A^t$ donde A^t es la matriz traspuesta de A.

b) Razona que siempre existe la matriz inversa de A, independientemente de los valores $a,\ b\in\mathbb{R},\ a\neq 0,\ b\neq 0$.

Solución

a) $A\cdot A^t=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & -b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & -b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & -b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ -b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}$.

b) Sabemos que una matriz cuadrada tiene inversa si, y solamente si, su determinante es distinto de cero.

Utilizando el apartado anterior:

$$|A\cdot A^t|=\begin{vmatrix} a^2+b^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2 \end{vmatrix}\Leftrightarrow |A|\cdot|A^t|=\left(a^2+b^2\right)^4\overset{(1)}{\Leftrightarrow}|A|^2=\left(a^2+b^2\right)^4\Leftrightarrow|A|=\left(a^2+b^2\right)^2$$

En el paso (1) se ha utilizado que el determinante de una matriz cuadrada es igual que el de su traspuesta.

Como $a\neq 0,\ b\neq 0$, entonces $|A|=\left(a^2+b^2\right)^2>0$, lo que quiere decir que el determinante de la matriz A nunca se anula, es decir, siempre existe la matriz inversa de A, independientemente de los valores $a,\ b\in\mathbb{R},\ a\neq 0,\ b\neq 0$.

EJERCICIO 4

Dados los planos $\pi_1\equiv x-2y-z=0$ y $\pi_2\equiv 2x-y+\lambda z=4$:

a) Calcula el valor del parámetro $\lambda\in\mathbb{R}$ para que los planos π_1 y π_2 sean perpendiculares.

b) Para el valor de λ obtenido en el apartado anterior, obtén unas ecuaciones paramétricas de la recta r paralela a π_1 y a π_2 que pasa por el punto $P(1,2,3)$.

Solución

a) Para que los planos π_1 y π_2 sean perpendiculares, basta que lo sean sus vectores normales. Un vector normal de π_1 es $\vec{v}_1=(1,\,-2,\,-1)$ y un vector normal de π_2 es $\vec{v}_2=(2,\,-1,\,\lambda)$.

Por tanto: $\pi_1\perp\pi_2\Leftrightarrow\vec{v}_1\perp\vec{v}_2\Leftrightarrow\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2=0\Leftrightarrow(1,\,-2,\,-1)\cdot(2,\,-1,\,\lambda)=0\Leftrightarrow 2+2-\lambda=0\Leftrightarrow\lambda=4$.

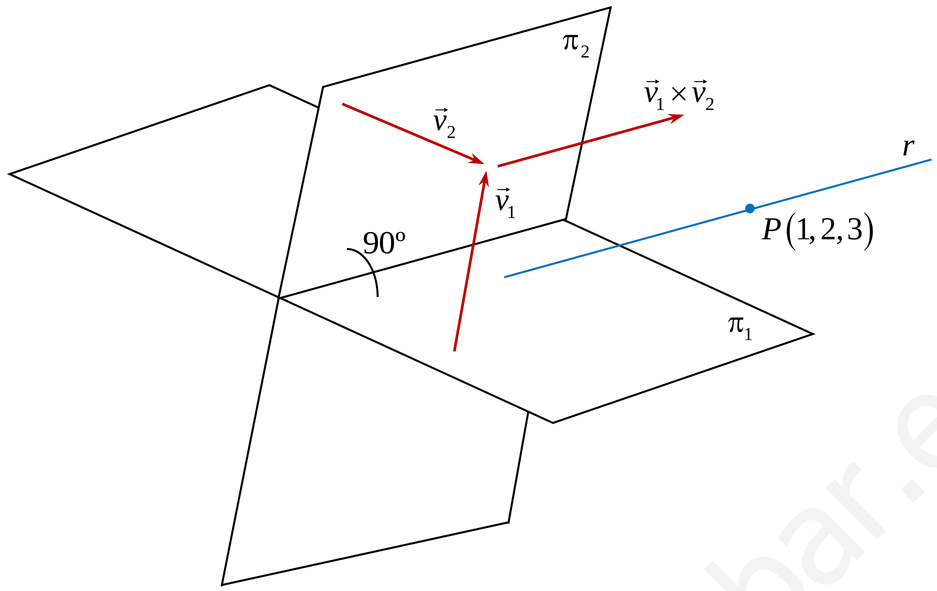
b) Una recta r paralela a π_1 y a π_2 deberá tener dirección perpendicular, simultáneamente, a $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$. Esta dirección $\vec{u}$ se obtiene haciendo el producto vectorial de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$:

$$\vec{u}=\vec{v}_1\times\vec{v}_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}=(-8i-2j-k)-(-4k+4j+i)=-9i-6j+3k\Rightarrow\vec{u}=(-9,\,-6,\,3).$$

Por tanto, las ecuaciones paramétricas de la recta r paralela a π_1 y a π_2 que pasa por el punto $P(1,\,2,\,3)$ son:

$$r\equiv\begin{cases} x=1-9k \\ y=2-6k \\ z=3+3k \end{cases}$$

Ver figura de la página siguiente.


π_2
$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$
$\vec{v}_2$
r
$\vec{v}_1$
90°
$P(1,2,3)$
π_1