PAU - Matemáticas II - Septiembre 2011 - Propuesta A

Ejercicio 1

a) Determina el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x) = (x-a)e^x$ tenga un mínimo relativo en $x = 0$. Razona que, de hecho, es un mínimo absoluto. **[1,25 puntos]**

b) Para el valor de a obtenido, calcula los puntos de inflexión de la función $f(x)$. **[1,25 puntos]**

Solución

a) Al presentar la función en el punto $x = 0$ un mínimo relativo, necesariamente $f'(0) = 0$. Además se ha de cumplir también que la segunda derivada en tal punto sea mayor que cero.

Como $f'(x) = e^x + (x-a)e^x = (1+x-a)e^x$, se tiene que $f'(0) = 1-a = 0 \Rightarrow a = 1$. Para este valor de a la función y su primera derivada son $f(x) = (x-1)e^x$ y $f'(x) = xe^x$. La segunda derivada es $f''(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$. Como $f''(0) = 1 > 0$, entonces en $x = 0$ hay un mínimo relativo.

Observemos también que, al ser $e^x > 0\,, \forall\, x \in \mathbb{R}$ se tiene que $f'(x) = xe^x < 0 \Leftrightarrow x < 0$ y que $f'(x) = xe^x > 0 \Leftrightarrow x > 0$. Por tanto, f es estrictamente decreciente en $(-\infty, 0)$ y estrictamente creciente en $(0, +\infty)$.

Además, la función $f(x) = (x-1)e^x$ está definida y es continua en todo $\mathbb{R}$, $f(0) = -1$ y los límites en $-\infty$ y en $+\infty$ son los siguientes:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)e^x = [-\infty \cdot 0 \quad \text{INDET}] = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x-1}{e^{-x}} = \left[\dfrac{-\infty}{\infty} \quad \text{INDET}\right] =$
  $= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{-e^{-x}} = \dfrac{1}{-\infty} = 0$. En el último paso se ha usado la regla de L'Hôpital.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)e^x = +\infty$.

De lo anterior se deduce que $\text{Im} f = [-1, +\infty)$, con lo que $x = 0$ es un mínimo absoluto.

b) Si una función presenta un punto de inflexión, necesariamente la segunda derivada en este punto ha de ser igual a cero. Una condición para asegurarnos de que tal punto es de inflexión es que la tercera derivada en dicho punto sea distinta de cero. Teniendo en cuenta lo anterior, tenemos:

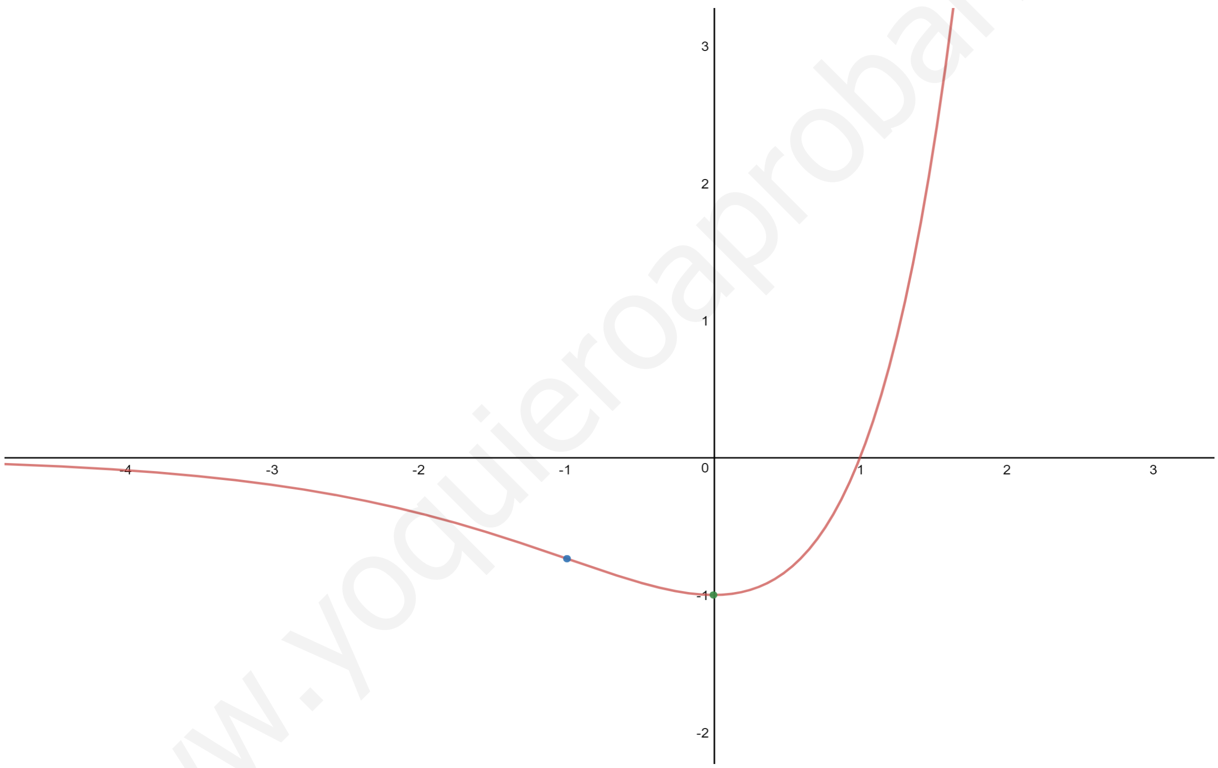
$$f''(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

De lo anterior deducimos que el único "candidato" a punto de inflexión es el punto $x = -1$. Hagamos la derivada tercera y evaluemos.

$$f'''(x) = e^x + (1+x)e^x = (2+x)e^x \Rightarrow f'''(-1) = e^{-1} \neq 0$$

Como la tercera derivada es distinta de cero, deducimos que $x = -1$ es el único punto de inflexión de la función. Puesto que $f(-1) = -2e^{-1} \approx -0,74$, las coordenadas del punto de inflexión son $(-1, -0,74)$.

La representación gráfica de la función es la siguiente:



Ejercicio 2

Calcula la integral $\displaystyle\int \frac{x^2-3x+1}{x^3-5x^2+8x-4}dx$ **[2,5 puntos]**

Solución

Se trata de una integral racional. Factorizaremos el denominador y descompondremos la fracción en fracciones simples.

Como $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-1)(x-2)^2$ tenemos:

$$\frac{x^2-3x+1}{x^3-5x^2+8x-4} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} = \frac{A(x-2)^2 + B(x-1)(x-2) + C(x-1)}{(x-1)(x-2)^2}$$

Demos ahora valores para x en el numerador:

- Si $x = 2$, entonces $-1 = C$.
- Si $x = 1$, entonces $-1 = A$.
- Si $x = 0$, entonces $1 = 4A + 2B - C \Rightarrow 1 = -4 + 2B + 1 \Rightarrow B = 2$.

Por tanto:

$$\frac{x^2 - 3x + 1}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} = \frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{-1}{(x-2)^2}$$

De este modo:

$$\int \frac{x^2 - 3x + 1}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} dx = \int \frac{-1}{x-1} dx + \int \frac{2}{x-2} dx + \int \frac{-1}{(x-2)^2} dx =$$

$$= -\ln(x-1) + 2\ln(x-2) + \frac{1}{x-2} + C$$

Ejercicio 3

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & k \\ 1 & 4 & k \\ 0 & 5k & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) Calcula, en función del parámetro $k \in \mathbb{R}$, el rango de la matriz A. **[1 punto]**

b) ¿Existe algún valor de $k \in \mathbb{R}$ para el cual el sistema $A \cdot X = O$ sea incompatible? **[0,75 puntos]**

c) ¿Para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ el sistema $A \cdot X = O$ es compatible indeterminado? **[0,75 puntos]**

Solución

a) Puesto que la matriz es de orden 3×4 el rango no puede es a los sumo 3. Además se tiene que $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - (-2) = 5 \neq 0$, con lo que la matriz A tiene un menor de orden 2

Pedro Castro Ortega
lasmatematicas.eu

distinto de cero. Esto quiere decir que el rango es al menos 2. Estudiemos ahora los dos determinantes que contienen al menor anterior.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & k \\ 1 & 4 & k \end{vmatrix} = (3k - k) - (-2k + 4k) = 2k - 2k = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & k \\ 0 & 5k & 1 \end{vmatrix} 3 - (-2 + 5k^2) = 5 - 5k^2$$

Es fácil darse cuenta de que ambos son simultáneamente cero cuando $k = -1$ o $k = 1$. Por tanto, deducimos lo siguiente:

- Si $k = -1$ o $k = 1$ el rango de A es 2.
- Si $k \neq -1$ y $k \neq 1$ el rango de A es 3.

b) El sistema $A \cdot X = O$ es homogéneo. Por tanto, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ es una solución del sistema. Así pues no existe ningún valor de $k \in \mathbb{R}$ para el cual el sistema $A \cdot X = O$ sea incompatible.

c) El número de incógnitas de este sistema es $n = 3$. La matriz ampliada del sistema es la matriz A añadiendo una columna de ceros, con lo que el rango de la matriz ampliada y el de la matriz A es el mismo. Para $k = -1$ o $k = 1$ tenemos rango$A = 2 < 3 = n$. Según el teorema de Rouché, esto quiere decir que el sistema es compatible indeterminado si $k = -1$ o $k = 1$.

Ejercicio 4

Dadas las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x - y = 1 \\ y + z = 1 \end{cases} \qquad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$$

se pide

a) Determina su posición relativa. **[1,25 puntos]**

b) Halla el ángulo que forman sus vectores de dirección. **[1,25 puntos]**

Solución

a) En la ecuación de la recta r haciendo por ejemplo, $y = 0$, obtenemos $x = 1$, $y = 1$. Por tanto, un punto de r es $A(1, 0, 1)$. Hallemos un vector director de r:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -i + k - j$$

Por tanto un vector director de r es $\vec{u} = (-1, -1, 1)$.

Un punto y un vector director de s son, respectivamente, $B(0, 1, 0)$ y $\vec{v} = (1, -1, 1)$.

La matriz formada por los vectores directores de r y s es

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

El rango de esta matriz es 2, pues contiene un menor de orden dos distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - (-1) = 2 \neq 0$$

De aquí se deduce que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen distinta dirección, con lo que las rectas o bien se cortan (secantes), o bien se cruzan. Para saber cual de las dos alternativas es la correcta estudiaremos el rango de la matriz formada por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, -1)$, que es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

El determinante de la matriz anterior es:

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1 + 1 + 1) - (1 + 1 - 1) = 0$$

Por tanto, el rango de la matriz anterior no puede ser 3. Entonces el rango será igual a 2, lo que indica que los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{AB}$ se encuentran en un mismo plano, con lo que las rectas r y s son secantes (se cortan en un punto).

Aunque no se pide explícitamente en el enunciado, vamos a hallar el punto de corte de las rectas r y s.

Se puede deducir con facilidad que la ecuación general de la recta s es $s \equiv \begin{cases} x+y=1 \\ x-z=0 \end{cases}$.

El punto de corte de r y s será la solución del sistema formado por las ecuaciones de r y s:

$$\begin{cases} x-y=1 \\ y+z=1 \\ x+y=1 \\ x-z=0 \end{cases}$$

Según se ha deducido anteriormente, este sistema debe ser compatible y determinado (solución única). Si llamamos A a la matriz de los coeficientes, $A1b$ a la matriz ampliada y n al número de incógnitas, por el teorema de Rouché se debe de cumplir que

$$\text{rango } A = \text{rango } A|b = n = 3$$

Comprobémoslo. La matriz de los coeficientes y la matriz ampliada son, respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad A|b = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de A es 3 pues contiene un menor de orden 3 distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1-1 = -2 \neq 0$$

El rango de la matriz ampliada también es tres porque el único menor de orden cuatro es igual a cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 = 0$$

Para calcular el determinante hemos hecho ceros en la primera columna restando a la tercera y cuarta filas la primera. Luego se ha desarrollado el determinante de orden 4 por los elementos de la primera columna, y el determinante de orden 3 por los elementos de la segunda fila.

Ahora podemos hallar la solución eliminando la última fila del sistema y aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-1-1}{-2} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{1-1}{-2} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{(1-1)-(1+1)}{-2} = 1$$

Por tanto, el punto de corte de las dos rectas es el punto $(1, 0, 1)$.

b) Llamemos α al ángulo formado por las rectas r y s. Puesto que

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$

donde $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son los vectores directores de r y s, tenemos:

$$\cos\alpha = \frac{(-1,-1,1)\cdot(1,-1,1)}{|(-1,-1,1)|\cdot|(1,-1,1)|} = \frac{-1+1+1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

Por tanto:

$$\alpha = \arccos\frac{1}{3} = 70,53^\circ$$