1. a) Determina razonadamente los valores de a para los que la matriz A no tiene inversa

$$A=\begin{pmatrix}1 & a+1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 1 & a\\ a & 0 & 1 & 0\\ a & 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

b) Calcula razonadamente todos los posibles valores x, y, z para que el producto de las matrices $C=\begin{pmatrix}x & 1\\ y & z\end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ conmute.

Solución

a) Una matriz cuadrada no tiene inversa si, y solamente si, $|A|=0$. Hallemos el determinante de la matriz A.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & a+1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 1 & a\\ a & 0 & 1 & 0\\ a & 0 & 2 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & a+1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 1 & a\\ a & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=-1\cdot\begin{vmatrix}1 & a+1 & 1\\ 0 & 2 & a\\ a & 0 & 0\end{vmatrix}=-a\cdot\left[a\cdot(a+1)-2\right]=$$

$$=-a\cdot\left(a^2+a-2\right)=-a(a-1)(a+2).$$

En el primer paso se ha restado a la cuarta fila la tercera (con lo que el determinante no varía), y en siguiente se ha desarrollado el determinante por los elementos de la cuarta fila. El determinante de orden tres se ha resuelto desarrollando por los elementos de la última fila.

Entonces $|A|=0 \Leftrightarrow -a(a-1)(a+2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}a=0\\ a=1\\ a=-2\end{cases}$. Por tanto, A no tiene inversa si $a=0$, $a=1$ o $a=-2$.

b) Para que las matrices C y D conmuten ha de ser $C\cdot D=D\cdot C$.

Por un lado, $C\cdot D=\begin{pmatrix}x & 1\\ y & z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x+1 & x-1\\ 3y+z & y-z\end{pmatrix}$.

Y, por otro lado, $D\cdot C=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & 1\\ y & z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x+y & 3+z\\ x-y & 1-z\end{pmatrix}$.

Entonces $C\cdot D=D\cdot C \Leftrightarrow \begin{pmatrix}3x+1 & x-1\\ 3y+z & y-z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x+y & 3+z\\ x-y & 1-z\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}3x+1=3x+y\\ x-1=3+z\\ 3y+z=x-y\\ y-z=1-z\end{cases}$.

La primera y la última ecuación del sistema anterior proporcionan claramente la solución $y=1$. Sustituyendo este valor en las ecuaciones segunda y tercera nos queda el sistema $\begin{cases}x-1=3+z\\ 3+z=x-1\end{cases}$, formado por dos ecuaciones iguales, luego hay infinitas soluciones. Llamando $z=\lambda$, $x-1=3+\lambda\Rightarrow x=4+\lambda$.

Así pues, para que C y D conmuten ha de ser $x=4+\lambda$, $y=1$ y $z=\lambda$, con $\lambda\in\mathbb{R}$.

2. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} ax - ay - z = a \\ ax - ay = a \\ ax + 2y - z = 1 \end{cases}$$

b) Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 2$, si es posible.

Solución

a) La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} a & -a & -1 \\ a & -a & 0 \\ a & 2 & -1 \end{pmatrix}$, y la matriz ampliada es $B = \begin{pmatrix} a & -a & -1 & a \\ a & -a & 0 & a \\ a & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Se tiene que $|A| = (a^2 - 2a) - (a^2 + a^2) = -a^2 - 2a = a(-a-2)$. Por tanto, $|A| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -2 \end{cases}$. Entonces:

- Si $a \neq 0$ y $a \neq -2$, $r(A) = 3 = r(B) = n$ (n representa el número de incógnitas). Por el teorema de Rouché, el sistema es compatible determinado (solución única).
- Si $a = 0$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, cuyo rango es dos pues contiene un menor de orden dos distinto de cero:

  $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 - (-2) = 2 \neq 0$. Además, la matriz ampliada es $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, cuyo rango no puede ser tres porque contiene una fila de ceros. Por tanto, en este caso, $r(A) = 2 = r(B) < 3 = n$, y el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).
- Si $a = -2$, $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, cuyo rango es dos pues contiene un menor de orden dos distinto de cero:

  $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2 \neq 0$. Además, la matiz ampliada es $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, cuyo rango es tres porque contiene un menor de orden tres distinto de cero: $\begin{vmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-4-4) - (2-4) = -8 + 2 = -6 \neq 0$.

  Entonces, en este caso, $r(A) = 2 \neq 3 = r(B)$, con lo que el sistema es incompatible (no tiene solución).

b) Si $a = 2$ el sistema es compatible determinado y queda del siguiente modo.

$$\begin{cases} 2x - 2y - z = 2 \\ 2x - 2y = 2 \\ 2x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

El determinante de la matriz de los coeficientes es $|A| = 2(-2-2) = -8$. Para resolver el sistema haremos uso de la regla de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{(4-4)-(2+4)}{-8} = \frac{-6}{-8} = \frac{3}{4}.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{(-4-2)-(-4-4)}{-8} = \frac{2}{-8} = -\frac{1}{4}.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{0}{-8} = 0$$ (el determinante es cero porque las dos primeras filas son iguales).

3. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x-2} & \text{si} \quad x < 2 \\ \cos(\pi x) & \text{si} \quad 2 \le x \le 3 \\ \dfrac{\ln(x-2)}{3-x} & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

a) Determina razonadamente los puntos en los que la función es continua, calcula los puntos en los que es discontinua y clasifica el tipo de discontinuidad, si los hubiera.

b) Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{xe^{-x}}{1+2x-\cos(x^2)}$.

Solución

a) Estudiemos la continuidad en $x = 2$.

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{3}{x-2} = \left[\frac{3}{0}\right] = -\infty. \quad \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \cos(\pi x) = \cos 2\pi = 1$$

Entonces $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ y no existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$. Por tanto f no es continua en $x = 2$. Además, como uno de los límites laterales es infinito, se trata de una discontinuidad de salto infinito.

Estudiemos ahora la continuidad en $x = 3$.

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \cos(\pi x) = \cos 3\pi = -1. \quad \lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \frac{\ln(x-2)}{3-x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{L`Hôpital}}{=} \lim_{x \to 3^+} \frac{\frac{1}{x-2}}{-1} = -1.$$

Entonces, por ser los límites laterales iguales, $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = -1$. Además, $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = -1 = f(3)$, con lo que f es continua en $x = 3$.

Si x es cualquier otro número real distinto de 2 y de 3, f también es continua por tratarse de funciones elementales, las cuales son continuas en todo su dominio de definición. Obsérvese que el "tercer trozo" $y=\dfrac{\ln(x-2)}{3-x}$ tiene sentido para todo $x>3$, pues el logaritmo siempre se hará de un número positivo y el denominador no se anula.

En resumen, f es continua en $\mathbb{R}-\{2\}$ y en $x=2$ hay una discontinuidad de salto infinito.

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{xe^{-x}}{1+2x-\cos(x^2)}=\left[\frac{0}{1+0-1}=\frac{0}{0}\right]\overset{\text{L`Hôpital}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-xe^{-x}}{2+2x\operatorname{sen}(x^2)}=\frac{1-0}{2+0}=\frac{1}{2}$.

4. Sea la función $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+1}$

a) Halla razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de la función $f(x)$ y clasifícalos.

b) Calcula la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x=0$.

Solución

a) La derivada de la función f es

$$f'(x)=\frac{(2x-2)\cdot(x^2+1)-(x^2-2x+1)2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^3+2x-2x^2-2-2x^3+4x^2-2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^2-2}{(x^2+1)^2}$$

Entonces $f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{2x^2-2}{(x^2+1)^2}=0\Leftrightarrow 2x^2-2=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\x=1\end{cases}$. Estos dos últimos puntos digamos que son los "candidatos" a ser extremos relativos.

Hallemos la segunda derivada de f:

$$f''(x)=\frac{4x(x^2+1)^2-(2x^2-2)2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4}=\frac{4x(x^2+1)-4x(2x^2-2)}{(x^2+1)^3}=\frac{4x(-x^2+3)}{(x^2+1)^3}$$

Estudiemos ahora el signo de la segunda derivada en $x=-1$ y $x=1$.

$$f''(-1)=\frac{-4(-1+3)}{(1+1)^3}=\frac{-8}{8}=-1<0\ ;\ f''(1)=\frac{4(-1+3)}{(1+1)^3}=\frac{8}{8}=1>0.$$

Entonces, por el criterio de la segunda derivada, se tiene que $x=-1$ es un máximo relativo y $x=1$ es un mínimo relativo. Puesto que $f(-1)=\dfrac{1+2+1}{1+1}=\dfrac{4}{2}=2$ y $f(1)=\dfrac{1-2+1}{1+1}=\dfrac{0}{2}=0$, las coordenadas de los puntos son $(-1,2)$ (máximo relativo) y $(1,0)$ (mínimo relativo).

b) La rectas tangente y normal en $x=0$ son, respectivamente, $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, y $y-f(0)=-\dfrac{1}{f'(0)}(x-0)$.

Puesto que $f(0)=\dfrac{0-0+1}{0+1}=\dfrac{1}{1}=1$ y $f'(0)=\dfrac{0-2}{(0+1)^2}=\dfrac{-2}{1}=-2$, la recta tangente en $x=0$ es $y-1=-2x\Rightarrow y=-2x+1$, y la recta normal en $x=0$ es $y-1=-\dfrac{1}{-2}x\Rightarrow y=\dfrac{1}{2}x+1$.

5. a) Calcula razonadamente la siguiente integral: $\displaystyle\int\frac{3x-2}{x^2-2x+1}dx$.

b) Calcula, justificadamente, el área acotada del recinto limitado por la gráfica de la función $g(x)=-x^3+2x^2+3x$ y el eje de abscisas.

Solución

a) Se trata de una integral racional. Puesto que $x^2-2x+1=(x-1)^2$, $x=1$ es una raíz doble del denominador. Entonces: $\dfrac{3x-2}{x^2-2x+1}=\dfrac{3x-2}{(x-1)^2}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{(x-1)^2}=\dfrac{A(x-1)+B}{(x-1)^2}$. Igualando los numeradores se tiene que $3x-2=A(x-1)+B$. Para $x=1$, $1=B$. Y para $x=0$, $-2=-A+B\Rightarrow -2=-A+1\Rightarrow A=3$. De este modo:

$$\int\frac{3x-2}{x^2-2x+1}dx=\int\frac{3}{x-1}dx+\int\frac{1}{(x-1)^2}dx=3\ln(x-1)-\frac{1}{x-1}+C.$$

b) Puesto que $-x^3+2x^2+3x=-x(x^2-2x-3)=-x(x+1)(x-3)$, las soluciones de la ecuación $-x^3+2x^2+3x=0$ son $x=-1$, $x=0$ y $x=3$. Esto quiere decir que la gráfica de g corta al eje X en los puntos $(-1,0)$, $(0,0)$ y $(3,0)$. De este modo, el recinto limitado por la gráfica de la función g y el eje de abscisas lo podemos dividir en dos, el encerrado entre $x=-1$ y $x=0$, a cuya área llamaremos A_1 y el encerrado entre $x=0$ y $x=3$, a cuya área llamaremos A_2. Calculemos las integrales definidas.

$$\int_{-1}^{0}\left(-x^3+2x^2+3x\right)dx=\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right]_{-1}^{0}=0-\left(-\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-\frac{3}{2}=\frac{3+8-18}{12}=-\frac{7}{12}.$$

$$\int_{0}^{3}\left(-x^3+2x^2+3x\right)dx=\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right]_{0}^{3}=\left(-\frac{81}{4}-\frac{54}{3}+\frac{27}{2}\right)-0=\frac{-243+216+162}{12}=\frac{135}{12}.$$

Por tanto: $A_1=\dfrac{7}{12}\ \text{uds}^2$ y $A_2=\dfrac{135}{12}\ \text{uds}^2$.

Finalmente, si llamamos A al área acotada del recinto limitado por la gráfica de la función $g(x)=-x^3+2x^2+3x$ y el eje de abscisas, se tiene que $-\dfrac{7}{12}+\dfrac{135}{12}=\dfrac{142}{12}=\dfrac{71}{6}\ \text{uds}^2\cong 11{,}83\ \text{uds}^2$.

6. Dados los planos $\pi_1\equiv 2x+y+z-2=0$ y $\pi_2\equiv\begin{cases}x=-1+\lambda-\mu\\ y=-\lambda+\mu\\ z=-2+2\lambda\end{cases}$

a) Calcula razonadamente el ángulo que forman los dos planos.

b) Halla razonadamente el volumen del tetraedro formado por el punto $P(3,-3,2)$ y los puntos de corte del plano π_1 con los ejes de coordenadas.

Solución

a) Expresemos, en primer lugar, el plano π_2 en su forma general:

$$\pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x+1 & 1 & -1 \\ y & -1 & 1 \\ z+2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \pi_2 \equiv (z+2-2y)-(z+2+2x+2)=0 \Leftrightarrow \pi_2 \equiv -2x-2y-2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \pi_2 \equiv x+y+1=0 .$$

Un vector normal o perpendicular al plano π_1 es $\vec{u}=(2,1,1)$, y un vector normal o perpendicular al plano π_2 es $\vec{v}=(1,1,0)$.

El ángulo α formado por los dos planos coincide con el ángulo formado por sus vectores normales o perpendiculares. Por tanto: $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \dfrac{|2\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 0|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Entonces: $\alpha = \arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 30^{\circ}$.

b) Como todo punto del eje X es de la forma $(x,0,0)$, el punto Q de corte del plano π_1 con el eje X será: $2x+0+0-2=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow Q(1,0,0)$.

Como todo punto del eje Y es de la forma $(0,y,0)$, el punto R de corte del plano π_1 con el eje Y será: $0+y+0-2=0 \Rightarrow y=2 \Rightarrow R(0,2,0)$.

Como todo punto del eje Z es de la forma $(0,0,z)$, el punto S de corte del plano π_1 con el eje Z será: $0+0+z-2=0 \Rightarrow z=2 \Rightarrow S(0,0,2)$.

El volumen V del tetraedro formado por los puntos P, Q, R y S es igual a la sexta parte del valor absoluto del producto mixto $\left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR},\overrightarrow{PS}\right)$. Hallemos este producto mixto. Para ello hemos de tener en cuenta que $\overrightarrow{PQ}=(-2,3,-2)$, $\overrightarrow{PR}=(-3,5,-2)$, $\overrightarrow{PS}=(-3,3,0)$. Entonces:

$$\left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR},\overrightarrow{PS}\right) = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -2 \\ -3 & 5 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (18+18)-(30+12) = 36-42 = -6 .$$

Finalmente: $V = \dfrac{1}{6}\cdot\left|\left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR},\overrightarrow{PS}\right)\right| = \dfrac{1}{6}\cdot|-6| = \dfrac{6}{6} = 1 \text{ ud}^3$.

7. Dados el plano $\pi \equiv \begin{cases} x=-1+\mu \\ y=1+\lambda+a\mu \\ z=1+2\lambda-\mu \end{cases}$ y la recta $s \equiv \begin{cases} x-2y=1-b \\ z=-3 \end{cases}$

a) Calcula razonadamente el valor de los parámetros a y b para que la recta s esté contenida en el plano π.
b) Si $a=0$ y $b=3$, calcula razonadamente la ecuación en forma implícita de la recta r que pasa por el punto $P(1,-1,-8)$, es paralela al plano π y perpendicular a la recta s.

Solución

a) Hallemos, en primer lugar, la ecuación general del plano π:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & 0 & 1 \\ y-1 & 1 & a \\ z-1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \pi \equiv (-x-1+2y-2)-(z-1+2ax+2a)=0 \Leftrightarrow (-1-2a)x+2y-z-2-2a=0 .$$

De aquí se obtiene que un vector normal o perpendicular a π es $\vec{u}=(-1-2a,2,-1)$.

Ahora vamos a expresar la recta s en paramétricas.

Llamando $y=\lambda$ se obtiene que $s \equiv \begin{cases} x=1-b+2\lambda \\ y=\lambda \\ z=-3 \end{cases}$. De aquí se obtiene que un punto de s es $P(1-b,0,-3)$ y un vector director de s es $\vec{v}=(2,1,0)$.

Para que $s \subset \pi$, se debe cumplir que $\vec{u} \perp \vec{v}$, es decir, $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$. Esto nos llevará a deducir el valor de a:

$(-1-2a)\cdot 2+2\cdot 1+(-1)\cdot 0=0 \Rightarrow -2-4a+2=0 \Rightarrow a=0$.

De lo anterior se deduce que la ecuación del plano es $\pi \equiv -x+2y-z-2=0$.

Además, debe ocurrir también que $P \in \pi$. O sea:

$-(1-b)+2\cdot 0-(-3)-2=0 \Rightarrow -1+b+1=0 \Rightarrow b=0$.

b) Ya hemos visto que, si $a=0$, la ecuación general del plano es $\pi \equiv -x+2y-z-2=0$. Además, si $b=3$, las ecuaciones paramétricas de la recta son $s \equiv \begin{cases} x=-2+2\lambda \\ y=\lambda \\ z=-3 \end{cases}$. En este caso π y s son paralelos. Por dos razones: la primera es que, al igual que en el apartado anterior, el vector normal del plano, $\vec{u}=(-1,2,-1)$, y el vector director de la recta, $\vec{v}=(2,1,0)$, son claramente perpendiculares. Y la segunda, porque el punto $P(-2,0,-3)$ de s no pertenece a π, ya que $-(-2)+2\cdot 0-(-3)-2=2+3-2=3\neq 0$.

Un vector director de la recta r que se pide será el producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Esto es porque el producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es un vector perpendicular a ambos y, por tanto, la recta que tenga su dirección será perpendicular a la recta s y perpendicular al vector normal del plano π (o sea, paralela al mismo).

Hagamos los cálculos.

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2j-k)-(4k-i)=i-2j-5k \Rightarrow \vec{u}\times\vec{v}=(1,-2,-5).$$

De este modo, la ecuación continua de la recta r que se pide es: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z+8}{-5}$. Pasando estas ecuaciones a la forma implícita tenemos: $r \equiv \begin{cases} -2x+2=y+1 \\ -5x+5=z+8 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} -2x-y+1=0 \\ -5x-z=3 \end{cases}$.

8. a) En servicio de emergencias el 60 % de los avisos que se reciben se clasifican con el código amarillo, el 30 % con el naranja y el 10 % con el rojo. Se sabe que el porcentaje de avisos recibidos que son falsas alarmas es 3 % en caso de código amarillo, 2 % en el naranja y 1 % en el rojo. Si se recibe un aviso,

a1) ¿qué probabilidad hay de que se trate de una falsa alarma?

a2) Si se sabe que el aviso recibido no ha sido falsa alarma, ¿qué probabilidad hay de que haya sido un aviso código rojo o naranja?

b) Si en una centralita se reciben nueve avisos,

b1) ¿Qué probabilidad hay de que la centralita reciba 2 o menos avisos naranjas?

b2) ¿Qué probabilidad hay de que todos los avisos sen amarillos o naranjas?

n	k \ p	0.01	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.33	0.35	0.40	0.45	0.49	0.50
9	0	0.9135	0.6302	0.3874	0.2316	0.1342	0.0751	0.0404	0.0272	0.0207	0.0101	0.0046	0.0023	0.0020
	1	0.0830	0.2985	0.3874	0.3679	0.3020	0.2253	0.1556	0.1206	0.1004	0.0605	0.0339	0.0202	0.0176
	2	0.0034	0.0629	0.1722	0.2597	0.3020	0.3003	0.2668	0.2376	0.2162	0.1612	0.1110	0.0776	0.0703
	3	0.0001	0.0077	0.0446	0.1069	0.1762	0.2336	0.2668	0.2731	0.2716	0.2508	0.2119	0.1739	0.1641
	4	0.0000	0.0006	0.0074	0.0283	0.0661	0.1168	0.1715	0.2017	0.2194	0.2508	0.2600	0.2506	0.2461
	5	0.0000	0.0000	0.0008	0.0050	0.0165	0.0389	0.0735	0.0994	0.1181	0.1672	0.2128	0.2408	0.2461
	6	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0028	0.0087	0.0210	0.0326	0.0424	0.0743	0.1160	0.1542	0.1641
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0012	0.0039	0.0069	0.0098	0.0212	0.0407	0.0635	0.0703
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0008	0.0013	0.0035	0.0083	0.0153	0.0176
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0008	0.0016	0.0020

Solución

a) Recibido un aviso, sean A, N y R los sucesos "aviso clasificado como código amarillo", "aviso clasificado como código naranja" y "aviso clasificado como código rojo", respectivamente. Sea también F el suceso "el aviso recibido es una falsa alarma". Entonces, según el enunciado, $P(A)=0,6$; $P(N)=0,3$ y $P(R)=0,1$. Además, también tenemos que $P(F/A)=0,03$; $P(\overline{F}/A)=0,97$; $P(F/N)=0,02$; $P(\overline{F}/N)=0,98$; $P(F/R)=0,01$; $P(\overline{F}/R)=0,99$.

a1) Por el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de que, recibido un aviso, sea una falsa alarma es:

$$P(F)=P(F\cap A)+P(F\cap N)+P(F\cap R)=P(A)\cdot P(F/A)+P(N)\cdot P(F/N)+P(R)\cdot P(F/R)=$$
$$=0,6\cdot 0,03+0,3\cdot 0,02+0,1\cdot 0,01=0,018+0,006+0,001=0,025.$$

a2) En primer lugar, la probabilidad de que, recibido un aviso, no sea una falsa alarma es:

$$P(\overline{F})=1-P(F)=1-0,025=0,975.$$

Supongamos que el aviso recibido no ha sido falsa alarma. La probabilidad de que haya sido un código rojo es

$$P(R/\overline{F})=\frac{P(R\cap\overline{F})}{P(\overline{F})}=\frac{P(R)\cdot P(\overline{F}/R)}{P(\overline{F})}=\frac{0,1\cdot 0,99}{0,975}=\frac{0,099}{0,975}=0,1015.$$

Y la probabilidad de que haya sido código naranja:

$$P(N/\overline{F})=\frac{P(N\cap\overline{F})}{P(\overline{F})}=\frac{P(N)\cdot P(\overline{F}/N)}{P(\overline{F})}=\frac{0,3\cdot 0,98}{0,975}=\frac{0,294}{0,975}=0,3015.$$

Por tanto, si el aviso recibido no ha sido falsa alarma, la probabilidad de que haya sido un código rojo o naranja es

$$P\left(R/\overline{F}\right)+P\left(N/\overline{F}\right)=0{,}1015+0{,}3015=0{,}403$$

Este subapartado también se puede hacer del siguiente modo.

Si el aviso recibido no ha sido falsa alarma, el suceso código rojo o naranja es el contrario del suceso código amarillo.

$$P\left(\left(R\cup N\right)/\overline{F}\right)=1-P\left(A/\overline{F}\right)=1-\frac{P\left(A\cap\overline{F}\right)}{P\left(\overline{F}\right)}=1-\frac{P(A)\cdot P\left(\overline{F}/A\right)}{P\left(\overline{F}\right)}=1-\frac{0{,}6\cdot 0{,}97}{0{,}975}=1-597=0{,}403$$

Todo este apartado se puede hacer igualmente usando un diagrama de árbol, obteniéndose idénticos resultados.

b) Se trata en, ambos casos, de una variable que sigue una distribución binomial con $n=9$. En cada uno de ellos consideraremos como éxito el suceso adecuado para poder hacer uso de la tabla.

b1) Consideraremos que el éxito es "recibir aviso naranja". Entonces $p=0{,}3$. Entonces la probabilidad de recibir 2 o menos avisos naranjas es, haciendo uso de la tabla:

$$P(X\leq 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=0{,}0404+0{,}1556+0{,}2668=0{,}4628.$$

b2) Que todos los avisos sean amarillos o naranjas es lo mismo que no recibir ningún aviso de código rojo. Si ahora consideramos el éxito "recibir código rojo", tendremos que $p=0{,}1$, con lo que la probabilidad que se pide será la misma que la de que se reciban cero códigos rojos. Haciendo uso de la tabla se tiene que:

$$P(X=0)=0{,}3874.$$

También se puede hacer de esta otra forma.

Si llamamos éxito a "recibir código amarillo o naranja", tendremos que $p=0{,}9$. Y la variable X se distribuirá según una binomial $B(9\,;\,0{,}9)$. Haciendo uso de la función de probabilidad de la binomial:

$$P(X=9)=\binom{9}{9}\cdot 0{,}9^9\cdot 0{,}1^0=0{,}9^9=0{,}3874.$$